П. Освальд, О средних Марцинкевича двойных интегралов Фурье в H_p ($p \leq 1$), *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1983, номер 6, 56–63

ратора с локально независимыми сдвигами. — Докл. АН БССР, 1980, **24**, № 10, 884—887.
8. Федосов Б. В., Шубин М. А. Индекс случайных эллиптических операторов. I. — Матем. сб., 1978, **106**, № 1, 108—140.
9. Дедик П. Е., Шубин М. А. Случайные псевдодифференциальные операторы и стабилизация решений параболических уравнений со случайными коэффициентами. — Матем. сб., 1980, **113**, № 1, 41—62.

Поступила в редакцию
18.10.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1983, № 6

УДК 517.52

П. Освальд

О СРЕДНИХ МАРЦИНКЕВИЧА ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ В $H_p(p\leqslant 1)$

Пусть R^N — N-мерное евклидово пространство ($N\geqslant 1$). Через $S'\equiv S'(R^N)$ обозначим пространство обобщенных функций медленного роста*. Классы Харди $H_p\equiv H_p(R^N)$ при $p\leqslant 1$ введены в работе [1]. Одно из эквивалентных определений, данных в [1], гласит: распределение $f(x)\in S'(R^N)$ принадлежит $H_p(R^N)$, если существует гармоническая в $R^{N+1}_+=\{(x,t):x\in R^N,\ t\in R^1,\ t>0\}$ функция, для которой $f(x)=\lim\limits_{t\to+0}u(x,t)$ (сходимость в S') и

$$u^+(x)=\sup_{t>0}|u(x,t)|\in L_p\equiv L_p(R^N).$$

При этом $H_p(R^N)$ с квазинормой $\|f\|_{H_p(R^N)}=\|u^+\|_{L_p(R^N)}$ является квазибанаховым пространством. В настоящее время для изучения свойств классов $H_p(R^N)$ и различных их обобщений имеется ряд мощных методов (см. работы [1—6] и указанную в них литературу). Особенно удачными, на наш взгляд, оказались атомарные представления в классах Харди при $p\leqslant 1$. В настоящей заметке эта техника применяется к исследованию суммируемости интегралов Фурье методами типа Марцинкевича.

Пусть $|x|_\infty=\max|x_k|$; через $|x|$ обозначим обычную евклидову норму для $x=(x_1,\ldots,x_N)\in R^N$. Тогда функции

$$M_\varepsilon f(x)=(2\pi)^{-N}\int\limits_{R^N}\exp(-\varepsilon|y|_\infty)\hat{f}(y)e^{ixy}dy \tag{1}$$

и

$$M_\varepsilon^\delta f(x)=(2\pi)^{-N}\int\limits_{R^N}(1-(\varepsilon|y|_\infty)^2)_+^\delta\hat{f}(y)e^{ixy}dy \tag{2}$$

назовем соответственно средними Марцинкевича — Абеля и средними Марцинкевича — Рисса порядка $\delta>0$ (всюду $\varepsilon>0$, $N\geqslant 2$). В силу того что для $f(x)\in H_p(R^N)$, $p\leqslant 1$, преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ является непрерывной функцией, удовлетворяющей неравенству [1]

$$|\hat{f}(y)|\leqslant C|y|^{N(1/p-1)}\|f\|_{H_p(R^N)},\qquad y\in R^N; \tag{3}$$

средние (1), (2) определены, как обычные функции, и являются непрерывными и ограниченными на всем R^N и для любого $\varepsilon>0$. Отме-

* Не ограничивая общности, приводим все рассуждения для вещественнозначного случая.

тим, что для двойных рядов Фурье функций из $L_p(T^2)$, $p \geqslant 1$, соответствующие средние (2) при $\delta=1$ введены Марцинкевичем [7]. В настоящее время известен ряд исследований, посвященных свойствам сходимости и приближения средних типа (1), (2) для кратных рядов (интегралов) Фурье в классах C и L_p, $p \geqslant 1$ (см., например, [7—11]). Что касается классов Харди при $p \leqslant 1$, то нам известна лишь работа [12], в которой приводятся оценки приближения средними Марцинкевича — Чезаро степенного ряда для аналитических функций в полидиске. В частности, из результатов [12] вытекает H_p-сходимость соответствующих средних (2) для функций из класса Харди в полидиске, когда $\delta > N(1/p-1)$ и $p > (N-1)/N$.

Приведем наши результаты, связанные со сходимостью средних (1), (2) почти всюду и по квазинорме в $H_p(R^2)$. Пусть

$$M_* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |M_\varepsilon f(x)|, \quad M_*^\delta f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |M_\varepsilon^\delta f(x)|, \qquad x \in R^2,$$

суть соответствующие максимальные функции.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in H_p(R^2)$, где $1/2 \leqslant p \leqslant 1$. Тогда для почти всех $x \in R^2$ имеет место $M_* f(x) < \infty$. Более точно,*

$$\operatorname{mes}\{x \in R^2 : M_* f(x) > t\} \leqslant C t^{-1/2} (\|f\|_{H_{1/2}(R^2)})^{1/2}, \qquad t > 0, \tag{4}$$

при $p=1/2$ (слабая $(H_{1/2}, L_{1/2})$-оценка) и

$$\|M_* f\|_{L_p(R^2)} \leqslant C_p \|f\|_{H_p(R^2)} \tag{5}$$

при $1/2 < p \leqslant 1$ (сильная (H_p, L_p)-оценка).

Утверждения (4), (5) окончательны в том смысле, что при $p < 1/2$ слабая (H_p, L_p)-оценка уже неверна, а при $p=1/2$ неверна сильная $(H_{1/2}, L_{1/2})$-оценка. Из теоремы 1 вытекают следствия.

Следствие 1. *Если $f(x) \in H_p(R^2)$, $1/2 \leqslant p \leqslant 1$, то для почти всех $x \in R^2$ существует*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon f(x) = f_0(x) \in L_p(R^2). \tag{6}$$

Следствие 2. *Если $f(x) \in H_p(R^2)$, $1/2 < p \leqslant 1$, то справедливо равенство*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - M_\varepsilon f\|_{H_p(R^2)} = 0. \tag{7}$$

С другой стороны, при $0 < p \leqslant 1/2$ существует функция $f(x) \in H_p(R^2)$, для которой $M_\varepsilon f(x) \notin H_p(R^2)$ при всех $\varepsilon > 0$. Точнее,

$$\|M_\varepsilon f\|_{L_p(R^2)} = \infty, \qquad \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in H_p(R^2)$. Если $\delta > \delta_0(p) = 2(1/p-1)$ и $1/2 < p \leqslant 1$, то*

$$\|M_*^\delta f\|_{L_p(R^2)} \leqslant C_{p,\delta} \|f\|_{H_p(R^2)}. \tag{9}$$

При $1/2 < p < 1$, $\delta=\delta_0(p)$ и при $p=1/2$, $\delta > 2$ справедливо неравенство

$$\operatorname{mes}\{x \in R^2 : M_*^\delta f(x) > t\} \leqslant C_{p,\delta} t^{-p} (\|f\|_{H_p(R^2)})^p, \qquad t > 0. \tag{10}$$

Справедливы также соответствующие следствия о сходимости средних (2) почти всюду и по квазинорме в $H_p(R^2)$. Наиболее интересным отрицательным фактом является отсутствие слабой (H_p, L_p)-оценки (10) при $p=1/2$ и $\delta=2$.

Необходимо сравнить приведенные утверждения с результатами недавней работы [13], касающимися средних Рисса — Бохнера

$$S_\varepsilon^\delta f(x) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{R^N} (1-(\varepsilon|y|)^2)_+^\delta \hat{f}(y) e^{ixy} dy, \qquad \varepsilon > 0, \tag{11}$$

для $f(x) \in H_p(R^N)$, $0<p\leqslant 1$. В [13] доказано, что соответствующая максимальная функция $S_*{}^\delta f(x)$ допускает слабую (H_p, L_p)-оценку при $\delta = \delta_0'(p) = N(1/p-1) + \frac{(N-1)}{2}$ и сильную (H_p, L_p)-оценку при $\delta > \delta_0'(p)$ $(0<p<1$; последний результат отмечен и в [14]). Таким образом, при $N=2$ и $p>1/2$ критический показатель $\delta_0(p)$ для средних Марцинкевича — Рисса меньше $\delta_0'(p)$ для средних Рисса — Бохнера в то время, как при $p\leqslant 1/2$ средние (2) по сравнению со средними (11) резко портятся. Последнее замечание справедливо и относительно средних Абеля — Пуассона

$$S_\varepsilon f(x) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{R^N} \exp(-\varepsilon|y|) \hat{f}(y) e^{ixy} dy, \qquad \varepsilon > 0,$$

и средних (1), так как в силу результатов [1]

$$S_* f(x) = u^+(x) \text{ для } f(x) \in H_p(R^N) \text{ и любых } 0<p\leqslant 1.$$

Вероятно, это связано с недостаточной гладкостью мультипликаторов Фурье, порождающих средние (1), (2), вдоль линий $|y_1| = |y_2|$, то есть с наличием угловых точек у квадрата.

Ввиду ограниченности объема мы остановимся лишь на существенных моментах доказательства теоремы 1 и ее следствий, подробные же доказательства теоремы 2 предполагаем опубликовать в другой статье.

В доказательствах мы используем атомарные представления в $H_p(R^N)$, которые первоначально введены в [15] для $N=1$ и развиты затем в работах [16, 3, 4] и других. Пусть $0<p\leqslant 1$ и $s \geqslant \left[N\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ — натуральное число. Функция $a(x) \in L_\infty(R^N)$ называется (p, ∞, s)-атомом (с центром в $x_0 \in R^N$), если для некоторого шара

$$I = \{x \in R^N : |x-x_0| < r\}, \quad r>0,$$

выполнены соотношения

$$\begin{cases} \operatorname{supp} a(x) \subset I, \\ \|a\|_{L_\infty(R^N)} \leqslant r^{-N/p}, \\ \int\limits_{R^N} a x\, x^\alpha dx = 0 \text{ для всех мультииндексов } a \text{ с } |\alpha| \leqslant s. \end{cases} \tag{12}$$

Имеет место

Предложение 1. (см. [4]). *Пусть* $0<p\leqslant 1$, $s \geqslant [N(1/p-1)]$. *(а) Для любой* $f(x) \in H_p(R^N)$ *существует атомарное представление*

$$f(x) = \sum_{j\geqslant 1} \lambda_j a_j(x) \text{ (сходимость в } H_p(R^N)), \tag{13}$$

где $a_j(x)$ *суть* (p, ∞, s)*-атомы, а* λ_j *— вещественные числа, причем* $\sum\limits_{j\geqslant 1} |\lambda_j|^p < \infty$. *Более того, имеет место*

$$\Big(\sum_{j\geqslant 1} |\lambda_j|^p\Big)^{1/p} \leqslant C_{p,s} \|f\|_{H_p(R^N)}. \tag{14}$$

(б) Если $f(x)\in S'(R^N)$ представлена в виде (13), *причем сходимость ряда требуется лишь в S', и $a_j(x)$, λ_j удовлетворяют указанным свойствам, то $f(x)\in H_p(R^N)$ и*

$$\|f\|_{H_p(R^N)}\leqslant C_p\Big(\sum_{j\geqslant 1}|\lambda_j|^p\Big)^{1/p}.$$

Предложение 1 позволяет стандартным путем вывести теорему 1 из следующего утверждения.

Лемма 1. *Для любого $(p, \infty, 2)$-атома $a(x)$, $p\geqslant 1/2$, имеем*

$$\operatorname{mes}\{x\in R^2: M_*a(x)>t\}\leqslant Ct^{-1/2}, \qquad t>0, \quad p=1/2, \tag{15}$$

и

$$\|M_*a\|_{L_p(R^2)}\leqslant C_p, \qquad 1/2<p\leqslant 1. \tag{16}$$

В самом деле, пусть сначала $1/2<p\leqslant 1$, и предположим, что (16) уже доказано. Для $f(x)\in H_p(R^2)$ найдем согласно предложению 1(а) атомарное представление (13) с $s=2$. В силу очевидного неравенства (вытекающего непосредственно из (1), (3) и (13))

$$M_*f(x)\leqslant\sum_{j\geqslant 1}|\lambda_j|\,M_*a_j(x), \qquad x\in R^2, \tag{17}$$

получим с помощью (16) и (14)

$$\|M_*f\|^p_{L_p(R^2)}\leqslant\sum_{j\geqslant 1}|\lambda_j|^p\,\|M_*a_j\|^p_{L_p(R^2)}\leqslant C_p\sum_{j\geqslant 1}|\lambda_j|^p\leqslant C_p\|f\|^p_{H_p(R^2)},$$

что доказывает (5).

Оценка (4) для случая $p=1/2$ извлекается аналогичным путем из предложения 1(а), (15) и (17), если учесть

Предложение 2 (см. [13]). *Пусть $0<p<1$ и $f_j(x)$ — измеримые функции, удовлетворяющие неравенству*

$$\operatorname{mes}\{x\in R^N: |f_j(x)|>t\}\leqslant Ct^{-p}, \qquad t>0, \quad j\geqslant 1.$$

Тогда

$$\operatorname{mes}\Big\{x\in R^N: \Big|\sum_{j\geqslant 1}c_jf_j(x)\Big|>t\Big\}\leqslant\frac{2-p}{1-p}Ct^{-p}\sum_{j\geqslant 1}|c_j|^p, \qquad t>0,$$

если

$$\sum_{j\geqslant 1}|c_j|^p<\infty.$$

Итак, докажем лемму 1. Пусть $N=2$. Простое вычисление убеждает, что тогда ядра средних (1) имеют вид

$$K_\varepsilon(x)\equiv\int_{R^2}\exp(-\varepsilon|y|_\infty)\,e^{-ixy}\,dy=8\varepsilon^2(\varepsilon^2+(x_1+x_2)^2)^{-1}(\varepsilon^2+(x_1-x_2)^2)^{-1}. \tag{18}$$

Для упрощения выкладок всюду обозначим:

$$u_1\equiv x_1+x_2, \quad u_2\equiv x_1-x_2, \quad v_1=y_1+y_2, \quad v_2=y_1-y_2$$
$$\text{и}\quad f(x_1,x_2)\equiv\bar f(u_1,u_2).$$

Тогда, в частности,

$$M_\varepsilon a(x)\equiv\overline{M_\varepsilon a}(u)=-1/2\,(2\pi)^{-2}\int_{R^2}\bar a(v)\bar K_\varepsilon(u-v)\,dv. \tag{19}$$

Займемся оценкой величины $|\overline{M_\varepsilon a}(u)|$. Без ограничения общности считаем $x_0=0$, то есть $I=\{x\in R^2: |x|<r\}$. Легко заметить, что $2^{-1/p}\bar{a}(u)$ является $(p, \infty, 2)$-атомом относительно новых координат u с $\operatorname{supp}\bar{a}(u)\subset I'=\{u\in R^2: |u|<r'=\sqrt{2}\cdot r\}$. Фиксируем произвольное $u\in R^2$, и пусть $P_2(v)$ — полином Тейлора степени 2 для $\bar{K}_\varepsilon(u-v)$ относительно точки $v_0=0$. Тогда (см. (12))

$$|\overline{M_\varepsilon a}(u)| = \frac{1}{8/\pi^2}\left|\int_{I'}\bar{a}(v)(\bar{K}_\varepsilon(u-v)-P_2(v))\,dv\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\|a\|_{L_\infty(R^2)}\int_{I'}|\bar{K}_\varepsilon(u-v)-P_2(v)|\,dv \leqslant Cr^{-2/p}r^5 \sup_{|u-v|\leqslant\sqrt{2}\cdot r}|D^3\bar{K}_\varepsilon(v)|,$$

где

$$|D^3\bar{K}_\varepsilon(v)| \equiv \sum_{|\alpha|=3}\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial v^\alpha}\bar{K}_\varepsilon(v)\right| \leqslant C\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+|v_1|)^2(\varepsilon+|v_2|)^2}\left(\frac{1}{(\varepsilon+|v_1|)^3}+\frac{1}{(\varepsilon+|v_2|)^3}\right),$$

в чем можно убедиться путем непосредственного дифференцирования функции (18). Таким образом, если обозначим $u_-=\min(|u_1|,|u_2|)$ и $u_+=|u|_\infty$, то при $\varepsilon\geqslant r$ будем иметь

$$|\overline{M_\varepsilon a}(u)| \leqslant Cr^{5-2/p}\varepsilon^2(\varepsilon+u_+)^{-2}(\varepsilon+u_-)^{-5}.$$

Следовательно,

$$\sup_{\varepsilon\geqslant r}\overline{M_\varepsilon a}(u) \leqslant Cr^{5-2/p}\Big(\sup_{r\leqslant\varepsilon\leqslant u_-}(\varepsilon^2u_+^{-2}u_-^{-5}) + \sup_{\varepsilon>\max(r,u_-)}\varepsilon^{-3}(\varepsilon+u_+)^{-2}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant Cr^{5-2/p}\begin{Bmatrix} u_+^{-2}u_-^{-3}, & u_->r \\ (u_++r)^{-2}r^{-3}, & u_-\leqslant r\end{Bmatrix} \leqslant Cr^{5-2/p}(r+u_+)^{-2}(r+u_-)^{-3}. \quad (20)$$

Если $\varepsilon<r$, то различаем два случая. При $u_-\geqslant 3r$ получаем, как выше,

$$|\overline{M_\varepsilon a}(u)| \leqslant Cr^{5-2/p}\varepsilon^2u_+^{-2}u_-^{-5} \leqslant Cr^{5-2/p}u_+^{-2}u_-^{-3},$$

а при $u_-<3r$ рассуждаем так (см. (12), (18), (19)):

$$|\overline{M_\varepsilon a}(u)| \leqslant C\|a\|_{L_\infty(R^2)}\int_{I'}|\bar{K}_\varepsilon(u-v)|\,dv \leqslant$$

$$\leqslant Cr^{-2/p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon dt}{\varepsilon^2+t^2}\int_{u_+-\sqrt{2}\cdot r}^{u_++\sqrt{2}\cdot r}\frac{\varepsilon dt}{\varepsilon^2+t^2} \leqslant Cr^{-2/p+2}(r+u_+)^{-2}, \qquad \varepsilon<r.$$

Из двух этих оценок вытекает

$$\sup_{\varepsilon<r}|\overline{M_\varepsilon a}(u)| \leqslant Cr^{5-2/p}(r+u_+)^{-2}(r+u_-)^{-3}, \quad (21)$$

то есть в силу (20), (21) установлено неравенство

$$\overline{M_* a}(u) \leqslant Cr^{5-2/p}(r+u_+)^{-2}(r+u_-)^{-3}, \qquad u\in R^2. \quad (22)$$

Из (22) путем непосредственного подсчета выводим справедливость соотношений (15) при $p=1/2$ и (16) при $1/2<p\leqslant 1$. Детали опускаем. Лемма 1, а вместе с ней теорема 1 доказаны.

Следствие 1, касающееся сходимости почти всюду средних (1), получим стандартным путем из наличия слабой (или даже сильной)

(H_p, L_p)-оценки для $M_* f(x)$ при $1/2 \leqslant p \leqslant 1$, если учтем равномерную сходимость средних $M_\varepsilon f(x)$ к $f(x)$ при $\varepsilon \to 0$, когда $f(x)$ принадлежит классу $C_0^\infty(R^2)$ гладких финитных функций, и плотность множества $H_p(R^2) \cap C_0^\infty(R^2)$ в $H_p(R^2)$.

Положительное утверждение следствия 2 вытекает из неравенства (5) следующим образом. Пусть $f(x) \in H_p(R^2)$, $p > 1/2$; тогда согласно (5) имеем

$$\sup_{\varepsilon>0} \| M_\varepsilon f \|_{L_p(R^2)} \leqslant C_p \| f \|_{H_p(R^2)}.$$

Но это соотношение остается в силе также с заменой L_p-квазинормы H_p-квазинормой. В самом деле, использовав оригинальное определение классов $H_p(R^N)$ с помощью свойств семейств сопряженных гармонических функций (или эквивалентным образом с помощью преобразований Рисса для $f(x)$; см. [1] или [17]) и перестановочность M_ε и преобразований Рисса R_j, получим:

$$\sup_{\varepsilon>0} \| M_\varepsilon f \|_{H_p(R^2)} \leqslant C_p \sup_{\varepsilon>0} \{ \| M_\varepsilon f \|_{L_p(R^2)} + \| R_1 M_\varepsilon f \|_{L_p(R^2)} + \| R_2 M_\varepsilon f \|_{L_p(R^2)} \} \leqslant$$
$$\leqslant C_p \{ \| f \|_{H_p(R^2)} + \| R_1 f \|_{H_p(R^2)} + \| R_2 f \|_{H_p(R^2)} \} \leqslant C_p \| f \|_{H_p(R^2)}$$

для всех $f(x) \in C_0^\infty(R^2) \cap H_p(R^2)$, $1/2 < p \leqslant 1$. Для произвольных $f(x) \in H_p(R^2)$ путем предельного перехода устанавливается эта же оценка. Но отсюда непосредственно следует (7).

Для доказательства отрицательных утверждений положим

$$a_s(x) \equiv \bar{a}_s(u_1, u_2) = c_s \begin{cases} 0, & |u|_\infty \geqslant 1, \\ P_{s+1}(u_1), & |u|_\infty < 1, \end{cases} \tag{23}$$

где $P_{s+1}(t)$ — полином Лежандра порядка $s+1$ и $s \geqslant 0$. Ясно, что при подходящем выборе постоянной $c_s > 0$ функция $a_s(x)$ является (p, ∞, s)-атомом в R^2 с $x_0 = 0$, $r = 1$ и $p > \frac{2}{(s+3)}$. Согласно (18), (19) имеем

$$\overline{M_\varepsilon a_s}(u) = C_s \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon P_{s+1}(v_1) dv_1}{\varepsilon^2 + (u_1 - v_1)^2} \int_{-1}^{1} \frac{2\varepsilon dv_2}{\varepsilon^2 + (u_2 - v_2)^2} \equiv C_s A(u_1) B(u_2)$$

с некоторой постоянной $C_s \neq 0$. Но

$$B(u_2) = \arctan \frac{u_2 + 1}{\varepsilon} - \arctan \frac{u_2 - 1}{\varepsilon} \asymp \varepsilon u_2^{-2}, \qquad |u_2| \geqslant \max(\varepsilon, \sqrt{2})$$

(здесь $\asymp$ означает порядковое равенство). Для порядковой оценки $A(u_1)$ применяем формулу Родрига

$$P_{s+1}(t) = ((-2)^{s+1}(s+1)!)^{-1} \frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}} (1 - t^2)^{s+1}, \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1;$$

разложение

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (u_1 - t)^2} = \frac{\varepsilon}{(u_1 - t)^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\varepsilon}{u_1 - t} \right)^{2k}, \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$|u_1| \geqslant 2 \max(\varepsilon, \sqrt{2}),$$

и интегрирование по частям:

$$A(u_1) = \frac{1}{2^{s+1}(s+1)!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{s+1} \frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(u_1-t)^2} \right) dt \asymp$$

$$\asymp \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{s+1} \varepsilon (u_1-t)^{-s-3} dt \asymp u_1^{-s-3}, \qquad |u_1| \geqslant C_{\varepsilon,s}.$$

Итак, доказана

Лемма 2. *Для функций* $a_s(x)$, *определенных равенством* (23), *имеет место порядковое соотношение (с постоянными, зависящими от* s *и* ε):

$$\overline{M_\varepsilon a_s}(u) \asymp \varepsilon^2 u_1^{-s-3} u_2^{-2}, \qquad |u_1|, |u_2| \geqslant C_{\varepsilon,s}, \quad \varepsilon > 0, \quad s \geqslant 0. \tag{24}$$

Заметим также, что из (24) непосредственно следует, что

$$\operatorname{mes}\{x \in R^2 : |M_\varepsilon a_s(x)| > t\} \geqslant C_{\varepsilon,s} t^{-1/2}, \qquad 0 < t \leqslant t_{\varepsilon,s}. \tag{25}$$

В силу предложения 1(б) функция $a_s(x)$, являясь (p, ∞, s)-атомом, принадлежит $H_p(R^2)$ для всех $p > \frac{2}{(s+3)}$. Таким образом, выбрав натуральное число $s \geqslant 2$ достаточно большим, получим с помощью (24), (25) все утверждения о неусиляемости оценок теоремы 1 (леммы 1) и следствия 2 (см. (8)).

Замечание 1. Доказательство теоремы 2 проводится по этой же схеме. Основная техническая сложность состоит в точном вычислении асимптотики ядра $K_\varepsilon^\delta(x)$ средних (2) и его производных. Приведем без доказательства оценки, которые достаточны для получения теоремы 2. При $N=2$ ядро $\overline{K}_\varepsilon^\delta(u)$ можно писать в виде

$$\overline{K}_\varepsilon^\delta(u) = \overline{G}_\varepsilon^\delta(u) + \overline{H}_\varepsilon^\delta(u),$$

причем для $|u_1| \geqslant |u_2| \geqslant 0$ имеем

$$\begin{cases} |\overline{G}_\varepsilon^\delta(u)| \leqslant C_\delta \varepsilon^\delta (\varepsilon + |u_1|)^{-1} (\varepsilon + |u_1| - |u_2|)^{-1} (\varepsilon + |u_2|)^{-\delta}, \\ |D^3 \overline{G}_\varepsilon^\delta(u)| \leqslant C_\delta \varepsilon^{\delta-3} (\varepsilon + |u_1|)^{-1} (\varepsilon + |u_1| - |u_2|)^{-1} (\varepsilon + |u_2|)^{-\delta}, \end{cases} \quad \varepsilon, \delta > 0.$$

$$\begin{cases} |\overline{H}_\varepsilon^\delta(u)| \leqslant C_\delta \varepsilon^2 (\varepsilon + |u_1|)^{-2} (\varepsilon + |u_2|)^{-2}, \\ |D^3 \overline{H}_\varepsilon^\delta(u)| \leqslant C_\delta \varepsilon^2 (\varepsilon + |u_1|)^{-2} (\varepsilon + |u_2|)^{-5}. \end{cases}$$

Замечание 2. Имеют место все соотношения, аналогичные (4)—(7) и (9), (10), для случая суммирования средними Марцинкевича — Абеля и Марцинкевича — Рисса рядов Фурье от функций $f(x) \in H_p(T^2)$, $0 < p \leqslant 1$. Для этого следует использовать формулу суммирования Пуассона [18] и соответствующие атомарные представления для $H_p(T^2)$, что позволит получить оценки для случая T^2 из утверждений, сформулированных выше для непериодического случая R^2.

Обобщения для случая $N > 2$ нам представляются также реальными, однако при этом возникают определенные технические сложности в получении точных оценок для ядер и их производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fefferman C., Stein E. M. H^p spaces of several variables. — Acta math., 1972, 129, N 3—4, 137—193.

2. Calderon A. P., Torchinsky A. Parabolic maximal functions associated with a distribution. — Adv. Math., 1975, **16**, 1—64; 1977, **11**, N 24, 101—171.
3. Coifman R. R., Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. — Bull. Amer. Math. Soc., 1977, **83**, N 4, 569—645.
4. Taibleson M. H., Weiss G. The molecular characterization of certain Hardy spaces. — Roy. Soc. de France, Asterisque, 1980, **77**, 68—149.
5. Peetre J. H^p spaces. — In: Lecture notes. Lund, 1974.
6. Triebel H. Spaces of Besov—Hardy—Sobolev type. Teubner-Texte Math. Leipzig, 1978.
7. Marcienkiewicz J. Sur une methode remarquable de sommation des series doubles de Fourier. — Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1939, **8**, N 2, 149—160.
8. Жижиашвили Л. В. О суммировании двойных рядов Фурье. — Сиб. матем. ж., 1967, **8**, № 3, 548—564.
9. Taberski R. Abel summability of double Fourier series. — Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1970, **18**, N 6, 307—314.
10. Тиман М. Ф., Пономаренко В. Г. О приближении периодических функций двух переменных суммами типа Марцинкевича. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1975, **9**, 59—67.
11. Тригуб М. Р. Двусторонние оценки приближения функций средними Рисса и Марцинкевича. — Докл. АН СССР, 1980, **251**, № 1, 34—36.
12. Валашек Я. О приближении в многомерных пространствах Харди H^p, $0<p\leqslant 1$. — Сообщ. АН ГрузССР, 1982, **105**, № 1, 21—24.
13. Stein E. M., Taibleson M. H., Weiss G. Weak type estimates for maximal operators on certain H^p-classes. — Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2, 1981, **1**, 81—97.
14. Sjölin P. Convolution with oscillating kernels on H^p spaces. — J. London Math. Soc. Ser. 2, 1981, **23**, N 3, 442—454.
15. Coifman R. R. A real characterization of H^p. — Stud. math., 1974, **51**, N 3, 269—274.
16. Latter R. H. A characterization of H^p (R^n) in terms of atoms. — Stud. math., 1978, **62**, N 1, 93—101.
17. Miyachi A. On some Fourier multipliers for H^p (R^n). — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. **1A**, 1980, **27**, N 1, 157—179.
18. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.

Поступила в редакцию
14.06.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1983, № 6

УДК 517.5

П. Л. Ульянов

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Введение. В связи с исследованиями по теории рядов возникает следующая общая задача. Пусть дано некоторое свойство A, характеризующее поведение последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, и пусть на множестве F определена система функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$. Положим:

$$E=\left\{t:t\in F, 0=\sum_{m=1}^{\infty} a_m f_m(t)\right\},$$

то есть E является множеством всех точек, в которых ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m f_m(t), \qquad t\in F,$$

сходится к нулю. Каковы свойства множества E и их взаимосвязь с $\{a_m\}$ и $\{f_m\}$?