Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7, вып. 4. С. 412–423.

УДК 517.97 DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17402

ТРЁХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТИПА СИНЬОРИНИ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ ТЕЛ, КОНТАКТИРУЮЩИХ ОСТРЫМИ ГРАНЯМИ ЖЁСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Н. П. Лазарев, Е. Д. Федотов

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия
nyurgun@ngs.ru

Предлагается новый тип неклассических трёхмерных контактных задач, сформулированных над невыпуклыми допустимыми множествами. А именно, мы предполагаем, что композитное тело в недеформированном состоянии касается твёрдого препятствия клиновидной формы в единственной точке контакта. Исследуемые композитные тела состоят из упругой матрицы и жёсткого включения. В этом случае перемещения на множестве, соответствующем жёсткому включению, имеют заданную структуру, описывающую возможные параллельные переносы и повороты включения. Жёсткое включение расположено на внешней границе и имеет специальную геометрическую форму в виде конуса. Наличие жёсткого включения позволяет выписать новый тип условия непроникания для некоторых геометрических конфигураций препятствия и тела вблизи точки контакта. При этом множества допустимых перемещений могут быть невыпуклыми. Для случая тонкого жёсткого включения, описываемого конусом, формулируются задачи минимизации энергии. На основе анализа вспомогательных задач минимизации, сформулированных над выпуклыми множествами, доказана разрешимость исследуемых задач. При условии достаточной гладкости решения найдены эквивалентные дифференциальные постановки. Основным результатом настоящего исследования является обоснование нового типа математических моделей для контактных задач относительно трёхмерных композитных тел.

Ключевые слова: *контактная задача, жёсткое включение, невыпуклое множество, точечный контакт, условие непроникания.*

Введение

Направление исследований, связанное с контактными задачами для упругих тел с жёсткими или упругими препятствиями, представляет собой актуальную область прикладной математики, см., например, [1–10]. Обзор и широкий круг контактных задач можно найти в работах [11; 12]. Классические условия типа Синьорини предполагают достаточную регулярность участка границы тела. Эти условия имеют вид неравенств и описывают непроникание точек деформируемого тела за пределы границ неподвижного препятствия. Отметим работу [13], в которой впервые предложены и исследованы задачи со свободной границей для упругих тел с жёсткими включениями, контактирующими с недеформируемым препятствием.

В работах [14–16] обоснованием предельных переходов к бесконечности параметров жёсткости для семейств нелинейных задач, описывающих деформирование тел

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение N.075-02-2022-881, 02 февраля 2022 г.

с трещинами, установлены сходимости решений к соответствующим решениям контактных задач с условиями типа Синьорини. В этой связи задачи теории трещин с односторонними условиями непроникания между берегами (см., например, [17–26]) можно трактовать как некоторый класс контактных задач. Общность вариационного подхода позволяет изучать композитные тела с отслоившимися включениями, на части границы которых задаются условия непроникания типа неравенств [27–31].

В данной работе мы уделяем внимание вариационным задачам, описывающим точечный контакт композитных объектов, имеющих острые формы края. А именно, исследуются математические модели, описывающие равновесие упругих тел, содержащих жёсткое включение в виде внешнего конического клина. В отличие от работы [13], мы предлагаем класс нелинейных контактных задач, где условия непроникания могут быть записаны для одной точки, расположенной на поверхности жёсткого включения. Благодаря наличию жёстких включений условие непроникания можно переписать в виде системы из четырёх неравенств, где каждое неравенство описывает четыре возможных случая деформации твёрдого тела. В отличие от подхода работы [32], где рассматривались контактные задачи с условиями непроникания для единственной точки и задавались ограничения для параметров перемещений и вращений жёстких включений, в настоящей работе рассматривается трёхмерная задача, при этом на параметр угла поворота не накладываются ограничения.

Исходная контактная задача формулируется в виде задачи минимизации функционала энергии над невыпуклым и замкнутым множеством допустимых перемещений. Наряду с исходной задачей рассматриваются четыре вспомогательные задачи, описывающие контакт по одной из четырёх известных подповерхностей. Для исходной вариационной задачи доказано существование решения (не менее одного и не более четырёх). Заметим, что в четырёх вспомогательных задачах каждое множество допустимых перемещений выпукло и замкнуто, а функционал энергии является коэрцитивным, строго выпуклым и слабо полунепрерывным снизу на подходящем пространстве Соболева. Эти свойства позволяют установить существование и единственность решения каждой вспомогательной задачи минимизации на соответствующих допустимых множествах. Вопрос о единственности решения задачи минимизации одновременно на всех четырёх множествах остаётся открытым. Для вариационных задач получены эквивалентные дифференциальные формулировки, эквивалентные исходным постановкам.

1. Задача о контакте с клиновидным препятствием

Сформулируем контактную задачу для упругого тела, содержащего жёсткое включение на внешней границе. Такая модель может описывать композитные тела со специальными жёсткими покрытиями. Рассмотрим ограниченную односвязную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящую из двух поверхностей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\mathrm{meas}(\Gamma_1) > 0$. Предположим, что поверхность $\gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + x_2^2 = \alpha^2 x_3^2,\ x_3 \in [0,1]\}$, $0 < \alpha$, является частью Γ_2, так что $\gamma \subset \mathrm{int}(\Gamma_2)$ (рис. 1).

Будем считать, что тонкое жёсткое включение задаётся с помощью γ, а жёсткое препятствие — следующей поверхностью $O = \bigcup\limits_{i=1}^{4} O_i$, составленной из четырёх частей

$$O_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 = f_1(x_1, x_2)\},$$

$$O_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 = f_2(x_1, x_2)\},$$

$$O_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 = f_3(x_1, x_2)\},$$

$$O_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 = f_4(x_1, x_2)\},$$

где $f_i(0,0) = 0$, $i = 1,2,3,4$. При этом функции $f_i(x_1, x_2)$ являются непрерывными выпуклыми вверх функциями относительно оси Ox_3, совпадающими на координатных осях так, чтобы функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2), & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \\ f_2(x_1, x_2), & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0, \\ f_3(x_1, x_2), & x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0, \\ f_4(x_1, x_2), & x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

являлась непрерывной на плоскости и дифференцируемой в замыканиях каждого квадранта плоскости Ox_1x_2 и удовлетворяющей условиям $|\frac{\partial f(0,0)}{\partial \nu}| \leqslant \alpha$, $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial \nu} \leqslant 0$ для любой точки плоскости (относительно точек замыканий каждого квадранта).

Обозначим через $W = (w_1, w_2, w_3)$ вектор перемещений. Предположим, что тело, занимающее область Ω, закреплено на границе Γ_1, т. е.

$$W = (0,0,0) \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \tag{1}$$

Введём следующее пространство Соболева в соответствии с условием (1):

$$H^{1,0}_{\Gamma_1}(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1\}, \quad H(\Omega) = H^{1,0}_{\Gamma_1}(\Omega)^3.$$

Выпишем определяющие соотношения для трёхмерной теории упругости в рамках тензоров деформаций и напряжений

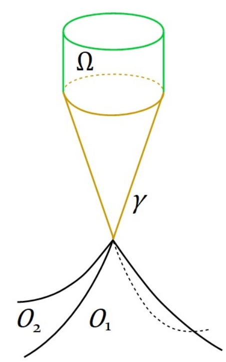

Рис. 1. Пример конфигурации в исходном состоянии

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad \sigma_{ij}(W) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i,j = 1,2,3, \tag{2}$$

где запятая в первой формуле (2) обозначает соответствующую производную, по повторяющимся индексам ведётся суммирование (соглашение Эйнштейна). Тензор коэффициентов упругости задаётся элементами c_{ijkl}, которые предполагаются симметричными и положительно определёнными:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i,j,k,l = 1,2,3,$$

$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geqslant c_0|\xi|^2, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i,j = 1,2,3, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Чтобы привести вариационную формулировку, описывающую состояние равновесия тела с жёстким тонким включением γ на границе, введём функционал энергии

$$\Pi(W) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) - \int\limits_\Omega FW,$$

где вектор $F = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega)^3$ описывает внешние силы, действующие на тело, $FW = f_iw_i$. Коэрцитивность функционала $\Pi(W)$ обеспечивается известным неравенством Корна:

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) \geqslant c\|W\|^2_{H(\Omega)}, \quad W \in H(\Omega),$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от W.

Пространство инфинитезимальных жёстких перемещений $R(Z)$ состоит из аффинных функций и задаёт линейную структуру перемещений на некотором подмножестве $Z \subset \overline{\Omega}$ точек композитного тела [33]:

$$R(Z) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \,|\, \rho(x) = Bx^t + C;\ x \in Z\},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c_1, c_2, c_3), \quad x^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_1, c_2, c_3 — некоторые вещественные числа. В частности, для кривой γ мы имеем пространство $R(\gamma)$.

В рамках линейной теории упругости, рассуждая для бесконечно малых перемещений, выпишем условие непроникания для перемещений композитного тела относительно препятствия O. С учётом заданной структуры перемещений точек жёсткого включения γ мы можем записать данное условие в виде системы следующих неравенств:

$$\begin{cases} c_3 \geqslant f_1(c_1, c_2,), & \text{если} \quad c_1 \geqslant 0, c_2 \geqslant 0, \\ c_3 \geqslant f_2(c_1, c_2,), & \text{если} \quad c_1 \geqslant 0, c_2 \leqslant 0, \\ c_3 \geqslant f_3(c_1, c_2,), & \text{если} \quad c_1 \leqslant 0, c_2 \leqslant 0, \\ c_3 \geqslant f_4(c_1, c_2,), & \text{если} \quad c_1 \leqslant 0, c_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

В соответствии с этими ограничениями рассмотрим следующие множества допустимых перемещений:

$$K_1 = \{W \in H(\Omega) \,:\, W|_\gamma = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant f_1(c_1, c_2,),\ c_1 \geqslant 0, c_2 \geqslant 0\,\},$$

$$K_2 = \{W \in H(\Omega) \,:\, W|_\gamma = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant f_2(c_1, c_2,),\ c_1 \geqslant 0, c_2 \leqslant 0\,\},$$

$$K_3 = \{W \in H(\Omega) \,:\, W|_\gamma = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant f_3(c_1, c_2,),\ c_1 \leqslant 0, c_2 \leqslant 0\},$$

$$K_4 = \{W \in H(\Omega) \,:\, W|_\gamma = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant f_3(c_1, c_2,),\ c_1 \leqslant 0, c_2 \geqslant 0\}.$$

Обозначим $K_s = \bigcup\limits_{i=1}^{4} K_i$.

Рассмотрим задачу минимизации:

$$\text{найти } U \in K_s,\ \text{такое, что } \Pi(U) = \inf_{W \in K_s} \Pi(W). \tag{3}$$

Очевидно, в силу свойств функций f_i, $i = 1, 2, 3, 4$, каждое из множеств K_i, $i = 1, 2, 3, 4$, выпукло и замкнуто [33]. В то же время можно заметить, что объединение K_s замкнуто, но не выпукло. Невыпуклость множества нетрудно установить, следуя примеру для двумерных множеств [32].

Теорема 1. *Существует не менее одного и не более четырёх решений U вариационной задачи* (3) *над невыпуклым множеством K_s.*

Доказательство. Наряду с исходной задачей (3) рассмотрим следующие четыре вспомогательные задачи:

$$\text{найти } U_i \in K_i,\ \text{такое, что } \Pi(U_i) = \inf_{W \in K_i} \Pi(W),\ i = 1, 2, 3, 4. \tag{4}$$

Коэрцитивность и слабая полунепрерывность снизу $\Pi(W)$ на гильбертовом пространстве $H(\Omega)$ гарантирует, что $\Pi(W)$ достигает своих минимумов над K_i, $i = 1,2,3,4$, при некоторых функциях $U_1 \in K_1$, $U_2 \in K_2$, $U_3 \in K_3$, $U_4 \in K_4$ соответственно. Кроме того, ввиду строгой выпуклости функционала энергии для каждого фиксированного $i \in \{1,2,3,4\}$ соответствующая вспомогательная задача (4) имеет единственное решение U_i, $i = 1,2,3,4$. Искомую функцию U можно найти как функцию, обеспечивающую минимум по четырём оптимальным значениям, т. е.

$$\Pi(U) = \min\{\Pi(U_1), \Pi(U_2), \Pi(U_3), \Pi(U_4)\},$$

где U_i — решения (4) для $i = 1,2,3,4$. □

Выберем, не нарушая общности, задачу минимизации для множества K_1. Установим свойства его решения U_1 при условии, что оно обладает дополнительной гладкостью. Для начала заметим, что задача (4) минимизации функционала энергии над множеством K_1 эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$U_1 \in K_1, \quad \int\limits_\Omega \sigma_{ij}(U_1)\varepsilon_{ij}(W - U_1) \geqslant \int\limits_\Omega F(W - U_1) \quad \forall\, W \in K_1. \tag{5}$$

Подставив тестовые функции вида $W = U_1 + \phi$, $W = U_1 - \phi$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)^3$, получим равенство

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(U_1)\varepsilon_{ij}(\phi) = \int\limits_\Omega F\phi \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)^3,$$

которое означает, что имеют место в смысле распределений следующие равенства — уравнения равновесия:

$$-\sigma_{ij,j}(U_1) = F_i \quad \text{в} \quad \Omega, \quad i = 1,2,3. \tag{6}$$

Предположим далее, что решение U_1 достаточно гладкое, и получим некоторые соотношения, характеризующие решение. При этом будем применять следующую формулу Грина, справедливую для достаточно гладких функций V и $\overline{V} \in H(\Omega)$ [34]:

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(V)\varepsilon_{ij}(\overline{V}) = -\int\limits_\Omega \sigma_{ij,j}(V)\overline{v}_i + \int\limits_\Gamma (\sigma_\nu(V)\overline{V}\nu + \sigma_\tau(V)\overline{V}_\tau), \tag{7}$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор нормали к Γ,

$$\sigma_\nu(V) = \sigma_{ij}(V)\nu_i\nu_j, \quad \overline{V}\nu = \overline{v}_i\nu_i,$$

$$\sigma_\tau(V) = (\sigma_\tau^1(V), \sigma_\tau^2(V), \sigma_\tau^3(V)) = (\sigma_{1j}(V)\nu_j, \sigma_{2j}(V)\nu_j, \sigma_{3j}(V)\nu_j) - \sigma_\nu(V)\nu,$$
$$\overline{V}_\tau = (\overline{V}_{\tau 1}, \overline{V}_{\tau 2}, \overline{V}_{\tau 3}), \quad \overline{V}_{\tau i} = \overline{v}_i - (\overline{V}\nu)\nu_i, \quad i = 1,2,3.$$

С помощью формулы Грина (7) и уравнений равновесия (6) мы можем переписать соответствующее вариационное неравенство (5) в следующем виде:

$$\int\limits_{\Gamma_2} \Big(\sigma_\nu(U_1)(W - U_1)\nu + \sigma_\tau(U_1)(W_\tau - U_{1\tau})\Big) \geqslant 0 \quad \forall W \in K_1. \tag{8}$$

Затем, подставляя в (8) функции $W = U_1 + \tilde{W}$, где $\tilde{W} \in H(\Omega)$ и $\tilde{W} = U_1$ на γ, и применяя (7), получаем

$$\int\limits_{\Gamma_2 \setminus \gamma} (\sigma_\nu(U_1)\tilde{W}\nu + \sigma_\tau(U_1)\tilde{W}_\tau) \geqslant 0. \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$\sigma_\tau(U_1) = 0, \quad \sigma_\nu(U_1) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \setminus \gamma.$$

Следовательно, имеет место следующее неравенство, представляющее собой по аналогии с [18] соотношение принципа виртуальных перемещений:

$$\int\limits_\gamma \Big(\sigma_\nu(U_1)(W-\rho^1)\nu + \sigma_\tau(U_1)(W_\tau - \rho^1_\tau)\Big) \geqslant 0 \quad \forall W \in K_1, \quad \rho^1 = U_1 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Отметим, что в том случае, когда множество K_1 представляет собой выпуклый конус (т. е. если из $v \in K_1$ следует, что $\beta v \in K_1$ для всех $\beta \geqslant 0$), из (8) можно получить равенство

$$\int\limits_\gamma (\sigma_\nu(U_1)\rho^1\nu + \sigma_\tau(U_1)\rho^1_\tau) = 0$$

последовательной подстановкой $W = 2U_1$, $W = 0$. Множество K_1 будет конусом, например, в том частном случае, когда поверхность O_1 является частью плоскости, в этом случае $f_1 = l_1x_1 + l_2x_2$, $l_i \leqslant 0$, $|l_i| \leqslant \alpha$, $i = 1, 2$.

Замечание 1. Характер рассуждений в доказательстве приведённой выше теоремы и позволяет утверждать, что вместо разбиения плоскости на четыре сектора можно рассмотреть, вообще говоря, любое конечное разбиение плоскости осями, проходящими через начало координат.

2. Задача о точечном контакте с выпуклым препятствием

Рассмотрим теперь случай, когда препятствие задаётся поверхностью без клиновидного выступа. Предположим также, что поверхность O_c задана выпуклой вверх функцией f_c, заданной на плоскости Ox_1x_2. Пусть функция f_c удовлетворяет свойствам $f_c(0,0) = 0$,

$$f_c(x_1, x_2) < \frac{1}{\alpha}\sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

для всех (x_1, x_2), таких, что $0 < x_1^2 + x_2^2 \leqslant \alpha^2$. Композитное тело, упругая часть, жёсткое включение задаются прежними множествами из предыдущего параграфа (рис. 2). Кроме того, условие закрепления также задаётся на части внешней границы Γ_1.

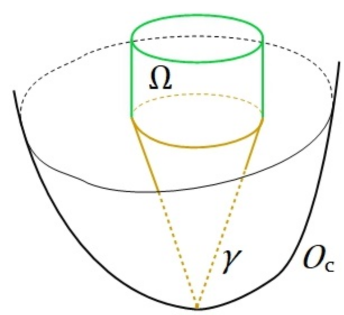

Рис. 2. Пример конфигурации в исходном состоянии

В этом случае рассмотрим следующее множество допустимых перемещений:

$$K_c = \{ W \in H(\Omega) \,:\, W|_\gamma = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant f_c(c_1, c_2) \}.$$

Очевидно, что это множество выпукло и замкнуто. Ввиду отмеченных свойств функционала энергии задача минимизации

$$\text{найти } U_c \in K_c \text{ такое, что } \Pi(U) = \inf_{W \in K_c} \Pi(W)$$

имеет единственное решение U_c [33]. Действуя по аналогии с рассуждениями, приведёнными выше, можно получить при условии достаточной гладкости решения следующую эквивалентную постановку задачи:

$$-\sigma_{ij,j}(U_c) = F_i \quad \text{в} \quad \Omega, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_\tau(U_c) = 0, \quad \sigma_\nu(U_c) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \setminus \gamma,$$

$$\int\limits_\gamma \Big(\sigma_\nu(U_c)(W - \rho^c)\nu + \sigma_\tau(U_c)(W_\tau - \rho^c_\tau) \Big) \geqslant 0 \quad \forall W \in K_c, \quad \rho^c = U_c \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Список литературы

1. **Fichera G.** Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints. Handbook der Physik, Band 6a/2. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1972.
2. **Kinderlehrer D.** Remarks about Signorini's problem in linear elasticity // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. 1981. Vol. 8, no. 4. P. 605–645.
3. **Bermúdez A., Saguez C.** Optimal control of a Signorini problem // SIAM Journal on Control and Optimization. 1987. Vol. 25, no. 3. P. 576–582.
4. **Schumann R.** Regularity for Signorini's problem in linear elasticity // Manuscripta Mathematica. 1989. Vol. 63. P. 255–291.
5. **Kovtunenko V. A.** Primal-dual sensitivity analysis of active sets for mixed boundary-value contact problems // Journal of Engineering Mathematics. 2006. Vol. 55. P. 151–166.
6. **Rudoi E. M., Khludnev A. M.** Unilateral contact of a plate with a thin elastic obstacle // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2010. Vol. 4, no. 3. P. 389–398.
7. **Hintermuller M., Kovtunenko V. A., Kunisch K.** Obstacle problems with cohesion: A hemivariational inequality approach and its efficient numerical solution // SIAM Journal on Optimization. 2011. Vol. 21, no. 2. P. 491–516.
8. **Rademacher A., Rosin K.** Adaptive optimal control of Signorini's problem // Computational Optimization and Applications. 2018. Vol. 70. P. 531–569.
9. **De Benito Delgado M., Diaz J. I.** Some remarks on the coincidence set for the Signorini problem // Opuscula Mathematica. 2019. Vol. 39, no. 2. P. 145–157.
10. **Pyatkina E. V.** A contact of two elastic plates connected along a thin rigid inclusion // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 1797–1815.
11. **Kikuchi N.** Contact Problems in Elasticity: Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Philadelphia : SIAM, 1988.
12. **Andersson L.-E., Klarbring A.** A review of the theory of elastic and quasistatic contact problems in elasticity // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. 2001. Vol. 359. P. 2519–2539.
13. **Khludnev A.** Contact problems for elastic bodies with rigid inclusions // Quarterly of Applied Mathematics. 2012. Vol. 70, no. 2. P. 269–284.
14. **Stepanov V. D., Khludnev A. M.** The fictitious domain method as applied to the Signorini problem // Doklady Mathematics. 2003. Vol. 68, no. 2. P. 163–166.
15. **Lazarev N. P., Itou H., Neustroeva N. V.** Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 2016. Vol. 33, no. 1. P. 63–80.
16. **Lazarev N. P., Everstov V. V., Romanova N. A.** Fictitious domain method for equilibrium problems of the Kirchhoff — Love plates with nonpenetration conditions for known configurations of plate edges // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2019. Vol. 12, no. 6. P. 674–686.
17. **Knees D., Schroder A.** Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2012. Vol. 35. P. 1859–1884.
18. **Khludnev A. M.** Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies // Archive of Applied Mechanics. 2013. Vol. 83. P. 1493–1509.

19. **Rudoy E. M., Shcherbakov V. V.** Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2016. Vol. 13. P. 395–410.
20. **Itou H., Kovtunenko V. A., Rajagopal K. R.** Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. Vol. 22, no. 6. P. 1334–1346.
21. **Itou H., Kovtunenko V. A., Rajagopal K. R.** Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress // International Journal of Engineering Science. 2019. Vol. 136. P. 17–25.
22. **Furtsev A., Itou H., Rudoy E.** Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 182–183. P. 100–111.
23. **Lazarev N. P., Semenova G. M.** Equilibrium problem for a Timoshenko plate with a geometrically nonlinear condition of nonpenetration for a vertical crack // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2020. Vol. 14, no. 3. P. 532–540.
24. **Khludnev A.** T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021. Vol. 393. P. 113540.
25. **Khludnev A., Fankina I.** Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2021. Vol. 72, no. 3. P. 121.
26. **Rudoy E. M., Itou H., Lazarev N. P.** Asymptotic justification of the models of thin inclusions in an elastic body in the antiplane shear problem // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021. Vol. 15. P. 129–140.
27. **Itou H., Khludnev A. M.** On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2016. Vol. 39, no. 17. P. 4980–4993.
28. **Khludnev A., Popova T.** Equilibrium problem for elastic body with delaminated T-shape inclusion // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. Vol. 376. P. 112870.
29. **Khludnev A. M., Popova T. S.** On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2020. Vol. 100, no. 8. P. e202000063.
30. **Lazarev N. P., Semenova G. M., Romanova N. A.** On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff — Love plate with a crack // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2021. Vol. 14, no. 1. P. 28–41.
31. **Rudoy E., Shcherbakov V.** First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks // Applied Mathematics and Optimization. 2021. Vol. 84. P. 2775–2802.
32. **Lazarev N. P., Kovtunenko V. A.** Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 2. P. 250.
33. **Khludnev A. M.** Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions // European Journal of Mechanics. A. Solids. 2010. Vol. 29, no. 3. P. 392–399.
34. **Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.** Analysis of Cracks in Solids. Southampton, Boston : WIT-Press, 2000.

Поступила в редакцию 24.08.2022.
После переработки 14.10.2022.

Сведения об авторах

Лазарев Нюргун Петрович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Якутское отделение Регионального научно-образовательного центра «Дальневосточный центр математических исследований», Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, Якутск, Россия; e-mail: nyurgun@ngs.ru.

Федотов Егор Дмитриевич, младший научный сотрудник, Якутское отделение Регионального научно-образовательного центра «Дальневосточный центр математических исследований», Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, Якутск, Россия; e-mail: egorfedotov2011@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2022. Vol. 7, iss. 4. P. 412–423.

DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17402

THREE-DIMENSIONAL SIGNORINI-TYPE PROBLEM FOR COMPOSITE BODIES CONTACTING WITH SHARP EDGES OF RIGID INCLUSIONS

N.P. Lazarev, E.D. Fedotov

North Eastern Federal University named after M.K. Ammosov, Yakutsk, Russia
nyurgun@ngs.ru

A new type of non-classical three-dimensional contact problems formulated over non-convex admissible sets is proposed. Namely, we assume that a composite body in its undeformed state touches a wedge-shaped obstacle at a single point of contact. Investigated composite bodies consist of an elastic matrix and a rigid inclusion. In this case, displacements on a set corresponding to a rigid inclusion have a given structure that describes possible parallel translations and rotations of the inclusion. A rigid inclusion is located on the outer boundary of the body and has a special geometric shape in the form of a cone. A presence of a rigid inclusion makes it possible to write out a new type of a non-penetration condition for some geometrical configurations of an obstacle and a composite body near the contact point. In this case, sets of admissible displacements can be nonconvex. For the case of a thin rigid inclusion described by a cone, energy minimization problems are formulated. Based on the analysis of auxiliary minimization problems formulated over convex sets, the solvability of problems under study is proved. Under the assumption of a sufficient smoothness of the solution, equivalent differential statements are found. The most important result of this research is the justification of a new type of mathematical models for contact problems with respect to three-dimensional composite bodies.

Keywords: *contact problem, rigid inclusion, non-convex set, pointwise contact, non-penetration condition.*

References

1. **Fichera G.** Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints. In: *Handbook der Physik*, Band 6a/2. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1972.
2. **Kinderlehrer D.** Remarks about Signorini's problem in linear elasticity. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 1981, vol. 8, no. 4, pp. 605–645.
3. **Bermúdez A., Saguez C.** Optimal control of a Signorini problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1987, vol. 25, no. 3, pp. 576–582.
4. **Schumann R.** Regularity for Signorini's problem in linear elasticity. *Manuscripta Mathematica*, 1989, vol. 63, pp. 255–291.
5. **Kovtunenko V.A.** Primal-dual sensitivity analysis of active sets for mixed boundary-value contact problems. *Journal of Engineering Mathematics*, 2006, vol. 55, pp. 151–166.
6. **Rudoi E.M., Khludnev A.M.** Unilateral contact of a plate with a thin elastic obstacle. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2010, vol. 4, no. 3, pp. 389–398.
7. **Hintermuller M., Kovtunenko V.A., Kunisch K.** Obstacle problems with cohesion: A hemivariational inequality approach and its efficient numerical solution. *SIAM Journal on Optimization*, 2011, vol. 21, no. 2, pp. 491–516.

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement N.075-02-2022-881, February 02, 2022.

8. **Rademacher A., Rosin K.** Adaptive optimal control of Signorini's problem. *Computational Optimization and Applications*, 2018, vol. 70, pp. 531–569.
9. **De Benito Delgado M., Diaz J.I.** Some remarks on the coincidence set for the Signorini problem. *Opuscula Mathematica*, 2019, vol. 39, no. 2, pp. 145–157.
10. **Pyatkina E.V.** A contact of two elastic plates connected along a thin rigid inclusion. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2020, vol. 17, pp. 1797–1815.
11. **Kikuchi N.** *Contact Problems in Elasticity: Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Philadelphia, SIAM, 1988.
12. **Andersson L.-E., Klarbring A.** A review of the theory of elastic and quasistatic contact problems in elasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A*, 2001, vol. 359, pp. 2519–2539.
13. **Khludnev A.** Contact problems for elastic bodies with rigid inclusions. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2012, vol. 70, no. 2, pp. 269–284.
14. **Stepanov V.D., Khludnev A.M.** The fictitious domain method as applied to the Signorini problem. *Doklady Mathematics*, 2003, vol. 68, no. 2, pp. 163–166.
15. **Lazarev N.P., Itou H., Neustroeva N.V.** Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2016, vol. 33, no. 1, pp. 63–80.
16. **Lazarev N.P., Everstov V.V., Romanova N.A.** Fictitious domain method for equilibrium problems of the Kirchhoff — Love plates with nonpenetration conditions for known configurations of plate edges. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2019, vol. 12, no. 6, pp. 674–686.
17. **Knees D., Schroder A.** Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2012, vol. 35, pp. 1859–1884.
18. **Khludnev A.M.** Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies. *Archive of Applied Mechanics*, 2013, vol. 83, pp. 1493–1509.
19. **Rudoy E.M., Shcherbakov V.V.** Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2016, vol. 13, pp. 395–410.
20. **Itou H., Kovtunenko V.A., Rajagopal K.R.** Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1334–1346.
21. **Itou H., Kovtunenko V.A., Rajagopal K.R.** Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress. *International Journal of Engineering Science*, 2019, vol. 136, pp. 17–25.
22. **Furtsev A., Itou H., Rudoy E.** Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 182–183, pp. 100–111.
23. **Lazarev N.P., Semenova G.M.** Equilibrium problem for a Timoshenko plate with a geometrically nonlinear condition of nonpenetration for a vertical crack. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2020, vol. 14, no. 3, pp. 532–540.
24. **Khludnev A.** T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2021, vol. 393, pp. 113540.
25. **Khludnev A., Fankina I.** Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2021, vol. 72, no. 3, p. 121.
26. **Rudoy E.M., Itou H., Lazarev N.P.** Asymptotic justification of the models of thin inclusions in an elastic body in the antiplane shear problem. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2021, vol. 15, pp. 129–140.
27. **Itou H., Khludnev A.M.** On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, vol. 39, no. 17, pp. 4980–4993.

28. **Khludnev A., Popova T.** Equilibrium problem for elastic body with delaminated T-shape inclusion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, vol. 376, P. 112870.
29. **Khludnev A.M., Popova T.S.** On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, vol. 100, no. 8, p. e202000063.
30. **Lazarev N.P., Semenova G.M., Romanova N.A.** On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff — Love plate with a crack. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 28–41.
31. **Rudoy E., Shcherbakov V.** First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks. *Applied Mathematics and Optimization*, 2021, vol. 84, pp. 2775–2802.
32. **Lazarev N.P., Kovtunenko V.A.** Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 2, p. 250.
33. **Khludnev A.M.** Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions. *European Journal of Mechanics. A. Solids*, 2010, vol. 29, no. 3, pp. 392–399.
34. **Khludnev A.M., Kovtunenko V.A.** *Analysis of Cracks in Solids.* Southampton, Boston, WIT-Press, 2000.

Article received 24.08.2022.
Corrections received 14.10.2022.