Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. П. Сысоев, Свойства некоторых классов блок-схем планирования эксперимента и корреляционные характеристики наблюдений,
Автомат. и телемех., 1977, выпуск 8, 41–54

https://www.mathnet.ru/at7418

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
9 декабря 2025 г., 16:56:02

УДК 62-505 : 621.3.088.6

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ БЛОК-СХЕМ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАБЛЮДЕНИЙ

Л. П. СЫСОЕВ

(Москва)

Вводятся классы неполных уравновешенных блок-схем планирования эксперимента, обладающие дополнительными комбинаторными свойствами. Для этих классов блок-схем строятся расширенные алгебры соотношений (содержащие алгебру соотношений Джеймса в качестве подалгебры). Дается характеризация ковариационных матриц из расширенных алгебр соотношений и приводятся достаточные статистики и несмещенные оценки этих матриц.

При исследовании корреляционных связей в сложных стохастических системах важен выбор модели для ковариационной матрицы с относительно небольшим числом неизвестных параметров. При наблюдениях в схемах планирования эксперимента естественным оказывается предположение о принадлежности ковариационной матрицы линейному подпространству некоторой матричной алгебры, и тогда нужно оценивать только коэффициенты при базисных матрицах. В [1—3] корреляционные связи в неполноблочных сбалансированных планах исследовались в предположении, что ковариационная матрица принадлежит либо алгебре соотношений Джеймса [4], либо расширенной алгебре соотношений, введенной в [2] для симметричных блок-схем конечных проективных геометрий [5]. В данной работе расширенная алгебра соотношений вводится для более широких классов блок-схем (в том числе и несимметричных) *.

1. Постановка задачи

Введем основные обозначения. B_l — множество из k методов обработки, образующих l-й блок неполной уравновешенной блок-схемы с параметрами b, v, r, k, λ (v — полное число методов, b — число блоков в блок-схеме, r — число блоков, содержащих данный метод, λ — число блоков, содержащих данную пару методов, $bk=rv$, $\lambda(v-1)=r(k-1)$ [5]). Все участки блок-схемы (в участке стоит один метод) нумеруем так, что номер i пробегает последовательно от 1 до bk участки каждого блока. Существуют две функции $b(i)$ и $t(i)$, где $b(i)$ — номер блока с i-м участком, а $t(i)$ — номер метода, стоящего в i-м участке. $x=(x_1, x_2, \ldots, x_{bk})^{\mathrm{T}}$ — вектор наблюдений в блок-схеме, компонента x_i есть результат применения $t(i)$-го метода обработки на i-м участке.

I, G, B, T — $bk\times bk$-матрицы, порождающие алгебру соотношений Джеймса и состоящие соответственно из элементов δ_{ij}, $g_{ij}\equiv 1$, $b_{ij}=\delta_{b(i)b(j)}$, $t_{ij}=\delta_{t(i)t(j)}$ (δ_{nm} — символ Кронекера). Элементы $(BT)_{ij}$, $(TB)_{ij}$, $(BTB)_{ij}$ матриц BT, TB, BTB, также входящих в алгебру Джеймса, обладают свойства-

* Всюду в статье под блок-схемой подразумевается неполная уравновешенная блок-схема.

ми [2]:

$$(1)\qquad (BT)_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } t(j)\in B_{b(i)},\\ 0 & \text{в противном случае;}\end{cases}$$

$$(2)\qquad (TB)_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } t(i)\in B_{b(j)},\\ 0 & \text{в противном случае;}\end{cases}$$

$$(3)\qquad (BTB)_{ij}=|B_{b(i)}\cap B_{b(j)}|,$$

где $|A|$ — число элементов множества A. Для симметричных блок-схем

$$(4)\qquad BTB=\lambda G+(k-\lambda)B.$$

Отношение R-*эквивалентности для пар индексов* (i, j) определяется как

$$(i,j)\mathrm{R}(i',j'),\ \text{если } \delta_{ij}=\delta_{i'j'},\ b_{ij}=b_{i'j'},\ t_{ij}=t_{i'j'},$$
$$(BT)_{ij}=(BT)_{i'j'},\ (TB)_{ij}=(TB)_{i'j'},\ (BTB)_{ij}=(BTB)_{i'j'}.$$

В работе предполагается, что ковариационная матрица K вектора x принадлежит линейному пространству $\mathscr{L}$ матриц C вида

$$(5)\qquad C=\sum_n \gamma_n X_n^R,$$

где $X_n^R=\|\chi_n^R(i,j)\|$, $\chi_n^R(i,j)$ — индикаторная функция n-го класса R-эквивалентности ($\chi_n^R(i,j)$ равна 1, если (i,j) принадлежит n-му классу, и 0 — в противном случае). Алгебра Джеймса содержится в $\mathscr{L}$. При исследовании ковариационных матриц вида (5) нужно вводить минимальную алгебру, содержащую пространство $\mathscr{L}$ (назовем ее R-алгеброй). Задача облегчается, когда R-алгебра совпадает с $\mathscr{L}$. Тогда R-алгебру назовем *расширенной алгеброй соотношений* и обозначим через $\mathscr{S}$. В работе ставятся задачи определения свойств блок-схем, достаточных для существования расширенной алгебры соотношений минимальной размерности (при $\lambda>1$, так как при $\lambda=1$ $\mathscr{L}$ совпадает с алгеброй соотношений $\mathscr{R}$ Джеймса), исследования таких блок-схем, построения для них расширенных алгебр соотношений, а также задачи характеризации и оценивания ковариационных матриц, принадлежащих этим алгебрам.

2. μ-блок-схемы и их свойства

Размерность пространства матриц (5) равна числу классов R-эквивалентности. Это число минимально для следующего типа блок-схем.

Определение 1. μ-блок-схемой называется неполная уравновешенная блок-схема, обладающая свойством:

А. Любая пара разных блоков может иметь только либо μ, либо 0 общих методов.

Если выполнено свойство А, то в силу (3) $(BTB)_{ij}$ может принимать только три значения: k, μ и 0 и из свойств матриц Джеймса следует, что в случае μ-блок-схем множество пар (i, j) разбивается не более чем на 8 классов R-эквивалентности:

$$(6)\qquad \begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l}1.\ \delta_{ij}=b_{ij}=t_{ij}=(BT)_{ij}=(TB)_{ij}=1,\\ 2.\ \delta_{ij}=0,\quad b_{ij}=t_{ij}=(BT)_{ij}=(TB)_{ij}=1,\end{array}\right\} & (BTB)_{ij}=k,\\
\left.\begin{array}{l}3.\ \delta_{ij}=b_{ij}=0,\quad t_{ij}=(BT)_{ij}=(TB)_{ij}=1,\\ 4.\ \delta_{ij}=b_{ij}=t_{ij}=0,\quad (BT)_{ij}=(TB)_{ij}=1,\\ 5.\ \delta_{ij}=b_{ij}=t_{ij}=(TB)_{ij}=0,\quad (BT)_{ij}=1,\\ 6.\ \delta_{ij}=b_{ij}=t_{ij}=(BT)_{ij}=0,\quad (TB)_{ij}=1,\\ 7.\ \delta_{ij}=b_{ij}=t_{ij}=(BT)_{ij}=(TB)_{ij}=0,\end{array}\right\} & (BTB)_{ij}=\mu,\\
8.\ \delta_{ij}=b_{ij}=t_{ij}=(BT)_{ij}=(TB)_{ij}=0, & (BTB)_{ij}=0.
\end{array}$$

Заметим, что любая блок-схема с $\lambda=1$ является μ-блок-схемой с $\mu=1$. Обратно, из $\mu=1$ следует $\lambda=1$.

Все симметричные блок-схемы являются μ-блок-схемами с $\mu=\lambda$. Здесь имеет место в некотором смысле вырожденный случай, так как нет пар блоков без общих методов и в (6) пуст класс 8. В случае несимметричных μ-блок-схем класс 8, как показано ниже, обязательно не пуст. Если учесть, что при $\lambda>1$ классы 1—7 обязательно не пусты, то получаем, что для μ-блок-схемы с $\lambda>1$ размерность пространства $\mathscr{L}$ на 1 больше размерности алгебры Джеймса. Матрицы I, G, B, T, BT, TB, BTB представляются в виде (5), а именно

$$
(7)\qquad
\begin{gathered}
I=X_1^R,\ B=X_1^R+X_2^R,\ T=X_1^R+X_3^R,\\
BT=\sum_{n=1}^{4}X_n^R+X_5^R,\qquad TB=\sum_{n=1}^{4}X_n^R+X_6^R,\\
BTB=k(X_1^R+X_2^R)+\mu\sum_{n=3}^{7}X_n^R,\qquad G=\sum_{n=1}^{8}X_n^R.
\end{gathered}
$$

Если к матрицам I, G, B, T, BT, TB, BTB присоединить линейно независимую от них (при $\lambda>1$)* матрицу S из элементов

$$
(8)\qquad s_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } t(i),\ t(j)\in B_{b(i)}\cap B_{b(j)}\ (\text{т. е. } (BT)_{ij}=(TB_{ij})=1),\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}
$$

то линейная оболочка этих восьми матриц совпадает с пространством $\mathscr{L}$. (Матрица S была введена в [2] для симметричных блок-схем.) В силу (6) для S имеем выражение

$$
(9)\qquad S=\sum_{i=1}^{4}X_i^R.
$$

Отметим, что $s_{ij}=s_{ji}$ и $s_{ij}=1$ при $b_{ij}=1$ или $t_{ij}=1$.

В случае μ-блок-схем существует соотношение, связывающее параметр μ с другими параметрами блок-схемы. Для его вывода воспользуемся двумя способами подсчета числа участков j блок-схемы, связанных с фиксированным участком i отношением $s_{ij}=1$ (это число можно записать как $\sum_{j=1}^{bk}s_{ij}$). Первый способ, изложенный в [2], применимый к произвольным блок-схемам, дает

$$
(10)\qquad \sum_{j=1}^{bk}s_{ij}=\lambda(k-1)+r.
$$

Следующий способ применим только к μ-блок-схемам. Пусть $t(i)=\alpha$. Так как $s_{ij}=1$ при $b_{ij}=1$, то все k участков блока $B_{b(i)}$ (содержащего α) связаны с i отношением $s_{ij}=1$. Каждый из остальных $r-1$ блоков, содержащих α, имеет в силу свойства А ровно μ методов (в число которых входит α), общих с блоком $B_{b(i)}$, т. е. имеется еще $\mu(r-1)$ участков j, та-

* При $\lambda=1$ имеем $S=T+B-I$.

ких, что $s_{ij}=1$, а всего

$$\sum_{j=1}^{bk} s_{ij}=\mu(r-1)+k. \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем искомое соотношение

$$\lambda k+r-\lambda=\mu r+k-\mu, \tag{12}$$

которое можно привести также к виду

$$(\lambda-\mu)(r-1)=(\lambda-1)(r-k).$$

Отсюда $\mu<\lambda$ для несимметричных μ-блок-схем с $\lambda>1$ и $\mu=\lambda$, если $r=k$ или $\lambda=1$.

Как известно, в симметричной блок-схеме все пары блоков имеют одно и то же число общих методов. В литературе не рассматривался вопрос, существуют ли несимметричные блок-схемы с таким свойством. Ответ на этот вопрос отрицателен.

Рассмотрим неполную уравновешенную блок-схему, у которой любые два блока имеют μ общих методов (т. е. μ-блок-схему, у которой нет пар непересекающихся блоков). Но тогда в силу (3) $(BTB)_{ij}=\mu$ при $b_{ij}=0$. Отсюда с учетом того, что $(BTB)_{ij}=k$ при $b_{ij}=1$, получаем

$$BTB=\mu G+(k-\mu)B. \tag{13}$$

Используя ассоциативность произведения матриц, вычислим двумя способами матрицу $BTBT$. Из (13) и формулы $GT=rG$ [4] получаем

$$BTBT=(BTB)\cdot T=\mu rG+(k-\mu)BT. \tag{14}$$

С другой стороны, из формул $BG=kG$, $TBT=\lambda G+(r-\lambda)T$ [4] следует

$$BTBT=B\cdot(TBT)=\lambda G+(r-\lambda)BT. \tag{15}$$

Из (14) и (15) с учетом линейной независимости G и BT получаем

$$\lambda k=\mu r, \tag{16}$$

$$r-\lambda=k-\mu. \tag{17}$$

Приводя (16) к виду $\mu/\lambda(r-\lambda)=k-\mu$ и подставляя в (17), имеем

$$(\mu/\lambda-1)(r-\lambda)=0,$$

и, следовательно, $\mu=\lambda$, так как $r>\lambda$. Но тогда из (16) имеем $r=k$, т. е. блок-схема — симметричная. Итак, получено

Предложение 1. Если любые два блока неполной уравновешенной блок-схемы имеют μ общих методов, то $\mu=\lambda$ и блок-схема — симметричная *.

Таким образом, в случае произвольной несимметричной неполной уравновешенной блок-схемы система матриц I, G, B, T, BT, TB, BTB обязательно линейно независима.

В заключение упомянем еще одно свойство μ-блок-схем. Имеем $\sum_{m=1}^{b}|B_l\cap B_m|kr$, так как эта сумма равна числу вхождений в блок-схему всех методов l-го блока. Далее, $|B_l\cap B_l|=k$, а в случае μ-блок-схем

* Неполнота блоков, $k<v$ является существенным условием. Если $k=v$, то все блоки одинаковы (рандомизированные блоки) и тогда $r=\lambda$, $\mu=k$, что также согласуется с (16), (17).

$|B_l \cap B_m| = k$ или 0 при $l \neq m$. Поэтому для μ-блок-схем $\sum_{m=1}^{b} |B_l \cap B_m| = \mu b_\mu^{(l)} + k$, где $b_\mu^{(l)}$ — число блоков, имеющих по μ методов, содержащихся в l-м блоке. Сопоставляя полученные равенства, имеем $b_\mu^{(l)} = k(r-1)/\mu$, т. е. число блоков μ-блок-схемы, имеющих по μ методов, содержащихся в данном блоке, равно $k(r-1)/\mu$.

3. Расширенные алгебры соотношений

В случае μ-блок-схем с $\lambda > 1$ пространство $\mathscr{L}$ является линейной оболочкой линейно независимых матриц I, G, B, T, BT, TB, BTB и S. Для построения алгебры, порождаемой этим пространством, нужно найти произведения матрицы S на остальные семь матриц, а также S^2.

1. Из определения G и (8), (10) следует, что $(SG)_{ij} = \sum_{h=1}^{bk} s_{ih} = \lambda k + r - \lambda$. С учетом $S^{\mathrm{T}} = S$ имеем

$$SG = GS = (\lambda k + r - \lambda) G. \tag{18}$$

2. Рассмотрим $(ST)_{ij} = \sum_{h=1}^{bk} s_{ih} t_{hj}$. Имеем $t_{hj} = 1$, если $t(j) \in B_{b(h)}$ и $t(h) = t(j)$; и $s_{ih} = 1$, если $t(i) \in B_{b(h)}$, $t(h) \in B_{b(i)}$ (см. (8)). Поэтому $s_{ih} t_{hj} = 1$, если $t(j) \in B_{b(i)}$ (т. е. в силу (1) $(BT)_{ij} = 1$) и $t(i), t(j) \in B_{b(h)}$, а в противном случае $s_{ih} t_{hj} = 0$. Таким образом, если $(BT)_{ij} = 0$, то $(ST)_{ij} = 0$, а если $(BT)_{ij} = 1$, то $(ST)_{ij}$ равно числу блоков, содержащих $t(i)$, $t(j)$, т. е. r при $t_{ij} = 1$ и λ при $t_{ij} = 0$. Отсюда

$$ST = (r - \lambda) T + \lambda BT, \quad TS = (r - \lambda) T + \lambda TB. \tag{19}$$

Формулы (19) справедливы для произвольных блок-схем.

3. По определению b_{ij} имеем $(BS)_{ij} = \sum_{h=1}^{bk} b_{ih} s_{hi} = \sum_{h=[b(i)-1]k+1}^{b(i)k} s_{hj}$. В правой сумме h пробегает участки $b(i)$-го блока. Если $(BT)_{ij} = 0$, то согласно (8) $s_{hj} = 0$ для всех h, $[b(i)-1]k < h \leqslant b(i)k$. Если же $(BT)_{ij} = 1$, то $s_{hj} = 1$ для тех участков h $b(i)$-го блока, в которых стоят методы, имеющиеся в $b(j)$-м блоке, и в этом случае $\sum_{h=[b(i)-1]k+1}^{b(i)k} s_{hj}$ равна числу методов, содержащихся в $B_{b(i)} \cap B_{b(j)}$, т. е. $(BTB)_{ij}$. В результате получаем

$$(BS)_{ij} = (BTB)_{ij} (BT)_{ij}.$$

Отсюда видно, что матрица BS, вообще говоря, не представляется линейной комбинацией исходных матриц. Если $b_{ij} = 1$, то $(BT)_{ij} = 1$ и $(BTB)_{ij} = k$ (см. (1), (3)), откуда $(BS)_{ij} = k$. В случае μ-блок-схем имеем также, что $(BTB)_{ij} = \mu$ при $b_{ij} = 0$ и $(BT)_{ij} = 1$ (так как при $(BT)_{ij} = 1$ множество $B_{b(i)} \cap B_{b(j)}$ не пусто). Отсюда $(BS)_{ij} = \mu (BT)_{ij}$ при $b_{ij} = 0$. Таким образом, получаем ,что в случае μ-блок-схем

$$BS = (k - \mu) B + \mu BT, \quad SB = (k - \mu) B + \mu TB. \tag{20}$$

4. Из (19), (20) с учетом таблицы умножений алгебры Джеймса [1, 4] получаем формулы (справедливые только в случае μ-блок-схем)

$$
\begin{aligned}
&SBT=\mu\lambda G+\mu(r-\lambda)T+(k-\mu)BT,\\
&BTS=\lambda BTB+(r-\lambda)BT, \quad STB=\lambda BTB+(r-\lambda)TB,\\
(21)\qquad &TBS=\mu\lambda G+\mu(r-\lambda)T+(k-\mu)TB,\\
&SBTB=\mu\lambda kG+\mu(r-\lambda)TB+(k-\mu)BTB,\\
&BTBS=\mu\lambda kG+\mu(r-\lambda)BT+(k-\mu)BTB.
\end{aligned}
$$

Для симметричных схем в (18)—(21) учитываем (4) и $r=k$, $\mu=\lambda$.

5. Полная таблица умножения будет построена, если найти S^2. Однако уже не для всякой μ-блок-схемы S^2 представляется линейной комбинацией исходных матриц. Как показано в приложении 1, такое представление возможно, если μ-блок-схема кроме свойства A обладает еще дополнительными комбинаторными свойствами:

B. Любая тройка блоков имеет либо μ, либо ν $(0\leqslant\nu<\mu)$, либо 0 общих методов.

C. Если какие-либо μ методов содержатся в пересечении двух блоков, то в блок-схеме имеется всего ρ блоков, содержащих эти μ методов.

D. Для любой пары методов α, β и пары блоков B_l, B_m, таких, что $\alpha\in B_l\setminus B_m$, $\beta\in B_m\setminus B_l$ и $B_l\cap B_m\neq\varnothing$, существует σ блоков, содержащих эту пару и имеющих по ν методов, содержащихся в $B_l\cap B_m$.*

Блок-схемы со свойствами A, B, C, D будем называть (μ, ν, ρ)-блок-схемами. Примеры классов таких блок-схем приведены в разделе 4. Отметим, что $\nu<\mu\leqslant\lambda$, $\sigma\leqslant\lambda$; $\rho\leqslant\lambda$ при $\mu\geqslant 2$ и $\rho=\lambda$ при $\mu=2$.

Пусть $|B_l\cap B_m|=\mu$ и $\alpha\in B_l\cap B_m$. В силу свойства C имеется ρ блоков B_i, таких, что $B_l\cap B_m\subset B_i$. Метод α, содержащийся в ρ блоках B_i, содержится также в $r-\rho$ блоках. Пересечение любого из этих $r-\rho$ блоков с $B_l\cap B_m$ не пусто (оно содержит метод α) и поэтому в силу свойства B имеет ν элементов. Итак, получаем следующее следствие.

Следствие 1. Если два блока (μ, ν, ρ)-блок-схемы содержат метод α, то имеется всего $r-\rho$ блоков, пересекающихся с данной парой по ν методам, в число которых входит α.

Отсюда также видно, что $\nu=0$ тогда и только тогда, когда $\rho=r$, т. е. $\lambda=1$.

Аналогично выводится следующее следствие.

Следствие 2. Пусть $\lambda>1$ и два блока содержат пару α, β. Тогда имеется всего $\lambda-\rho$ блоков, пересекающихся с данной парой блоков по ν методам, в число которых входят α, β.

Отсюда если $\lambda>1$ и $\nu=1$, то $\rho=\lambda$.

Как показано в приложении 1, при выполнении свойств A, B, C, D матрица S^2 представляется линейной комбинацией матриц X_i^l $(i=1,\ldots,8)$. Выражая последние через I, G, B, T, BT, TB, BTB и S на основании (7), (9), получаем, что S^2 представляется в виде

$$S^2=d_1I+d_2B+d_3T+d_4S+d_5BT+d_6TB+d_7BTB, \tag{22}$$

где

$$
\begin{aligned}
&d_1=(\mu-\nu)(r-\lambda), \quad d_2=(\mu-\nu)(\lambda-\rho)+k-\mu-\frac{\sigma\nu}{\mu}(k-\mu),\\
(23)\qquad &d_3=\nu(r-\lambda), \quad d_4=(\rho-2)(\mu-\nu)-\nu(\lambda-\sigma),\\
&d_5=d_6=\mu-\nu+\nu(\lambda-\sigma), \quad d_7=\frac{\sigma\nu}{\mu}.
\end{aligned}
$$

* Число блоков, содержащих α, β и не пересекающихся с $B_l\cap B_m$, равно $\lambda-\sigma$ при $\nu>0$.

Используя тождества $BSS=BS^2$, $TSS=TS^2$ и формулы (19)—(21), можно показать, что кроме (12) параметры (μ, ν, ρ)-блок-схемы удовлетворяют соотношениям

$$\sigma\nu=\mu(\mu-\nu)(\lambda-1)/(k-\mu), \qquad (24)$$
$$\rho=(r-\lambda+\lambda\mu-\nu r)/(\mu-\nu).$$

Из (18)—(22) заключаем, что если блок-схема обладает свойствами A, B, C, D, то линейное пространство $\mathscr{L}$ замкнуто относительно произведения матриц и, следовательно, существует расширенная алгебра соотношений, восьмимерная $\mathscr{S}_8$ в случае несимметричных блок-схем и семимерная $\mathscr{S}_7$ в случае симметричных блок-схем.

Существует класс несимметричных блок-схем (см. раздел 4) с $\sigma=\lambda-1$. Для этого класса формулы (23), (24) принимают соответственно вид

$$d_1=\mu(k-\mu)(r-\lambda)/k,\ d_2=(k-r+\lambda)(k-\mu)/k,$$
$$d_3=\mu^2(r-\lambda)/k,\ d_4=(k-\mu)(r-\lambda)/k-\mu, \qquad (25)$$
$$d_5=d_6=\mu,\quad d_7=\mu(\lambda-1)/k;$$

$$\nu=\mu^2/k,\quad \rho=(r-\lambda)/\mu+1. \qquad (26)$$

Для симметричных (μ, ν, ρ)-блок-схем формулы (22)—(24) остаются в силе. Но дополнительно $r=k$, $\mu=\lambda$, $BTB=\lambda G+(k-\lambda)B$. Существуют классы симметричных (μ, ν, ρ)-блок-схем с $\sigma=\lambda$ и $\sigma=\lambda-1$. В первом случае

$$\nu=\frac{\lambda(\lambda-1)}{k-1},\qquad \rho=\frac{k-1}{\lambda}+1. \qquad (27)$$

Во втором случае

$$\nu=\frac{\lambda^2}{k},\qquad \rho=\frac{k}{\lambda}. \qquad (28)$$

4. Классы (μ, ν, ρ)-блок-схем

Покажем, что нетривиальные $(\lambda>1)$ классы блок-схем, для которых постулированы свойства A, B, C, D, действительно существуют. Один класс таких симметричных блок-схем был уже рассмотрен в [2]. Это симметричные блок-схемы конечных проективных геометрий P.G.(m, q) размерности m над полем Галуа с q элементами (q — степень простого числа p) [5]. Точки такой геометрии интерпретируются как методы обработки. Если в качестве блоков берутся $(m-1)$-мерные гиперплоскости, то получается симметричная блок-схема со свойствами A, B, C, D, причем $\sigma=\lambda$. В [2] расширенная алгебра соотношений рассматривалась именно для таких схем. Отметим, что для них

$$v=\frac{q^{m+1}-1}{q-1},\quad k=\frac{q^m-1}{q-1},\quad \lambda=\frac{q^{m-1}-1}{q-1},\quad \nu=\frac{q^{m-2}-1}{q-1}, \qquad (29)$$

$$\rho=1+q,\quad \sigma=\lambda. \qquad (30)$$

Другой класс симметричных (μ, ν, ρ)-блок-схем, причем с $\sigma=\lambda$, образуют блок-схемы, получающиеся из латинского квадрата вычеркиванием одного столбца. В таких схемах блоками являются все сочетания по $v-1$ из v методов. Поэтому для этих схем $k=v-1$, $\lambda=k-1=v-2$. Легко проверить, что любая тройка блоков имеет $v-3$ общих метода. Отсюда следует, что схема обладает параметрами $\nu=v-3=\lambda-1$, $\rho=2$ и $\sigma=\lambda$, т. е. является (μ, ν, ρ)-блок-схемой. Для этих схем расширенная алгебра соотношений совпадает с коммутаторной алгеброй.

Для построения симметричных (μ, ν, ρ)-блок-схем с $\sigma=\lambda-1$ используется следующее предложение, доказанное в приложении 2.

Предложение 2. Если симметричная блок-схема обладает свойствами B, C, D, причем $\rho=3$, $\sigma=\lambda$, то дополнительная к ней блок-схема есть симметричная (μ, ν, ρ)-блок-схема с параметрами $\bar{\nu}$ и $\bar{v}=8\bar{\nu}-1$, $k=4\bar{\nu}$, $\bar{\sigma}+1=\bar{\lambda}=2\bar{\nu}$, $\bar{\rho}=2$ (причем $\bar{\nu}$ на единицу больше параметра ν исходной схемы).

Отсюда и из (30) видно, что блок-схемы, дополнительные к симметричным блок-схемам P.G. $(m, 2)$ $(q=2)$, образуют класс симметричных (μ, ν, ρ)-блок-схем с параметром $\sigma=\lambda-1$. Для этого класса $v=2^{m+1}-1$, $k=2^m$, $\lambda=2^{m-1}$, $\nu=2^{m-2}$, $\sigma=2^{m-1}-1$, $\rho=2$ (m — произвольное целое положительное число).

Наконец, как показано в приложении 3, класс несимметричных (μ, ν, ρ)-блок-схем с $\sigma=\lambda-1$ образуют блок-схемы конечной евклидовой геометрии E.G. (m, q) [5], остаточные для симметричных блок-схем P.G. (m, q). Параметры таких блок-схем имеют значения

$$v=q^m, \quad b=\frac{q(q^m-1)}{q-1}, \quad k=q^{m-1},$$

$$r=\frac{q^m-1}{q-1}, \quad \lambda=\frac{q^{m-1}-1}{q-1}, \quad \mu=q^{m-2}, \quad \nu=q^{m-3},$$

$$\rho=1+q, \quad \sigma=\lambda-1=\frac{q(q^{m-2}-1)}{q-1}.$$

Отметим без доказательства, что для этих блок-схем (как и для симметричных блок-схем P.G. (m, q)) расширенная алгебра соотношений совпадает с коммутаторной алгеброй группы симметрии плана.

В заключение раздела приведем примеры двух (μ, ν, ρ)-блок-схем.

Несимметричная E. G. (3,2)

$v=8$, $b=14$, $r=7$, $k=4$, $\lambda=3$, $\mu=2$,
$\nu=1$, $\rho=3$, $\sigma=2$

1	2	3	5
1	2	4	6
1	2	7	8
1	3	6	8
1	3	4	7
1	5	6	7
1	4	5	8
2	4	5	7
2	5	6	8
2	3	6	8
2	3	4	7
3	4	5	6
3	5	7	8
4	6	7	8

Симметричная

$v=15$, $k=8$, $\lambda=4$, $\nu=2$, $\rho=2$ $\sigma=3$

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	9	10	11	12
1	2	5	6	9	10	13	14
1	2	7	8	11	12	13	14
1	3	5	7	9	11	13	15
1	3	6	8	10	12	13	15
1	4	5	8	10	11	14	15
1	4	6	7	9	12	14	15
2	3	5	8	9	12	14	15
2	3	6	7	10	11	14	15
2	4	5	7	10	12	13	15
2	4	6	8	9	11	13	15
3	4	5	6	11	12	13	14
3	4	7	8	9	10	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12

5. Ковариационные матрицы из расширенных алгебр соотношений и их оценки

Восьмимерная расширенная алгебра соотношений расщепляется на четырехмерный идеал и четыре одномерных идеала. Основой для построения удобного базиса служат матрицы E_i $(i=0, 1, \ldots, 6)$, использованные

в [1] в качестве базисных для алгебры соотношений:

$$
(31)\qquad
\begin{aligned}
&E_0=\frac{BT}{r-\lambda}-\frac{\varphi+1}{bk}G, \quad E_1=\frac{TB}{r-\lambda}-\frac{\varphi+1}{bk}G,\\
&E_2=\frac{BTB}{k(r-\lambda)}-\frac{\varphi+1}{bk}G, \quad E_3=\frac{T}{r}-\frac{G}{bk}, \quad E_4=\frac{G}{bk},\\
&E_5=I-\frac{B}{k}-\frac{\varphi+1}{\varphi r}T+\frac{BT}{\varphi(r-\lambda)}+\frac{TB}{\varphi(r-\lambda)}-\frac{BTB}{\varphi k(r-\lambda)},\\
&E_6=\frac{B}{k}-\frac{BTB}{k(r-\lambda)}+\frac{\varphi}{bk}G; \quad \varphi=\frac{kr}{r-\lambda}-1,
\end{aligned}
$$

и дополнительно вводимая матрица E_7, зависящая от S:

$$
(32)\qquad
\begin{aligned}
E_7=\frac{1}{\sqrt{d_4^2+4d_1}}\Bigg[&S_1-\frac{\lambda k-k+\mu}{\varphi}(E_0+E_1)-\left(k-\mu-\frac{\lambda k-k+\mu}{\varphi}\right)E_2-\\
&-\frac{r(k-\mu)}{\varphi}E_3-(\mu r+k-\mu)E_4-(k-\mu)E_6-\frac{1}{2}(d_4-\sqrt{d_4^2+4d_1})E_5\Bigg],
\end{aligned}
$$

где d_1, d_4 определены (23) (отметим, что $d_4^2+4d_1>0$, так как $d_1>0$). Матрицы H_i выражаются через E_i ($i=0, 1, \ldots, 7$) следующим образом:

$$
(33)\qquad H_i=E_i\ (i=0, 1, \ldots, 4, 6, 7),\ H_5=E_5-E_7.
$$

Таблица умножения для H_i, $i=0, 1, \ldots, 7$ имеет вид

(34)

	H_0	H_1	H_2	H_3
H_0	H_0	$(\varphi+1)H_2$	H_2	H_0
H_1	$(\varphi+1)H_3$	H_1	H_1	H_3
H_2	H_0	H_2	H_2	$1/(\varphi+1)H_0$
H_3	H_3	H_1	$1/(\varphi+1)H_1$	H_3

$$, \varphi=\frac{rk}{r-\lambda}-1,$$

$$
(35)\qquad H_iH_j=H_jH_i=0\ (i=0, 1, \ldots, 7;\ j=4, 5, 6, 7),\ H_i^2=H_i\ (i=0, 1, \ldots, 7).
$$

Для класса несимметричных (μ, ν, ρ)-блок-схем с $\sigma=\lambda-1$ в силу (25), (26) имеем $\sqrt{d_4^2+4d_1}=(k-\mu)(r-\lambda)/k+\mu$ и (32) принимает вид

$$
\begin{aligned}
E_7=\frac{k}{(k-\mu)(r-\lambda)+\mu k}\Bigg[&S-\frac{\lambda k-k+\mu}{\varphi}(E_0+E_1)-\\
&-\left(k-\mu-\frac{\lambda k-k+\mu}{\varphi}\right)E_2-\\
&-\frac{r(k-\mu)}{\varphi}E_3-(\mu r+k-\mu)E_4-(k-\mu)E_6+\mu E_5\Bigg].
\end{aligned}
$$

В случае симметричных схем учитываем (4) и полагаем в (31), (32) $b=v$, $r=k$, $\mu=\lambda$, $\varphi=\lambda v/(k-\lambda)$. Тогда $H_6=E_7=0$ и базисом служат матри-

цы $H_0, H_1, \ldots, H_5, H_7$. Если $\sigma=\lambda$, то в силу (27)

$$E_7=\frac{k-1}{(k-\lambda)(k+\lambda-1)}\left[S-\frac{(\lambda-k+\lambda)(k-\lambda)}{\lambda v}(E_0+E_1)-\right.$$
$$\left.-\frac{(k-\lambda)^2k}{\lambda v}(E_2+E_3)-(\lambda k+k-\lambda)E_4+\frac{\lambda(k-1)}{k-1}E_5\right].$$

Совпадение этого выражения с выражением для F_6, введенной в [2] в качестве седьмой базисной матрицы алгебры $\mathscr{S}_7$ в частном случае симметричных блок-схем P.G. (m, q), объясняется тем, что при выводе S^2 в [2] использовались не частные значения (29), (30) для параметров схем P.G. (m, q), а лишь соотношения между этими параметрами, хотя и полученные из (29), (30), но совпадающие с соотношениями (27), выведенными здесь из общих соображений.

Если в симметричной блок-схеме $\sigma=\lambda-1$, то $\sqrt{d_4^2+4d_1}=$

$$=(k^2-\lambda k+\lambda^2)/k \text{ и } E_7=\frac{k}{k^2-\lambda k+\lambda^2}\left[S-\frac{(\lambda k-k+\lambda)}{\lambda v}(E_0+E_1)-\frac{(k-\lambda)^2k}{\lambda v}(E_2+\right.$$
$$\left.+E_3)-(\lambda k+k-\mu)E_4+\lambda E_5\right].$$

Из (34), (35) видно, что $H_7H_i=H_iH_7=0$ для $i\leqslant 6$, а подалгебра с базисом $H_0, H_1, \ldots, H_6$ изоморфна алгебре соотношений $\mathscr{R}_7$ ($E_i\leftrightarrow H_i$, $E_iE_j\leftrightarrow H_iH_j$, $i=0, 1, \ldots, 6$, где $\{E_i, i=0, 1, \ldots, 6\}$ — базис $\mathscr{R}_7$ [1]), причем четырехмерные идеалы этих алгебр просто совпадают ($H_i=E_i$, $i=0, 1, 2, 3$). Поэтому результаты, полученные в [1] для алгебры $\mathscr{R}_7$, легко обобщаются на случай $\mathscr{S}_8$.

1. Матрица $A=\sum_{i=0}^{7}a_iH_i$, принадлежащая $\mathscr{S}_8$, является неособенной тогда и только тогда, когда

$$a_2a_3-(\varphi+1)a_0^2\neq 0,\ a_i\neq 0 \quad (i=4, \ldots, 7).$$

2. Матрица $K=\sum_{i=0}^{7}k_iH_i$ из $\mathscr{S}_8$ является симметричной неотрицательно определенной и представляется в виде $A^{\mathrm{T}}A$, где $A\in\mathscr{S}_8$, тогда и только тогда, когда

$$k_0=k_1,\quad k_2k_3-(\varphi+1)k_0^2\geqslant 0,$$
$$k_i\geqslant 0 \quad (i=0, 2, 3, \ldots, 7).$$

При требовании положительной определенности нестрогие неравенства заменяются строгими.

Все формулировки для алгебры $\mathscr{S}_7$ (симметричные (μ, ν, ρ)-блок-схемы) получаются из соответствующих формулировок для алгебры $\mathscr{S}_8$, если всюду опустить H_6 и коэффициент a_6 при ней.

Решение задачи выделения минимального числа достаточных статистик, т. е. представление гауссового распределения повторной центрированной выборки $\{x_h, h=1, \ldots, n\}$ в виде

$$p(x_1, \ldots, x_n)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}bkn}(\det K)^{n/2}\times \tag{36}$$
$$\times\exp\left\{\operatorname{tr}\left(K^{-1}\sum_{i=0}^{7}t_iH_i\right)\right\},$$

в случае алгебры $\mathscr{S}_8$ (тогда $K^{-1}=\sum_{i=0}^{7}\theta_i H_i$) легко получить из решения этой задачи в случае алгебры $\mathscr{R}_7$ [3], если учесть упомянутый изоморфизм и равенства $F_i=H_i$ ($i=0, 1, \ldots, 4, 6$). Статистики t_i ($i=0, 1, \ldots, 4, 6$) для обеих алгебр совпадают, а t_5 и t_7 для $\mathscr{S}_8$ легко определяются, если учесть равенства $H_5H_i=H_iH_5=0$ для $i\neq 5$, $H_7H_i=H_iH_7=0$ для $i\neq 7$. Итак, для t_i в (36) имеем

$$t_0=t_1=\frac{\varphi+1}{\varphi^2(v-1)}\operatorname{tr}\left\{\left[\frac{\varphi+2}{2(\varphi+1)}(H_0+H_1)-H_2-H_3\right]\sum_{h=1}^{n}x_hx_h^{\mathrm{T}}\right\},$$

$$t_2=\frac{\varphi+1}{\varphi^2(v-1)}\operatorname{tr}\left\{[-(H_0+H_1)+(\varphi+1)H_2+H_3]\sum_{h-1}^{n}x_hx_h^{\mathrm{T}}\right\},$$

(37)

$$t_3=\frac{\varphi+1}{\varphi^2(v-1)}\operatorname{tr}\left\{[-(H_0+H_s)+H_2(\varphi+1)H_3]\sum_{h=1}^{n}x_hx_h^{\mathrm{T}}\right\},$$

$$t_i=\frac{1}{\operatorname{tr}H_i}\operatorname{tr}\left(H_i\sum_{i=1}^{n}x_hx_h^{\mathrm{T}}\right),\quad i=4,5,6,7\quad\left(\varphi+s=\frac{kr}{r-\lambda}\right).$$

Для вычисления $\operatorname{tr}H_i$ используются (32), (33) и значения $\operatorname{tr}E_i$ [3]:

$\operatorname{tr}E_i=v-1$ ($i=0, 1, 2, 3$), $\operatorname{tr}E_4=1$,

$\operatorname{tr}E_5=bk-b-v-1$, $\operatorname{tr}E_6=b-v$.

В частности, для (μ, ν, ρ)-блок-схем с $\sigma=\lambda-1$

$$\operatorname{tr}H_7=\frac{k^2(v-1)(\lambda-1)}{(k-\mu)(r-\lambda)+\mu k},\quad \operatorname{tr}H_5=\frac{b(k-1)(k-\mu)(r-\lambda)}{(k-\mu)(r-\lambda)+\mu k}.$$

В случае симметричных (μ, ν, ρ)-блок-схем с $\sigma=\lambda-1$

$$\operatorname{tr}H_7=\frac{k^2(v-1)(\lambda-1)}{k^2+\lambda^2-\lambda k},\quad \operatorname{tr}H_5=\frac{v(k-1)(k-\lambda)^2}{k^2+\lambda^2-\lambda k}.$$

Для симметричных схем с $\sigma=\lambda$ $\operatorname{tr}H_i$ совпадают с $\operatorname{tr}F_i$ [3].

Несмещенная оценка ковариационной матрицы $K\in\mathscr{S}_8$ имеет вид

$$\hat{K}=\frac{1}{n}\left[t_1(H_0+H_1)+\sum_{i=2}^{7}t_iH_i\right], \tag{38}$$

где t_i определены (37). В случае алгебры $\mathscr{S}_7$ в силу $H_6=0$ в (36)—(38) выпадает статистика t_6.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

При вычислении элементов $(S^2)_{ij}$ матрицы S^2 используется следующий факт. Из (8) следует, что $s_{ih}s_{hj}=1$, если $t(i)$, $t(j)\in B_{b(h)}$ и $t(h)\in B_{b(i)}\cap B_{b(j)}$. Поэтому в $\sum_h s_{ih}s_{hj}$ нужно учитывать только блоки, содержащие $t(i)$, $t(j)$, а сумма по участкам h одного такого блока B_l равна $|B_{b(i)}\cap B_{b(j)}\cap B_l|$. Определим теперь $(S^2)_{ij}$ на каждом классе R-эквивалентности (μ, ν, ρ) блок-схемы.

1) $\delta_{ij}=1$. Имеем $(S^2)_{ij}=\sum_{h=1}^{bk}s_{ih}s_{hi}=\sum_{h=1}^{bk}s_{ih}$, и в силу (10), (11)

$(S^2)_{ii}=\lambda(k-1)+r=\mu(r-1)+k$,

2) $i \neq j$, $b_{ij}=1$, т. е. $b(i)=b(j)=l$. Имеется λ блоков, содержащих $t(i)$, $t(j)$, и $\sum s_{ih}s_{hj}=k$, когда h пробегает участки l-го блока. Каждый из остальных $\lambda-1$ блоков, содержащих $t(i)$, $t(j)$, в силу свойства А имеет μ методов, содержащихся в B_l, и $\sum\limits_h s_{ih}s_{hj}=\mu$ при суммировании по участкам такого блока. Итак, $(S^2)_{ij}=k+\mu(\lambda-1)$, если $\delta_{ij}=0$, $b_{ij}=1$,

3) $b_{ij}=0$, $t_{ij}=1$, т. е. $t(i)=t(j)=\alpha$. Так как $\alpha \in B_{b(i)} \cap B_{b(j)}$, то $|B_{b(i)} \cap B_{b(j)}|=\mu$. По свойству С имеется ρ блоков B_l, таких, что $|B_{b(i)} \cap B_{b(j)} \cap B_l|=\mu$ и, кроме того, имеется $r-\rho$ блоков B_m таких, что $\alpha \in B_m$ и $|B_{b(i)} \cap B_{b(j)} \cap B_m|=\nu$. Таким образом, $(S^2)_{ij}=\rho\mu+(r-\rho)\nu$, если $b_{ij}=0$, $t_{ij}=1$,

4) $b_{ij}=t_{ij}=0$, $s_{ij}=1$, т. е. $t(i)t(j) \in B_{b(i)} \cap B_{b(j)}$. Имеется ρ блоков B_l, таких, что $|B_{b(i)} \cap B_{b(j)} \cap B_l|=\mu$ и, кроме того, пара $t(i)$, $t(j)$ содержится еще в $\lambda-\rho$ блоках B_m, таких, что $|B_{b(i)} \cap B_{b(j)} \cap B_l|=\nu$ (следствие 2). Поэтому $(S^2)_{ij}=\rho\mu+(\lambda-\rho)\nu$, если $b_{ij}=t_{ij}=0$, $s_{ij}=1$,

5) $b_{ij}=t_{ij}=s_{ij}=(TB)_{ij}=0$, $(BT)_{ij}=1$, т. е. $t(j) \in B_{b(i)}$, $t(i) \notin B_{b(j)}$ (см. (1), (2)). $b(i)$-й блок содержит $t(i)$, $t(j)$ и имеет μ методов, содержащихся в $B_{b(j)}$. Поэтому $\sum\limits_h s_{ih}s_{hj}=\mu$, когда h пробегает участки этого блока. Каждый из остальных $\lambda-1$ блоков, содержащих $t(i)$, $t(j)$, имеет ν методов, входящих в $B_{b(i)} \cap B_{b(j)}$ (случай μ методов исключается, так как такой блок имел бы $\mu+1$ методов, общих с $B_{b(i)}$, а именно μ методов из $B_{b(i)} \cap B_{b(j)}$ плюс метод $t(i)$, не содержащийся в $B_{b(i)} \cap B_{b(j)}$). Таким образом,

$$(S^2)_{ij}=\mu+(\lambda-1)\nu, \text{ если } b_{ij}=t_{ij}=s_{ij}=(TB)_{ij}=0,\ (BT)_{ij}=1,$$

6) аналогично

$$(S^2)_{ij}=\mu+(\lambda-1)\nu, \text{ если } b_{ij}=t_{ij}=s_{ij}=(BT)_{ij}=0,\ (TB)_{ij}=1,$$

7) $(BT)_{ij}=(TB)_{ij}=0$, $(BTB)_{ij}=\mu$, т. е. $t(i) \notin B_{b(j)}$, $t(j) \notin B_{b(i)}$, $|B_{b(i)} \cap B_{b(j)}|=\mu$. Согласно свойству D имеется σ блоков B_l, таких, что $t(i)$, $t(j) \in B_l$ и $|B_{b(i)} \cap B_{b(j)} \cap B_l|=\nu$. Поэтому $(S^2)_{ij}=\sigma\nu$, если $(BT)_{ij}=(TB)_{ij}=0$, $(BTB)_{ij}=\mu$,

8) $(BTB)_{ij}=0$. Но тогда $B_{b(i)} \cap B_{b(j)} \cap B_{b(h)}=\phi$ для любого h и, следовательно,

$$(S^2)_{ij}=0, \text{ если } (BTB)_{ij}=0.$$

Используя эти значения $(S^2)_{ij}$ на классах R-эквивалентности, имеем

$$S^2=(\lambda k+r-\lambda)X_1{}^R+[k+\mu(\lambda-1)]X_2{}^R+$$
$$+[\rho\mu+(r-\rho)\nu]X_3{}^R+[\rho\mu+(\lambda-\rho)\nu]X_4{}^R+$$
$$+[\mu+(\lambda-1)\nu](X_5{}^R+X_6{}^R)+\sigma\nu X_7{}^R.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Рассмотрим симметричную (μ, ν, ρ)-блок-схему с $\sigma=\lambda$, $\rho=3$. Из (27) следует, что

(П.1) $\qquad \lambda=1+2\nu, \quad k=3+4\nu, \quad v=7+8\nu,$

если $\sigma=\lambda$, $\rho=3$.

Дополнительная схема будет симметричной с параметрами $\bar{v}=v$, $\bar{k}=v-k$, $\bar{\lambda}=v-2k+\lambda$. С учетом (П.1) имеем

(П.2) $\qquad \bar{v}=7+8\nu, \quad \bar{k}=4+4\nu, \quad \bar{\lambda}=2+2\nu.$

Если тройка блоков исходной схемы имеет ϑ общих методов, то тройка дополнительных блоков имеет $\bar{\vartheta}=v-3k+3\lambda-\vartheta$ общих методов. Поскольку $\vartheta=\lambda$ или ν (в силу $\sigma=\lambda$), то из (П.1) следует, что $\bar{\vartheta}=0$ или $1+\nu$. И так как $\bar{\lambda}>1+\nu$ (см. (П.2)), то в дополнительной схеме имеем параметры $\bar{\rho}=2$, $\bar{\nu}=1+\nu$.

Доказательство того, что дополнительная схема имеет также параметр $\bar{\sigma}=\bar{\lambda}-1$, получим, если докажем, что в этой схеме среди блоков, содержащих пару α, β, где $\alpha \in \bar{B}_l \backslash \bar{B}_m$, $\beta \in \bar{B}_m \backslash B_l$, имеется точно один, не содержащий методов из $\bar{B}_l \cap \bar{B}_m$ ($\bar{B}_l$ — блок, дополнительный к B_l). Пусть $\alpha \in \bar{B}_l \backslash \bar{B}_m$, $\beta \in \bar{B}_m \backslash \bar{B}_l$. Тогда $\alpha \in B_m \backslash B_l$, $\beta \in B_l \backslash B_m$ и, поскольку $\rho=3$, то в исходной блок-схеме имеется точно один блок, скажем, B_{l_0}, содержащий λ методов, входящих в $B_l \cap B_m$, причем α, $\beta \notin B_{l_0}$. Но тогда α, $\beta \in \bar{B}_{l_0}$ и $|\bar{B}_l \cap \bar{B}_m \cap \bar{B}_{l_0}|=v-3k+2\lambda$ (так как $|B_l \cap B_m \cap B_{l_0}|=\lambda$). Учитывая (П.1), получаем, что $|\bar{B}_l \cap \bar{B}_m \cap \bar{B}_{l_0}|=\nu$. Для всех остальных блоков $\bar{B}_i(\alpha, \beta \in B_i)$ имеем $|B_l \cap B_m \cap B_i|=\nu$ и, следовательно, $|\bar{B}_l \cap \bar{B}_m \cap \bar{B}_i|=v-3k+3\lambda-\nu=1+\nu$. Таким образом, среди блоков $\bar{B}_i$, содержащих α, β, только один не имеет общих методов с $\bar{B}_l \cap \bar{B}_m$, а все остальные имеют по $1+\nu$ общих методов с $B_l \cap B_m$. Итак, дополнительная блок-схема является (μ, ν, ρ)-блок-схемой.

Рассмотрим геометрию P.G.(m, q) и содержащиеся в ней геометрии P.G.(s, q), $s<m$. Согласно [5] пересечение P.G.$(m-1, q)$ с P.G.(s, q) есть либо P.G.$(s-1, q)$, либо P.G.(s, q) (если исходная P.G.(s, q) содержится в P.G.$(m-1, q)$). Учитывая, что блоки симметричной блок-схемы P.G.(m, q) суть геометрии P.G.$(m-1, q)$, по индукции получаем, что пересечение h $(h\leqslant m)$ разных блоков симметричной блок-схемы P.G.(m, q) есть геометрия P.G.$(m-h', q)$, где $2\leqslant h'\leqslant h$.

Блоки геометрии E.G.(m, q) имеют вид $B_l=B_l'\backslash B_0'$, где B_l' — $(m-1)$-мерные блоки блок-схемы P.G.(m, q), B_0' — удаляемый блок. Поэтому $B_l\cap B_m=B_l'\cap B_m'\backslash B_l\cap B_0'$ и отсюда

$$|B_l\cap B_m|=|B_l'\cap B_m'|-|B_l'\cap B_m'\cap B_0'|.$$

Из указанного свойства пересечения блоков следует, что $B_l'\cap B_m'$ есть $(m-2)$-мерное многообразие, а $B_l'\cap B_m'\cap B_0'$ — либо $(m-2)$-мерное многообразие (если $B_l'\cap B_m'\subset B_0'$), и тогда $|B_l\cap B_m|=0$, либо $(m-3)$-мерное многообразие, и тогда $|B_l\cap B_m|=\mu_{m-2}-\mu_{m-3}$ ($\mu_h=1+q+\ldots+q^h$ — число точек в h-мерном многообразии [5]). Итак, в блок-схеме E.G.(m, q) пересечение двух блоков либо имеет $\mu=q^{m-2}$ точек, либо пусто (свойство A).

Определим число точек в $B_l\cap B_m\cap B_i$. Имеем $|B_l\cap B_m\cap B_i|=|B_l'\cap B_m'\cap B_i'|-$ $-|B_l'\cap B_m'\cap B_i'\cap B_0'|$. Либо многообразия $B_l'\cap B_m'\cap B_i'$ и $B_l'\cap B_m'\cap B_i'\cap B_0'$ совпадают (если $B_l'\cap B_m'\cap B_i'\subset B_0'$), и тогда $|B_l\cap B_m\cap B_i|=0$, либо $B_l'\cap B_m'\cap B_i'\cap B_0'$ имеет размерность на единицу меньше размерности $B_0'\cap B_m'\cap B_i'$. В последнем случае $|B_l\cap B_m\cap B_i|=$ $=\mu_{m-2}-\mu_{m-3}=\mu=q^{m-2}$, если $B_l'\cap B_m'\cap B_i'$ имеет размерность $m-2$, и $|B_l\cap B_m\cap B_i|=$ $=\mu_{m-3}-\mu_{m-4}=q^{m-3}$, если $B_l'\cap B_m'\cap B_i'$ имеет размерность $m-3$. Таким образом, пересечение трех блоков блок-схемы E.G.(m, q) содержит либо $\mu=q^{m-2}$, либо $\nu=q^{m-3}$, либо 0 методов (свойство B).

Пусть $|B_l\cap B_m|=\mu$. Имеем $B_l=B_l'\backslash B_0'$ и $B_m=B_m'\backslash B_0'$. Множество $B_l'\cap B_m'$ содержится в λ_{m-1}^{m-2} блоках блок-схемы P.G.(m, q) (λ_{m-1}^{m-2} — число $(m-1)$-мерных многообразий, проходящих через $(m-2)$-мерное многообразие, $\lambda_{m-1}^{m-2}=1+q$ [5]). Среди этих λ_{m-1}^{m-2} блоков нет блока B_0' (так как $B_l'\cap B_m'$ имеет точки, не входящие в B_0'). Поэтому число блоков блок-схемы E.G.(m, q), содержащих множество $B_l\cap B_m$ с $|B_l\cap B_m|=\mu$, также равно $\lambda_{m-1}^{m-2}=1+q$. Итак, для блок-схемы E.G.(m, q) выполнено свойство C и $\rho=1+q$.

Пусть в блок-схеме E.G.(m, q) $\alpha\in B_l\backslash B_m$, $\beta\in B_m\backslash B_l$, $B_l\cap B_m\neq\phi$. Тогда в исходной блок-схеме P.G.(m, q) $B_l'\cap B_m'\cap B_0'$ есть $(m-3)$-мерное многообразие (в случае $(m-2)$-мерного $B_l'\cap B_m'\cap B_0'$ было бы $B_l\cap B_m=\phi$). В силу $\alpha\notin B_l'\cap B_m'\cap B_0'$ линейная оболочка α и $B_l'\cap B_m'\cap B_0'$ есть $(m-2)$-мерное многообразие, причем не содержащее β, так как эта линейная оболочка содержится в B_l' в силу $\alpha\in B_l$, а $\beta\notin B_l'$. Поэтому линейная оболочка α, β и $B_l'\cap B_m'\cap B_0'$ есть $(m-1)$-мерное многообразие, т. е. некоторый блок B' из P.G.(m, q), такой, что $\alpha, \beta\in B'$ и $B_l'\cap B_m'\cap B_0'\subset B'$. Таким образом, в блок-схеме P.G.(m, q) имеется ровно один блок, содержащий пару α, β и такой, что его пересечение с $B_l'\cap B_m'$ не содержит методов, не принадлежащих B_0'. Остальные $\lambda-1$ блоков, содержащих пару α, β, пересекаются с $B_l'\cap B_m'$ по точкам, среди которых имеются не принадлежащие B_0'. Поэтому после удаления B_0 в блок-схеме E.G.(m, q) будет $\lambda-1$ блоков, содержащих α, β и имеющих непустое пересечение с $B_l\cap B_m$, т. е. для блок-схемы E.G.(m, q) выполнено свойство D, причем $\sigma=\lambda-1$, так как параметр λ остаточной схемы совпадает с параметром λ исходной схемы.

Поступила в редакцию
13 сентября 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Сысоев Л. П., Шайкин М. Е.* Алгебраические методы исследования корреляционных связей в неполных уравновешенных блок-схемах планирования эксперимента. I. Характеризация ковариационных матриц в случае несимметричных блок-схем. Автоматика и телемеханика, № 5, стр. 64—73, 1976.
2. *Сысоев Л. П., Шайкин М. Е.* Алгебраические методы исследования корреляционных связей в неполных уравновешенных блок-схемах планирования эксперимента. II. Алгебры соотношений и характеризация ковариационных матриц в случае симметричных блок-схем. Автоматика и телемеханика, № 7, стр. 57—67, 1976.
3. *Сысоев Л. П., Шайкин М. Е.* Алгебраические методы исследования корреляционных связей в неполных уравновешенных блок-схемах планирования эксперимента. III. Достаточные статистики и оценки ковариационных матриц. Автоматика и телемеханика, № 9, стр. 62—68, 1976.
4. *James A. T.* The Relationship Algebra of an Experimental Design. Ann. Math. Stat., vol. 28, No. 4, pp. 993—1002, 1957.
5. *Дюге Д.* Теоретическая и прикладная статистика. «Наука», 1972.

PROPERTIES OF SOME EXPERIMENTAL BLOCK DESIGN CLASSES AND CORRELATION CHARACTERISTICS OF OBSERVATIONS

L. P. SYSOEV

Incomplete balanced block design classes with complementary combinatorial properties are introduced. For these block design classes extended relationship algebras (containing the relationship algebra of James as a subalgebra) are constructed. Covariance matrices of extended relationship algebras are characterized. Sufficient statistics and unbiased estimates of these matrices are found.