В. С. Чарин, О локально бикомпактных локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для замкнутых подгрупп,
Сиб. матем. журн., 1960, том 1, номер 1, 139–151

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том I, № 1 Май — Июнь 1960 г.

В. С. ЧАРИН

О ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ПОДГРУПП

§ 1. Введение

Как и в случае абстрактных групп, топологическая группа называется локально нильпотентной (локально разрешимой), если каждое конечное множество ее элементов порождает нильпотентную (разрешимую) подгруппу. В. М. Глушков (5) изучал локально бикомпактные локально нильпотентные и локально бикомпактные локально разрешимые группы G, удовлетворяющие следующему условию (условию минимальности для замкнутых подгрупп):

Каждая убывающая цепочка замкнутых подгрупп $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *обрывается на конечном номере.*

В. М. Глушков показал, что каждая такая группа G содержит инвариантную замкнутую подгруппу H конечного индекса, которая разлагается в прямое произведение конечного числа одномерных торовидных подгрупп и дискретных подгрупп типа q^{∞} по некоторым простым числам q.

С другой стороны, еще раньше С. Н. Черников (4) исследовал строение абстрактных локально нильпотентных и локально разрешимых групп, абелевы подгруппы которых удовлетворяют условию обрыва убывающих цепочек подгрупп. Естественным аналогом этого условия является следующее свойство топологической группы G (условие минимальности для замкнутых абелевых подгрупп):

Каждая абелева замкнутая подгруппа A *группы* G *удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп.*

В работе (6) В. М. Глушков доказал эквивалентность условий минимальности для замкнутых подгрупп и для замкнутых абелевых подгрупп локально бикомпактных локально нильпотентных групп. Целью настоящей работы является распространение этого результата на локально бикомпактные локально разрешимые группы. А именно, будет доказана справедливость следующей теоремы.

Локально бикомпактная локально разрешимая группа удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп.

§ 2. Вспомогательные предложения

Теорема 1. *Пусть топологическая группа* B *удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп,* K *— связная компонента ее единицы, являющаяся конечномерной торовидной группой,* *такая, что фактор-группа B/K абелева и бикомпактна. Тогда фактор-группа B/K конечна.*

Доказательство. 1°. Прежде всего заметим, что если, кроме всех приведенных условий, группа B нильпотентна, то утверждение леммы вытекает из результатов работы В. М. Глушкова ([6]). В самом деле, в этом случае группа B удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп и потому фактор-группа B/K будет дискретной, а следовательно, и конечной.

2°. Пусть теперь группа B удовлетворяет условиям леммы. Фактор-группа B/K вполне несвязна. Через $Z(K)$ обозначим централизатор подгруппы K. Ясно, что подгруппа $Z(K)$ замкнута в B и $K \subset Z(K)$. Так как фактор-группа $Z(K)/K$ абелева, то $Z(K)$ — метабелева группа и K содержится в центре $Z(K)$.

Итак, группа $Z(K)$ удовлетворяет всем условиям леммы и, кроме того, метабелева. Из сделанного выше замечания (п. 1°) следует, что фактор-группа $Z(K)/K$ конечна.

Каждый элемент $x \in B$ индуцирует в подгруппе K автоморфизм $\alpha(x)$, который представляется в виде линейного преобразования алгебры Ли группы K, а потому может быть записан в виде неособенной матрицы определенного порядка n над полем действительных чисел (здесь порядок n равен размерности подгруппы K). Отображение $x \to \alpha(x)$ группы B в группу таких матриц непрерывно. Если Γ — образ B при этом отображении, то Γ — бикомпактная группа матриц, изоморфная фактор-группе $A = B/Z(K)$ [см. теорему 12 работы ([1])].

Так как группа Γ матриц абелева и бикомпактна, то она эквивалентна над полем комплексных чисел группе Γ' диагональных матриц вида

$$\alpha'(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) & 0 & \ldots 0 \\ 0 & g_2(x) & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0 & \ldots g_n(x) \end{bmatrix}.$$

где $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ — непрерывные функции на B и $|g_i(x)| = 1$.

Отображение $\Phi: x \to (g_1(x), \ldots, g_n(x))$ является непрерывным отображением бикомпактной группы B в n-мерную торовидную группу, которую можно отождествить с подгруппой K, а образ группы B — с группой Γ'. При этом

$$\Gamma' \cong B/Z(K) = A.$$

Группа Γ' бикомпактна и, следовательно, замкнута в K. Поэтому она разлагается в прямое произведение конечной подгруппы и конечного числа одномерных торовидных подгрупп. Группа A, являясь фактор-группой бикомпактной вполне несвязной группы B/K по конечной подгруппе $Z(K)/K$, вполне несвязна. Значит, Γ' также вполне несвязна. Но это возможно лишь в том случае, когда Γ' в своем разложении в прямое произведение не содержит множителей, являющихся торовидными подгруппами, т. е. когда Γ' конечна. Значит, фактор-группа $B/Z(K)$ конечна, а следовательно, и фактор-группа B/K конечна. Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть G — топологическая группа, K — ее инвариантная подгруппа, являющаяся конечномерной торовидной группой и такая, что фактор-группа G/K дискретна и (как абстрактная группа) разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков. Тогда всякая замкнутая абелева подгруппа A группы G разлагается в прямое произведение $A = B \times C$, где B — конечномерная торовидная подгруппа, C — дискретная подгруппа, разложимая в прямое произведение конечных циклических подгрупп.*

Доказательство. Если A — замкнутая абелева подгруппа, то пусть $A' = A \cap K$. Тогда A' — замкнутая подгруппа в K и, следовательно, бикомпактна. Поэтому $A' = B \times C'$, где B — конечномерная торовидная подгруппа, C' — конечная подгруппа. Фактор-группа

$$A/A' = A/A \cap K \cong AK/K$$

и потому разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков. Рассмотрим фактор-группу $\overline{A} = A/B$. Ясно, что $\overline{A}$ обладает подгруппой, изоморфной C', фактор-группа по которой изоморфна A/A'. Значит, $\overline{A}$ дискретна и, как легко видеть, разлагается в прямое произведение конечных циклических подгрупп. Так как B — полная подгруппа в A, то A, как абстрактная группа, разложима в прямое произведение $A = B \times C$, где абстрактная подгруппа C изоморфна $\overline{A}$. В силу того, что B открыта в A и $B \cap C = 1$, C есть дискретная подгруппа в A. Любая окрестность единицы в B является окрестностью единицы в A. Следовательно, разложение $A = B \times C$ и изоморфизм $C \cong A/B = \overline{A}$ справедливы не только в абстрактном, но и в топологическом смысле.

Лемма 2. *Пусть K — связная абелева группа Ли, $\mathfrak{K}$ — алгебра Ли, соответствующая K, α и β — автоморфизмы группы K и γ — эндоморфизм, равный $\alpha - \beta$. Тогда для дифференциалов отображений α, β, γ имеет место соотношение: $d\gamma = d\alpha - d\beta$.*

Доказательство. Если $x \in \mathfrak{K}$, то

$$\gamma(\exp x) = \exp d\gamma(x).$$

С другой стороны,

$$\gamma(\exp x) = \alpha(\exp x) \cdot (\beta(\exp x))^{-1} =$$

$$= \exp d\alpha(x) \cdot \exp(-d\beta)(x) = \exp(d\alpha - d\beta)(x).$$

Поэтому

$$\exp d\gamma(x) = \exp(d\alpha - d\beta)(x).$$

Так как для $y \in \mathfrak{K}$, достаточно близких к 0, соответствие между y и $\exp y$ взаимно однозначно, то

$$d\gamma(x) = (d\alpha - d\beta)(x)$$

для всех x, достаточно близких к 0, а потому и для любого элемента x из $\mathfrak{K}$. Но это и означает, что $d\gamma = d\alpha - d\beta$.

З а м е ч а н и е. При доказательстве нижеследующей теоремы 2 мы будем отождествлять автоморфизмы α группы K с соответствующими отображениями $d\alpha$ алгебры $\mathfrak{K}$. Так как каждое отображение $d\alpha$ изображается в виде матрицы, то значение доказанной леммы состоит в том, что в последующем, не оговаривая это особо, мы будем представлять разность двух автоморфизмов в виде разности матриц, представляющих эти автоморфизмы.

Т е о р е м а 2. *Пусть локально бикомпактная группа G удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых периодических подгрупп, имеет замкнутую инвариантную подгруппу K, являющуюся связной абелевой группой Ли, такой, что фактор-группа G/K дискретна и (как абстрактная группа) разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, не обязательно равных. Тогда фактор-группа G/K конечна.*

Проведем доказательство методом от противного. Для этого допустим, что группа G удовлетворяет всем условиям теоремы, но фактор-группа G/K бесконечна, т. е. дискретна и разлагается в прямое произведение бесконечного множества циклических подгрупп простых порядков. При этом без ограничения общности рассуждений можно считать, что множество всех множителей в этом разложении счетно, так как в противном случае в G можно выделить замкнутую подгруппу, удовлетворяющую всем условиям теоремы и обладающую этим свойством.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех замкнутых подгрупп H группы G, обладающих следующим свойством: подгруппа K содержится в H, и фактор-группа H/K бесконечна.

Каждая подгруппа H из множества $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям теоремы и, кроме того, фактор-группа H/K разлагается в прямое произведение счетного множества циклических подгрупп простых порядков.

В принятых обозначениях справедлива следующая, необходимая для доказательства теоремы 2

Л е м м а 3. *Допущение, что множество $\mathfrak{M}$, помимо перечисленных выше свойств, удовлетворяет еще условию, что никакая бесконечная замкнутая подгруппа группы K размерности > 0 и меньшей, чем размерность группы K, не является инвариантной подгруппой ни в одной из групп множества $\mathfrak{M}$, противоречит предположению о бесконечности фактор-группы G/K.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Z/K — централизатор подгруппы K в группе G. Так как $Z(K)$ замкнута в G и содержит K, то она удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и, кроме того, метабелева. Пусть K — компактна. Ввиду эквивалентности условий минимальности для замкнутых подгрупп и для замкнутых абелевых подгрупп локально нильпотентных локально бикомпактных групп, доказанной В. М. Глушковым ([6]), группа $Z(K)$ удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп. Фактор-группа $Z(K)/K$ дискретна, разлагается в прямое произведение циклических подгрупп и удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, значит, она конечна. Так как каждый элемент фактор-группы G/K имеет простой порядок, то легко видеть, что $Z(K)/K$ выделяется в G/K прямым множителем

$$G/K = Z(K)/K \times F/K,$$

где F — замкнутая подгруппа в G и фактор-группа F/K разлагается в прямое произведение счетного множества циклических подгрупп простых порядков:

$$F/K = \{\bar{g}_1\} \times \{\bar{g}_2\} \times \ldots \times \{\bar{g}_i\} \times \ldots$$

Здесь $\{\bar{g}_i\}$ — циклическая подгруппа некоторого простого порядка p_i $(i = 1, 2, \ldots)$ с образующим элементом $\bar{g}_i$; элемент g_i будем считать фиксированным представителем класса $\bar{g}_i$. Заметим, что централизатор подгруппы K в F совпадает с K.

Каждый элемент x группы G индуцирует в подгруппе K автоморфизм $\alpha(x)$, совокупность которых составляет некоторую группу Γ. Отображение $x \to \alpha(x)$ группы G на группу Γ непрерывно, и так как здесь выполняются условия теоремы 12 работы [1], то $\Gamma \cong G/Z(K)$, т. е.

$$\Gamma \cong F/K.$$

Пусть элементу g_i из G соответствует автоморфизм α_i. Тогда

$$\alpha_i \neq 1, \quad \alpha_i^{p_i} = 1, \quad \Gamma = \{\alpha_1\} \times \{\alpha_2\} \times \ldots \times \{\alpha_i\} \times \ldots .$$

Если $\mathfrak{K}$ — алгебра Ли группы K, то $\mathfrak{K}$ — векторное пространство размерности n над полем действительных чисел, и автоморфизмы из Γ представляются линейными преобразованиями пространства $\mathfrak{K}$, т. е. неособенными матрицами порядка n над полем действительных чисел.

Покажем, что среди матриц $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ непременно найдется такая матрица, ни одно собственное значение которой не равно 1.

Для доказательства этого предложения допустим противное, а именно, что каждая матрица α_i $(i = 1, 2, \ldots)$ среди своих собственных значений содержит 1.

Ввиду известной теоремы Шура о периодической абелевой матричной группе, группа Γ эквивалентна над полем комплексных чисел группе Γ' диагональных матриц

$$\alpha' = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots a_n \end{bmatrix}.$$

Каждая матрица α_i подобна некоторой матрице α_i' с диагональными элементами $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}$, среди которых, по предположению, содержится 1. Рассмотрим n бесконечных последовательностей

$$a_m^{(1)}, a_m^{(2)}, \ldots, a_m^{(i)}, \ldots \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Ясно, что среди этих последовательностей найдется по крайней мере одна, пусть, например, с номером $m = 1$, среди элементов которой 1 встречается на бесконечном множестве мест с некоторыми номерами $i_1, i_2, \ldots, i_s, \ldots$. Поэтому каждая диагональная матрица из совокупности $\alpha_{i_1}', \alpha_{i_2}', \ldots, \alpha_{i_s}', \ldots$ имеет первым диагональным элементом 1. Это значит, что в n-мерном векторном пространстве $\mathfrak{K}'$ над полем комплексных чисел найдется такой базис,

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, в котором вектор x_1 является собственным вектором всех матриц $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_s}, \ldots$ с соответствующим собственным значением 1, т. е. имеет место соотношение

$$\alpha_{i_s}(x_1) = x_1 \tag{1}$$

для всех $s = 1, 2, \ldots$.

Так как все матрицы α_{i_s} имеют своими элементами действительные числа, то легко видеть, что все уравнения (1) могут быть удовлетворены некоторым вектором x_1 с действительными компонентами.

Пусть $\mathfrak{K}_1$ — одномерное подпространство векторного пространства $\mathfrak{K}$, содержащее x_1, а K_1 — одномерная подгруппа группы K, соответствующая подалгебре $\mathfrak{K}_1$ алгебры Ли $\mathfrak{K}$.

Обозначим через H ту подгруппу из множества $\mathfrak{M}$, для которой

$$H/K = \{\overline{g}_{i_1}\} \times \{\overline{g}_{i_2}\} \times \ldots \times \{\overline{g}_{i_s}\} \times \ldots. \tag{2}$$

В силу конструкции подгруппы K_1 все ее элементы остаются неподвижными при автоморфизмах $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_s}, \ldots$. Иными словами, каждый элемент из K_1 перестановочен с каждым элементом $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_s}$, а потому и со всеми элементами подгруппы H. Отсюда непосредственно следует существование в подгруппе K замкнутой центральной подгруппы положительной размерности.

Мы получили противоречие с условием леммы 3. Таким образом, среди матриц $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ непременно найдется такая матрица α_m, все собственные значения которой отличны от 1.

Если ε — единичная матрица, то $\beta = \alpha_m - \varepsilon$ есть неособенное линейное преобразование пространства $\mathfrak{K}$. Следовательно, $\beta = \alpha_m - \varepsilon$ можно представлять как эндоморфизм группы K, отображающий K на себя. Иначе говоря, для любого элемента $x \in K$ найдется такой элемент y, что $\beta\,(y) = x$.

Если g_m — элемент группы G, индуцирующий автоморфизм α_m в подгруппе K, т. е.

$$\alpha_m(x) = g_m^{-1} x g_m$$

для любого $x \in K$, то последнее утверждение означает разрешимость уравнения

$$[y, g_m] = x \tag{3}$$

для любого $x \in K$ в K, где $[y, g_m] = y^{-1} g_m^{-1} y g_m$.

Пусть $h_i = [g_m, g_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Все элементы h_i принадлежат K. Ввиду сказанного выше, в подгруппе K найдется бесконечная последовательность элементов $y_1, y_2, \ldots, y, \ldots$, удовлетворяющих уравнениям

$$[y_i, g_m] = h_i \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

С помощью g_i и y_i построим новую бесконечную последовательность элементов $f_i = g_i\, y_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и покажем, что все они перестановочны с элементом g_m, т. е. $[g_m, f_i] = 1$ для всех i. В самом деле,

$$[g_m, f_i] = g_m^{-1} (g_i\, y_i)^{-1} g_m (g_i\, y_i) = g_m^{-1} y_i^{-1} g_i^{-1} g_m\, g_i\, y_i =$$

$$= g_m^{-1} y_i^{-1} g_m (g_m^{-1} g_i^{-1} g_m g_i) y_i = g_m^{-1} y_i^{-1} g_m h_i y_i =$$

$$= g_m^{-1} y_i^{-1} g_m y_i h_i = g_m^{-1} y_i^{-1} g_m y_i \cdot y_i^{-1} g_m^{-1} y_i g_m = 1.$$

Пусть теперь A — замыкание подгруппы, образованной всеми построенными элементами $f_1, f_2, \ldots$ в группе G. Ясно, что $A \cdot K = F$. Так как K — открытая подгруппа, то

$$F/K = AK/K \cong A/A \cap K.$$

Подгруппа $B = A \cap K$ замкнута в K и состоит из таких элементов, которые перестановочны с элементом g_m. Иначе говоря, для любого $x \in B$ имеет место равенство $\alpha_m(x) = x$.

Покажем, что подгруппа B конечна. В самом деле, допустим, что это не верно, т. е. $B = A \cap K$ состоит из бесконечного множества элементов. Будучи замкнутой, подгруппа B компактна. Так как она бесконечна, то B разлагается в прямое произведение конечной подгруппы и некоторого числа $\geqslant 1$ одномерных торовидных подгрупп. Пусть N — один из множителей последнего вида. Тогда для любого $x \in N$ имеет место равенство

$$\alpha_m(x) = x.$$

Если $\mathfrak{N}$ — подалгебра из $\mathfrak{K}$, соответствующая подгруппе N, то все элементы из $\mathfrak{N}$ инвариантны относительно линейного преобразования α_m. Но это значит что 1 является собственным значением α_m, что противоречит выбору α_m.

Полученное противоречие доказывает, что $B = A \cap K$ состоит из конечного числа элементов.

Так как B и A/B — дискретные группы, то и A — дискретная группа. Централизатор $Z(B)$ подгруппы B в A бесконечен, метабелев и замкнут в G. С другой стороны, вследствие результата работы ([4]), группа $Z(B)$ удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп, и так как $Z(B) \supset B$ и $Z(B)/B$ разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, то фактор-группа $Z(B)/B$ конечна. Но это означает, что подгруппа $Z(B)$ конечна. Мы получили противоречие, доказывающее лемму 3. Вернемся к доказательству теоремы 2. Нам требуется установить, что предположение о бесконечности фактор-группы G/K приводит к противоречию во всех случаях, а не только при предположениях леммы 3. Это утверждение мы будем доказывать индукцией по размерности группы K.

Если $n = 1$, то ясно, что для множества $\mathfrak{M}$ выполняется предположение леммы 3, и поэтому справедливость нашего утверждения будет следовать из этой леммы.

Допустим теперь, что утверждение верно для всех удовлетворяющих условиям теоремы групп с инвариантной подгруппой K размерности, меньшей n.

Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы и размерность подгруппы K равна n.

Если множество $\mathfrak{M}$, построенное для G, удовлетворяет условию леммы 3, то из этой леммы будет следовать, что предположение о бесконечности фактор-группы G/K приводит к противоречию. Поэтому допустим, что множество $\mathfrak{M}$ не удовлетворяет условию леммы 3. Это значит, что в множестве $\mathfrak{M}$ найдется подгруппа H, обладающая следующими свойствами:

а) $K \subset H$,

б) фактор-группа H/K дискретна и разлагается в прямое произведение счетного множества циклических подгрупп простых порядков,

в) подгруппа K содержит бесконечную замкнутую подгруппу R', инвариантную в H и имеющую размерность $r' \geqslant 1$, меньшую n.

Так как R' замкнута, то в ней найдется характеристическая замкнутая подгруппа R, являющаяся торовидной или векторной подгруппой размерности $r \geqslant 1$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{H} = H/R$. Фактор-группа $\overline{K} = K/R$ — группа размерности $s = n - r \geqslant 1$ и $\overline{H}/\overline{K} \cong H/K$. Имеют место две взаимно исключающие возможности:

(I) Группа $\overline{H} = H/R$ удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых периодических подгрупп.

(II) Группа $\overline{H} = H/R$ не удовлетворяет этому условию.

Если имеет место случай (I), то $\overline{H}$ удовлетворяет всем условиям теоремы, фактор-группа $\overline{H}/\overline{K}$ бесконечна и размерность $\overline{K}$ меньше n. По предположению индукции, это ведет к противоречию. Следовательно, в случае (I) предположение о бесконечности фактор-группы G/K противоречиво.

Пусть теперь имеет место случай (II). Это значит, что в $\overline{H}$ имеется замкнутая абелева периодическая подгруппа $\overline{A}$, не удовлетворяющая условию минимальности для замкнутых подгрупп. Ввиду леммы 1, подгруппа $\overline{A}$ разлагается в прямое произведение $\overline{A} = \overline{B} \times \overline{C}$, где $\overline{B}$ — торовидная подгруппа, а $\overline{C}$ — дискретная подгруппа, разлагающаяся в прямое произведение циклических подгрупп, которые, очевидно, можно считать имеющими простые порядки. Так, как $\overline{A}$ не удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп, то ее подгруппа $\overline{C}$ бесконечна. Обозначим через C полный прообраз $\overline{C}$ в H. Группа C имеет инвариантную подгруппу R размерности r, меньшей n. Фактор-группа C/R дискретна и разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков. Наконец, поскольку C замкнута в G, она удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп. Иначе говоря, группа C удовлетворяет всем условиям теоремы, и из гипотезы (II) следует бесконечность фактор-группы C/R. По предположению индукции это невозможно.

Таким образом, во всех случаях предположение о бесконечности фактор-группы G/K ведет к противоречию. Следовательно, фактор-группа G/K конечна. Теорема доказана.

§ 3. Разрешимые группы

Заметим, что если локально бикомпактная группа G удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп, то всякий элемент группы G, а также любой элемент всякой ее фактор-группы бикомпактны.

В самом деле, пусть a — элемент группы G. Если A — замыкание циклической подгруппы $\{a\}$ в G, то A — абелева подгруппа. Так как она удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп, то [см. ([5])]

все элементы ее, в том числе и элемент a, бикомпактны. Справедливость второго утверждения следует из того, что гомоморфный образ бикомпактного элемента всегда бикомпактен.

Пользуясь сделанным замечанием, докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Если локально бикомпактная разрешимая группа удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп, то она удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп. Обозначим через K связную компоненту единицы группы G. По теореме 1 работы ([3]), в группе K существует бикомпактная центральная подгруппа Z такая, что фактор-группа K/Z является группой Ли. Разрешимая группа Ли K/Z, если она не компактна, непременно содержит замкнутую одномерную векторную подгруппу [см. ([2])]. А так как все элементы группы K/Z бикомпактны, то она не может содержать таких одномерных подгрупп. Следовательно, группа Ли K/Z компактна, а потому группа K бикомпактна. Но всякая связная, разрешимая и бикомпактная группа абелева. Поэтому группа K абелева.

Ввиду условия минимальности для замкнутых абелевых подгрупп, группа K — конечномерная торовидная группа.

Пусть $\overline{H}$ — некоторая замкнутая абелева подгруппа фактор-группы G/K, H — ее полный прообраз в G. Все элементы локально бикомпактной группы $\overline{H}$ бикомпактны, а поэтому, ввиду известной структурной теоремы Л. С. Понтрягина о локально бикомпактных абелевых группах, группа $\overline{H}$ обладает такой бикомпактной подгруппой $\overline{B}$, что фактор-группа $\overline{H}/\overline{B}$ дискретна. Если B — полный прообраз $\overline{B}$ в G, то для нее выполняются условия теоремы 1. Следовательно, $\overline{B} = B/K$ — конечная группа, а потому дискретна. Отсюда мы заключаем, что и группа $\overline{H}$ дискретна.

Итак, $\overline{H} = H/K$ — дискретная периодическая группа.

Группа $\overline{H}$ разлагается в прямое произведение (в смысле абстрактной теории групп) своих силовских подгрупп $P_1, P_2, \ldots$, соответствующих некоторым простым числам $q_1, q_1, \ldots$. Обозначим через $\overline{Q_i}$ совокупность всех элементов простого порядка q_i примарной группы $P_i\,(i = 1, 2, \ldots)$. Это — нижний слой группы P_i. Если Q_i — полный прообраз $\overline{Q_i}\,(i = 1, 2, \ldots)$ в G, то Q_i удовлетворяет условиям теоремы 2. Поэтому $\overline{Q}$ — конечная группа для любого номера $i = 1, 2, \ldots$.

Множество $P_1, P_2, \ldots$ всех отличных от 1 силовских подгрупп не может быть бесконечным.

В самом деле, если из каждого слоя $\overline{Q}_1\, \overline{Q}_2, \ldots$ выбрать по одному элементу, не равному 1, то все они образуют группу $\overline{Q}$, разложимую в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков. Полный прообраз Q в группе G удовлетворяет условиям теоремы 2. Поэтому $\overline{Q} = Q/K$ — конечная группа. Отсюда следует, что множество всех силовских подгрупп группы $\overline{H}$ конечно.

Для периодических абелевых групп известно, что если число силовских подгрупп такой группы конечно и нижние слои каждой силовской подгруппы также конечны, то группа удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Следовательно, абелева подгруппа $\overline{H}$ фактор-группы G/K удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Таким образом, любая абелева подгруппа фактор-группы G/K оказывается дискретной и удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Но тогда из основного результата работы ([4]) С. Н. Черникова следует, что если группу $\overline{G} = G/K$ рассматривать как абстрактную разрешимую группу, то в ней найдется абелева подгруппа $\overline{A}$ конечного индекса, разложимая в прямое произведение конечного числа подгрупп типа q^{∞} по некоторым простым числам q. Ясно, что $\overline{A}$ можно считать замкнутой в $\overline{G}$. Отсюда легко заключить, что группа $\overline{G} = G/K$ дискретна и удовлетворяет условию минимальности для (замкнутых) подгрупп. Так как подгруппа K компактна и удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп, то и группа G удовлетворяет этому условию. Теорема доказана.

Сделаем одно важное для дальнейшего.

Замечание. Пусть связная компонента единицы локально бикомпактной локально разрешимой группы G есть конечномерная торовидная группа K. Если группа G удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп, то она удовлетворяет и условию минимальности для замкнутых подгрупп.

Доказательство этого утверждения ничем не отличается от доказательства теоремы 3.

§ 4. Локально разрешимые группы

Лемма 4. *Пусть G — локально бикомпактная локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп. Совокупность всех ее одномерных торовидных подгрупп образует замкнутую абелеву характеристическую подгруппу K, являющуюся конечномерной торовидной группой.*

Доказательство. Пусть M и L — две произвольно выбранные одномерные торовидные подгруппы группы G. Выберем в M элемент a, образующий циклическую подгруппу $\{a\}$, замыкание которой содержит M. В подгруппе L выберем элемент b с аналогичным свойством. Элементы a и b образуют разрешимую подгруппу A'. Обозначим через A замыкание A' в G. Ясно, что $M \subset A$ и $L \subset A$. Так как длина ряда коммутантов группы A не превосходит длины ряда коммутантов группы A', то A — разрешимая группа. Подгруппа A удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп, а из теоремы 3 следует, что группа A удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп. Следовательно, по теореме 3 работы ([5]), в A содержится замкнутая подгруппа B конечного индекса, разлагающаяся в прямое произведение конечномерной торовидной подгруппы и конечного числа дискретных подгрупп типа q^{∞} по некоторым простым числам q. Так как M и L — полные подгруппы, то $M \subset B$ и $L \subset B$. Но B — абелева группа. Следовательно, элементы подгрупп M перестановочны с элементами подгруппы L. Значит, все одномерные торовидные подгруппы в G образуют абелеву подгруппу K.

Замыкание K' подгруппы K в G является также абелевой подгруппой которая, ввиду условия минимальности для закнутых абелевых подгрупп, имеет следующее строение: связная компонента K'' ее единицы является конечномерной торовидной подгруппой, фактор-группа K'/K'' по которой дискретна. Так как K'' — характеристическая подгруппа и содержит все одномерные торовидные подгруппы группы K', то $K \subset K''$. Но, кроме того, K'' замкнута в K', Следовательно,

$$K'' = K' = K.$$

Следствие. *При условиях леммы 4 фактор-группа $\overline{G}=G/K$ не содержит ни одной одномерной торовидной подгруппы.*

Доказательство. Допустим, что, вопреки этому утверждению в $\overline{G} = G/K$ существует одномерная торовидная подруппа $\overline{H}$. Пусть H — ее полный прообраз при гомоморфном отображении $G \to \overline{G}$. Группа H компактна, связна и разрешима. Следовательно, H — абелева торовидная группа, размерность которой больше размерности K, и поэтому $H \not\subset K$, вопреки утверждению леммы 4.

Теорема 4. *Пусть G — связная локально бикомпактная локальна разрешимая группа, удовлетворяющая условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп. Тогда G — абелева группа.*

Доказательство. Обозначим через K подгруппу, образованную посредством всех одномерных торовидных подгрупп группы G. В силу леммы 4, K есть абелева замкнутая характеристическая подгруппа. Покажем, что фактор-группа $\overline{G} = G/K$ дискретна. С этой целью рассмотрим сначала некоторую бикомпактную абелеву подгруппу $\overline{B}$ в $\overline{G}$. Пусть B — полный прообраз при гомоморфном отображении $G \to \overline{G}$. Подгруппа B замкнута в G и, следовательно, удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп.

Пусть $Z(K)$ — централизатор K в G. Ясно, что $K \subset Z(K)$, $Z(K)$ метабелева и является замкнутой подгруппой в G. Поэтому, согласно результатам работы ([6]), $Z(K)$ удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп. Этому же условию удовлетворяет и бикомпактная фактор-группа $M = Z(K)/K$.

Докажем, что фактор-группа $M = Z(K)/K$ конечна. В самом деле, допустим, что M — бесконечная группа. Так как M — бикомпактная абелева группа, удовлетворяющая условию минимальности для замкнутых подгрупп, то она обладает замкнутой подгруппой M' конечного индекса, являющейся торовидной подгруппой с размерностью, не меньшей 1.

Таким образом, в $\overline{G} = G/K$ существует торовидная подгруппа M' размерности $\geqslant 1$, что невозможно, ввиду следствия из леммы 4.

Полученное противоречие показывает, что наше предположение относительно M не верно и, следовательно, фактор-группа $M = Z(K)/K$ конечна.

Каждый элемент $x \in B$ индуцирует в группе K автоморфизм $\alpha(x)$, который представляет в виде линейного преобразования алгебры Ли группы K, а потому может быть записан в виде неособенной матрицы некоторого порядка n над полем действительных чисел.

Далее, точно так же, как при доказательстве теоремы 1, определим гомоморфное отображение $\Phi: B \to \Gamma'$, где Γ' — некоторая замкнутая подгруппа группы K, причем $B/Z(K) \cong \Gamma'$. В данном случае фактор-группа $B/Z(K)$ также оказывается конечной, хотя по другой причине. Доказательство этого факта проведем методом от противного. Предположим, что фактор-группа $B/Z\ (K)$ бесконечна.

Группа Γ', а потому и $A = B/Z(K) \cong B/K/Z(K)/K$, разлагается в прямое произведение конечной подгруппы и конечного числа одномерных торовидных подгрупп. Полный прообраз одного из этих торовидных множителей в группе $\overline{B} = B/K$, как легко видеть, разлагается в прямое произведение конечной подгруппы и одномерной торовидной подгруппы.

Таким образом, в фактор-группе B/K, а поэтому и в фактор-группе G/K обнаруживается одномерная торовидная подгруппа, что невозможно ввиду леммы 4. Полученное противоречие показывает, что фактор-группа $B/Z(K)$ конечна.

Вместе с тем, мы показали, что если $\overline{B} = B/K$ — бикомпактная абелева подгруппа фактор-группы G/K, то $\overline{B}$ — конечная подгруппа.

Пусть теперь $\overline{H}$ — некоторая замкнутая абелева подгруппа фактор-группы G/K.

Так как все элементы из $\overline{H}$ бикомпактны, то, по теореме Л. С. Понтрягина о строении локально бикомпактных абелевых групп, в группе $\overline{H}$ существует бикомпактная подгруппа $\overline{B}$ такая, что фактор-группа $\overline{H}/\overline{B}$ дискретна. Но по доказанному $\overline{B}$ — конечная подгруппа. Поэтому подгруппа $\overline{H}$ дискретна.

Таким образом, все абелевы подгруппы фактор-группы $\overline{G} = G/K$ дискретны и удовлетворяют условию минимальности для подгрупп. Но тогда см. ([4])] группа $\overline{G}$ обладает абелевой подгруппой конечного индекса. Отсюда непосредственно вытекает дискретность группы $\overline{G}$.

По условию теоремы, группа G, а следовательно, фактор-группа $\overline{G} = G/K$ связны. Будучи дискретной и связной, группа $\overline{G}$ должна состоять из одного единичного элемента. Иначе говоря, $G = K$, что и требовалось доказать.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат настоящей работы:

Теорема 5. *Локально бикомпактная локально разрешимая группа удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп, K — связная компонента ее единицы. Из теоремы 4 вытекает, что K — конечномерная торовидная группа. Из замечания к теореме 3 следует, что группа G удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп.

Обратное утверждение теоремы очевидно.

Следствие. *Если локально бикомпактная локально разрешимая группа G удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых* *подгрупп, то она обладает замкнутой подгруппой H конечного индекса, разложимой в прямое произведение конечного числа одномерных торовидных подгрупп и дискретных подгрупп типа q^{∞} по некоторым простым числам q.*

Это утверждение следует из теоремы 5 и теоремы 3 работы ([5]).

Поступило
12.I. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Москва, 1954.

[2] Мальцев А. И., On the theory of the Lie groups in the large, Матем. сб., 16/58/ : 2 (1945), 163—190.

[3] Мальцев А. И., Топологические разрешимые группы, Матем. сб., 19/61/ : 2 (1946), 165—173.

[4] Черников С. Н., О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп, Матем. сб., 28/70/ : 1 (1951), 119—129.

[5] Глушков В. М., Локально бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп, Украинский матем. журнал, том. 8, № 2 (1956), 135—139.

[6] Глушков В. М., К теории специальных локально компактных групп, Украинский матем. журнал, том 11, № 4 (1959), 347—351.