



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Кондауров, Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями, *Прикл. мех. техн. физ.*, 1982, том 23, выпуск 4, 133–139

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

17 марта 2025 г., 07:09:14



ОБ УРАВНЕНИЯХ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

В. И. Кондауров
(Москва)

Рассматриваются нестационарные уравнения теории течения конечно-деформированных упруговязкопластических материалов. Анализируются два подхода к кинематике таких сред. Изучаются ограничения, налагаемые на определяющие уравнения неравенством энтропии и требованиями инвариантности относительно ортогональных преобразований актуальной, разгруженной и начальной конфигураций. Полная система уравнений записывается в дивергентной форме, что позволяет получить все допустимые соотношения на сильных разрывах. В адиабатическом приближении система уравнений приводится к симметричному виду, формулируются достаточные условия гиперболичности.

1. Кинематика. Пусть ξ — радиус-вектор частицы среды в начальной конфигурации тела, x — в актуальной, текущей конфигурации. Начальную конфигурацию будем считать естественной конфигурацией [1, 2] с постоянной температурой $\Theta = \Theta_0$ и плотностью $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Обозначим через $\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j$ векторы базиса начальной и сопутствующей лагранжевой системы координат [1] и ∂_k — базис пространственной декартовой системы координат, такие, что

$$(1.1) \quad d\xi = d\xi^i \hat{\partial}_i, \quad dx = dx^k \partial_k = d\xi^j \hat{\partial}_j.$$

Будем предполагать, что отображение (деформация) начальной конфигурации в актуальную

$$(1.2) \quad x = x(\xi, t),$$

где t — время, является взаимно-однозначным и непрерывно дифференцируемым нужное число раз. При фиксированном t из (1.2) следует

$$(1.3) \quad dx = F \cdot d\xi = (\hat{\partial}_a F^a_b \hat{\partial}^b) \cdot (\hat{\partial}_j d\xi^j) = \hat{\partial}_a F^a_j d\xi^j,$$

где F — тензор градиента полной деформации. Сравнивая (1.1) и (1.3), видим, что

$$(1.4) \quad \hat{\partial}_j = \hat{\partial}_i F^i_j,$$

т. е. матрица F^i_j представляет собой линейное преобразование как $d\xi$ в dx , так и базиса $\hat{\partial}_i$ в базис $\hat{\partial}_j$.

Используя определение вектора скорости $v = \partial x(\xi, t) / \partial t|_{\xi}$ и соотношение (1.4), получим

$$dv = \nabla v \cdot dx = d\xi^i \frac{\partial \hat{\partial}_i}{\partial t} \Big|_{\xi^m} = d\xi^i \frac{\partial F^k_j}{\partial t} \Big|_{\xi^m} \hat{\partial}_k = \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{\xi} \cdot d\xi,$$

откуда в силу произвольности dx следует кинематическое соотношение [1, 2]

$$(1.5) \quad \dot{F}F^{-1} = \nabla v, \quad \dot{F}^i_j = F^k_j \partial v^i / \partial x^k.$$

Точка здесь и далее обозначает дифференцирование по t при $\xi = \text{const}$. Как показано в [3], соотношение (1.5), являющееся условием совместности полей деформаций и скоростей, может быть приведено к дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\Delta} F^i_j \right) \Big|_{x^m} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \frac{1}{\Delta} (v^k F^i_j - v^i F^k_j) \right\} = \hat{\nu}, \quad \hat{\Delta} = \det \| F^i_j \|$$

или с учетом закона сохранения массы $\rho \Delta = \rho_0$ для тел с кусочно-постоянной плотностью в начальной конфигурации к форме:

$$(1.6) \quad \frac{\partial (\rho F^i_j)}{\partial t} \Big|_{x^m} + \frac{\partial}{\partial x^k} \{ \rho v^k F^i_j - \rho v^i F^k_j \} = 0.$$

Введем теперь, кроме начальной и актуальной конфигураций тела, еще и разгруженную промежуточную конфигурацию [1] с температурой $\Theta = \Theta_0$. Обозначим радиус-вектор частицы в разгруженном состоянии $y = y(\xi, t)$ и предположим, как это делается в большинстве современных работ по конечным деформациям упругопласти-

ческой среды (см., например, обзор [4]), что дифференциалы dx , dy и $d\xi$ при $t = \text{const}$ связаны между собой соотношениями

$$(1.7) \quad dx = F \cdot d\xi, \quad dy = P \cdot d\xi, \quad dx = E \cdot dy.$$

Из (1.7) следует

$$(1.8) \quad F = E \cdot P,$$

где E — градиент упругой деформации, исчезающий после снятия напряжений с поверхности бесконечно малого объема; P — градиент пластической, остаточной деформации, $\det P > 0$, $\det E > 0$, $EP \neq PE$.

Пусть теперь \hat{e}_i^* — базис лагранжевой системы координат в пространстве разгруженной конфигурации, такой, что

$$(1.9) \quad dy = d\xi^i \hat{e}_i^*.$$

Здесь и далее звездочкой помечены величины, относящиеся к состоянию разгрузки.

Покажем, что в отличие от матрицы F , которая является матрицей преобразования как $d\xi$ в dx , так и \hat{e}_i^* в \hat{e}_j , матрица упругого градиента E уже не является матрицей преобразования базиса \hat{e}_i^* разгруженной конфигурации в базис \hat{e}_j актуальной конфигурации. Определим матрицы \mathcal{P}_a^b и \mathcal{E}_i^j следующим образом:

$$(1.10) \quad \hat{e}_i^* = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{P}_a^i, \quad \hat{e}_j = \frac{\partial}{\partial b} \mathcal{E}_j^b, \quad \hat{e}_i^* \mathcal{E}_j^i = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{P}_a^i \mathcal{E}_j^i = \frac{\partial}{\partial a} F_j^a.$$

Из (1.10) следует

$$(1.11) \quad F = \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \quad F_j^i = \mathcal{P}_a^i \mathcal{E}_j^a.$$

Подставляя (1.10) в (1.9), получим

$$dy = \hat{e}_i^* d\xi^i = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{P}_a^i d\xi^i = \left(\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{P}_a^i \frac{\partial}{\partial b} \right) (\hat{e}_i^* d\xi^i) = \vec{\mathcal{P}} \cdot d\xi.$$

С другой стороны, $dy = P \cdot d\xi$, и, следовательно, $\vec{\mathcal{P}} = P$. Сравнивая композиции (1.8) и (1.11), находим с учетом $\vec{\mathcal{P}} = P$ $E = \vec{\mathcal{E}} \vec{\mathcal{P}}^{-1}$, $\vec{\mathcal{E}} = P^{-1}EP$, откуда видно, что E не является в общем случае матрицей преобразования базисных векторов \hat{e}_i^* в \hat{e}_j .

Аналогичный результат получается, если исходить из представлений [5]:

$$dx = F \cdot d\xi, \quad dy = E \cdot d\xi, \quad dx = P \cdot dy, \quad F = P \cdot E, \\ \hat{e}_i^* = \frac{\partial}{\partial a} F_j^a, \quad \hat{e}_j = \frac{\partial}{\partial b} \mathcal{E}_j^b, \quad \hat{e}_i^* = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{P}_a^i, \quad F = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{P}}.$$

В этом случае $\vec{\mathcal{E}} = E$, $P = \vec{\mathcal{E}} \vec{\mathcal{P}}^{-1}$, $\vec{\mathcal{P}} = E^{-1}PE$.

Как видно из приведенных рассуждений, в случае упругопластических тел необходимо различать, что именно предполагается мерой упругих и пластических деформаций: преобразования дифференциалов радиусов-векторов при переходе от одной конфигурации к другой или преобразования базисных реперов. В случае нелинейно-упругих материалов эти преобразования тождественно совпадают.

Рассмотрим теперь, как преобразуются тензоры F и P при ортогональных преобразованиях конфигураций. Обозначим тильдой значения величин после смены системы отсчета или, что то же самое, после наложения на актуальную конфигурацию переноса и вращения как жесткого целого при фиксированной начальной и разгруженной конфигурации. Из формул (1.7) и соотношения, определяющего смену системы отсчета [2],

$$(1.12) \quad \tilde{x} = z(t) + Q(t)(x - z_0),$$

где $z(t) - z_0$ — вектор переноса; z_0 — радиус-вектор точки, относительно которой происходит вращение, определяемое ортогональным тензором $Q(t)$, следует

$$(1.13) \quad \tilde{F} = Q \cdot F, \quad \tilde{P} = P.$$

Пусть $Y = Y(t)$ — тензор преобразования, не меняющего метрику разгруженной конфигурации. Тогда

$$(1.14) \quad \bar{F} = F, \quad \bar{P} = Y \cdot P,$$

где черта обозначает значение величины после преобразования $Y(t)$ при фиксированной актуальной и начальной конфигурации.

Пусть, наконец, $K = \text{const}$ — ортогональный тензор преобразования начальной конфигурации. При фиксированной актуальной и разгруженной конфигурации имеем

$$(1.15) \quad \bar{F} = F \cdot K, \quad \bar{P} = P \cdot K,$$

где двойная черта означает величину после указанного преобразования.

Рассмотрим полярные разложения

$$(1.16) \quad \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{M}\mathbf{H},$$

где \mathbf{R} и \mathbf{H} — ортогональные тензоры; \mathbf{U} , \mathbf{V} и \mathbf{W} , \mathbf{M} — симметричные положительно определенные тензоры. Используя теорему о единственности полярного разложения, из (1.13)—(1.16) получим

$$(1.17) \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}, \quad \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M};$$

$$(1.18) \quad \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}, \quad \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}, \quad \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{Y}\mathbf{H}, \quad \bar{\mathbf{W}} = \mathbf{W}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{Y}\mathbf{M}\mathbf{Y}^T;$$

$$(1.19) \quad \bar{\bar{\mathbf{R}}} = \mathbf{R}\mathbf{K}, \quad \bar{\bar{\mathbf{U}}} = \mathbf{K}^T\mathbf{U}\mathbf{K}, \quad \bar{\bar{\mathbf{V}}} = \mathbf{V}, \quad \bar{\bar{\mathbf{H}}} = \mathbf{H}\mathbf{K}, \quad \bar{\bar{\mathbf{W}}} = \mathbf{K}^T\mathbf{W}\mathbf{K}, \quad \bar{\bar{\mathbf{M}}} = \mathbf{M}.$$

2. Определяющие уравнения. Рассмотрим определяющие соотношения дифференциального типа для безмоментных однородных изотропных упругопластических сред, чувствительных к скорости деформирования. Такие уравнения являются достаточно хорошим приближением для описания основных эффектов, наблюдаемых при упругопластической деформации материалов, и автоматически удовлетворяют принципам детерминизма и локального действия [1, 2]. Далее изучим ограничения, которые налагаются на определяющие уравнения требованиями инвариантности, и ограничения, обусловленные неравенством энтропии.

Термодинамическое состояние частицы будем считать полностью определенным, если заданы внешние переменные: тензор \mathbf{F} , температура $\Theta > 0$ и градиент температуры $\mathbf{g} = \nabla\Theta$, а также внутренние переменные, характеризующие изменение внутренней структуры материала при пластической деформации: тензор \mathbf{P} и параметр упрочнения χ . Обозначим для удобства $\pi_\alpha = \{\mathbf{F}, \mathbf{P}, \Theta, \chi, \mathbf{g}\}$ и постулируем определяющие уравнения в наиболее простом, функциональном виде

$$(2.1) \quad A = A(\pi_\alpha), \quad \sigma = \Sigma(\pi_\alpha), \quad \eta = \eta(\pi_\alpha), \quad \mathbf{q} = \mathbf{S}(\pi_\alpha);$$

$$(2.2) \quad \Phi(\dot{\mathbf{P}}, \dot{\chi}, \pi_\alpha) = 0, \quad \varphi(\dot{\mathbf{P}}, \dot{\chi}, \pi_\alpha) = 0, \quad \partial(\Phi_{ij}, \varphi)/\partial(\dot{P}_{mn}, \dot{\chi}) \neq 0,$$

где A — плотность свободной энергии; σ — тензор Коши; η — плотность энтропии; \mathbf{q} — тепловой поток. Функции $A(\pi_\alpha)$, $\Sigma(\pi_\alpha)$, $\eta(\pi_\alpha)$ и $\mathbf{S}(\pi_\alpha)$ считаются достаточно гладкими. Эволюционные уравнения (2.2), где Φ — тензорная, а φ — скалярная функции своих аргументов, предполагаются разрешимыми относительно $\dot{\mathbf{P}}$ и $\dot{\chi}$.

Рассмотрим теперь ортогональное преобразование и параллельный перенос начальной конфигурации при фиксированной разгруженной и актуальной. Учитывая, что при этом преобразовании справедливы, помимо соотношений (1.19), формулы

$$(2.3) \quad \bar{\bar{\mathbf{P}}} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{K}, \quad \bar{\bar{\chi}} = \dot{\chi},$$

найдем, что необходимым и достаточным условием изотропности и однородности упруговязкопластического материала является

$$(2.4) \quad A = A(\mathbf{V}, \mathbf{P}\mathbf{R}^T), \quad \sigma = \Sigma(\mathbf{V}, \mathbf{P}\mathbf{R}^T), \quad \eta = \eta(\mathbf{V}, \mathbf{P}\mathbf{R}^T), \quad \mathbf{q} = \mathbf{S}(\mathbf{V}, \mathbf{P}\mathbf{R}^T),$$

$$\Phi(\mathbf{V}, \mathbf{P}\mathbf{R}^T, \dot{\mathbf{P}}\mathbf{R}^T, \dot{\chi}) = 0, \quad \varphi(\mathbf{V}, \mathbf{P}\mathbf{R}^T, \dot{\mathbf{P}}\mathbf{R}^T, \dot{\chi}) = 0,$$

где для краткости опущены аргументы Θ , χ и \mathbf{g} , не изменяющиеся при рассматриваемом преобразовании. Необходимость (2.4) легко проверить, если положить для фиксированной частицы и фиксированного момента времени произвольный постоянный ортогональный тензор \mathbf{K} равным тензору \mathbf{R}^T . Подстановкой (1.19), (2.3) в (2.4) можно выяснить, что (2.4) является достаточным условием.

Если рассмотреть условие инвариантности определяющих уравнений (2.4) относительно ортогональных преобразований разгруженной конфигурации, то получим

$$(2.5) \quad A = A(\mathbf{V}, \mathbf{B}), \quad \sigma = \Sigma(\mathbf{V}, \mathbf{B}), \quad \eta = \eta(\mathbf{V}, \mathbf{B}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{S}(\mathbf{V}, \mathbf{B}),$$

$$\Phi(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T, \dot{\chi}) = 0, \quad \varphi(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T, \dot{\chi}) = 0,$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{W}\mathbf{R}^T$.

Условие инвариантности уравнений относительно преобразований разгруженной конфигурации, как нам представляется, полностью снимает вопрос о неоднозначности разложения $\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$, многократно обсуждавшийся, начиная с работы [6], и является естественным обобщением различных предположений о взаимной связи актуальной и разгруженной конфигураций.

Для доказательства необходимости зафиксируем частицу ξ в момент времени $t = t_0$. Пусть теперь преобразование $\mathbf{Y}(t)$ для $0 \leq t \leq t_0$ таково, что

$$(2.6) \quad \mathbf{Y}(\tau) = \mathbf{R}(t_0)\mathbf{H}^T(\tau), \quad \dot{\mathbf{Y}}(\tau) = \mathbf{R}(t_0)\dot{\mathbf{H}}^T(\tau).$$

В момент времени $\tau = t_0$ с учетом (1.18), (2.6) имеем

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\mathbf{W}\mathbf{R}^T, \quad \bar{\dot{\mathbf{P}}}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T, \quad \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V},$$

откуда и следует необходимость (2.5). Доказательство достаточности (2.5) получается, если в них подставить соотношения (1.18).

Выясним ограничения, налагаемые на (2.5) требованием инвариантности относительно ортогональных преобразований (1.12) актуальной конфигурации. Тогда, учитывая, что A , σ , η и \mathbf{q} являются объективными [2] величинами, получим, принимая во внимание (1.17):

$$(2.7) \quad \begin{aligned} A(\mathbf{QVQ}^T, \mathbf{QBQ}^T, \mathbf{Qg}) &= A(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{g}), \\ \Sigma(\mathbf{QVQ}^T, \mathbf{QBQ}^T, \mathbf{Qg}) &= \mathbf{Q}\Sigma(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{g})\mathbf{Q}^T, \\ \eta(\mathbf{QVQ}^T, \mathbf{QBQ}^T, \mathbf{Qg}) &= \eta(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{g}), \quad \mathbf{S}(\mathbf{QVQ}^T, \mathbf{QBQ}^T, \mathbf{Qg}) = \mathbf{Q}\mathbf{S}(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{g}), \\ \mathbf{QR}\dot{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T &= \Psi(\mathbf{QVQ}^T, \mathbf{QBQ}^T, \mathbf{Qg}) = \mathbf{Q}\Psi(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{g})\mathbf{Q}^T, \\ \dot{\chi} &= \psi(\mathbf{QVQ}^T, \mathbf{QBQ}^T, \mathbf{Qg}) = \psi(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{g}), \end{aligned}$$

где используется разрешенная форма законов пластического течения и упрочнения

$$(2.8) \quad \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T = \Psi(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{g}), \quad \dot{\chi} = \psi(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{g}).$$

Из (2.7) следует, что функции A , Σ , η , \mathbf{S} , Ψ и ψ являются изотропными функциями своих аргументов. Полагая, в частности, $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$, получим

$$(2.9) \quad \begin{aligned} A &= A(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{R}^T\mathbf{g}), \quad \eta = \eta(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{R}^T\mathbf{g}), \quad \sigma = \mathbf{R}\Sigma(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{R}^T\mathbf{g})\mathbf{R}^T, \\ \mathbf{q} &= \mathbf{R}\mathbf{S}(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{R}^T\mathbf{g}), \quad \dot{\mathbf{W}} = \Psi(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{R}^T\mathbf{g}), \quad \dot{\chi} = \psi(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{R}^T\mathbf{g}). \end{aligned}$$

Сформулированные необходимые и достаточные условия инвариантности не дают, конечно, однозначного ответа на вопрос, какие меры деформаций и скоростей деформаций должны использоваться и каков конкретный вид определяющих уравнений упруговязкопластической среды, но существенно сужают класс допустимых уравнений состояния.

Выясним, какие ограничения на вид определяющих уравнений (2.9) накладывает второй закон термодинамики, который будем использовать в виде неравенства Клаузиуса — Дюгема [2]: $\rho\eta - \text{div}((1/\Theta)\mathbf{q}) - (1/\Theta)\rho r \geq 0$.

С учетом соотношения $A = \varepsilon - \eta\Theta$, где ε — плотность внутренней энергии, приведенного уравнения баланса энергии $\rho\dot{\varepsilon} = \text{tr}(\sigma \cdot \nabla \mathbf{v}) + \text{div}\mathbf{q} + \rho r$ и кинематического уравнения (1.5) неравенство энтропии может быть записано в форме

$$(2.10) \quad \begin{aligned} -\text{tr}\left(\frac{\partial A}{\partial \mathbf{U}} \dot{\mathbf{U}}\right) - \text{tr}\left(\frac{\partial A}{\partial \mathbf{W}} \dot{\mathbf{W}}\right) - \frac{\partial A}{\partial \chi} \dot{\chi} - \frac{\partial A}{\partial \Theta} \dot{\Theta} - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{g}} \dot{\mathbf{g}} - \eta \dot{\Theta} + \\ + \frac{1}{\rho} \text{tr}\{(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T\sigma\mathbf{R}) \dot{\mathbf{U}}\} + \frac{1}{\rho\Theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0. \end{aligned}$$

Для рассматриваемого упруговязкопластического материала постулируется, что в пространстве $(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \Theta, \chi, \mathbf{g})$ существует поверхность

$$(2.11) \quad f(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \Theta, \chi, \mathbf{g}) = 0,$$

называемая статическим условием пластичности и разделяющая открытые области упругости, где $\Psi \equiv 0$, $\dot{\psi} \equiv 0$, и пластичности, где $\Psi \neq 0$, $\dot{\psi} \neq 0$.

Значения функций и их производных, определенных в упругой и пластической областях, предполагаются непрерывными во всем пространстве, включая поверхность (2.11). Стандартным образом [2] построив локальное продолжение процесса, удовлетворяющего закону пластического течения и упрочнения, получим из (2.10)

$$(2.12) \quad A = A(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \chi, \Theta), \quad \partial A / \partial \mathbf{g} = 0, \quad \eta = -\partial A / \partial \Theta,$$

$$\sigma = (\rho F \partial A / \partial \mathbf{U}) \mathbf{R}^T = \rho \mathbf{V} \partial A / \partial \mathbf{V} = \rho F \partial A / \partial \mathbf{F}^T;$$

$$(2.13) \quad \delta = \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} + \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \Psi) + b\dot{\psi} \geq 0, \quad \text{где}$$

$$(2.14) \quad \boldsymbol{\tau} = -\partial A / \partial \mathbf{W} = -(\mathbf{R}^T \cdot \partial A / \partial \mathbf{B}) \cdot \mathbf{R}, \quad b = -\partial A / \partial \chi, \quad \mathbf{h} = (1/\rho\Theta)\mathbf{q}.$$

В случае, если рассматривается изотермическое ($\dot{\mathbf{g}} \equiv 0$) или адиабатическое ($\mathbf{q} \equiv 0$) приближение, неравенство Клаузиуса — Дюгема превращается в неравенство Планка для внутренней механической диссипации и (2.13) принимает вид $\delta_{\mathbf{M}} = \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \Psi) + b\dot{\psi} \geq 0$. Если материал находится в упругом состоянии, то $\Psi = 0$, $\dot{\psi} = \delta_{\mathbf{M}} \equiv 0$ и (2.13) является неравенством Фурье для тепловой диссипации: $\delta_T = \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} \geq 0$.

3. Полная система уравнений. Будем рассматривать в качестве вектора решения совокупность величин

$$\mathbf{u} = \{\Theta, v_i, F^i_j, W_{ij}, \chi\} = \{u_\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 20$$

В эйлеровых координатах x^i с ортонормированным базисом ε_i полная система уравнений может быть записана тогда в виде дифференциальных уравнений

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= \Theta \frac{\partial \sigma_i^k}{\rho c_F \partial \Theta} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{1}{\rho c_F} \frac{\partial q^k}{\partial x^k} + \frac{1}{c_F} (r + r^{(p)}), \\ \frac{dv^i}{dt} &= F_a^k \frac{\partial^2 A}{\partial F_a^i \partial F_n^m} \frac{\partial F_n^m}{\partial x^k} - F_a^k \frac{\partial \tau^{mn}}{\partial F_a^i} \frac{\partial W_{mn}}{\partial x^k} - F_a^k \frac{\partial b}{\partial F_a^i} \frac{\partial \chi}{\partial x^k} - F_a^k \frac{\partial \eta}{\partial F_a^i} \frac{\partial \Theta}{\partial x^k} + v_i, \\ \frac{dF_j^i}{dt} &= \frac{\partial v^i}{\partial x^k} F_j^k, \quad \frac{dW_{ij}}{dt} = \Psi_{ij}(u_\alpha), \quad \frac{d\chi}{dt} = \psi(u_\alpha) \end{aligned}$$

и конечных соотношений

$$(3.2) \quad \begin{aligned} A &= A(U_{mn}, W_{mn}, \Theta, \chi), \quad \sigma_j^i = \rho F_m^i \frac{\partial A}{\partial F_m^j}, \\ q^k &= q^k(U_{mn}, W_{mn}, \Theta, \chi, \partial \Theta / \partial x^m), \\ \eta &= -\frac{\partial A}{\partial \Theta}, \quad c_F = \Theta \frac{\partial \eta}{\partial \Theta}, \quad F_j^i = R^{im} U_{mj}, \\ \tau^{mn} &= -\frac{\partial A}{\partial W_{mn}}, \quad b = -\frac{\partial A}{\partial \chi}, \quad \rho = \rho_0 / \det \|F_j^i\|, \\ r^{(p)} &= \left(\tau^{mn} - \Theta \frac{\partial \tau^{mn}}{\partial \Theta} \right) \Psi_{mn} + \left(b - \Theta \frac{\partial b}{\partial \Theta} \right) \psi, \end{aligned}$$

где b_i — массовая сила; c_F — теплоемкость при постоянных деформациях; $r^{(p)}$ — плотность источников тепла за счет работы на необратимых деформациях. В уравнениях (3.1) предполагается, что градиент температуры $g = \nabla \Theta$ оказывает пренебрежимо малое влияние на пластические свойства материала, так что $\Psi_{mn} = \Psi_{mn}(u_\alpha)$, $\psi = \psi(u_\alpha)$.

Используя уравнение для температуры в виде дифференциального закона сохранения полной энергии, уравнение движения — в виде закона сохранения импульса, кинематическое уравнение для F_j^i — в виде закона сохранения совместности деформаций (1.7) и уравнения теории течения (2.9), систему уравнений (3.1) можно записать в виде полной системы дивергентных форм:

$$(3.3) \quad \partial \Phi_\alpha^{\dot{\nu}}(u_\beta) / \partial t + \partial \Phi_\alpha^{\dot{\nu}}(u_\beta) / \partial x^k = f_\alpha(u_\beta),$$

где $E = \varepsilon + v_i v^i / 2$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 20$; $k = 1, 2, 3$;

$$(3.4) \quad \Phi_\alpha^0 = \begin{pmatrix} \rho E \\ \rho v^i \\ \rho F_j^i \\ \rho W_{ij} \\ \rho \chi \end{pmatrix}; \quad \Phi_\alpha^k = \begin{pmatrix} \rho E v^k - \sigma^{ik} v_i - q^k \\ \rho v^i v^k - \sigma^{ik} \\ \rho v^k F_j^i - \rho v^i F_j^k \\ \rho v^k W_{ij} \\ \rho v^k \chi \end{pmatrix}; \quad f_\alpha = \begin{pmatrix} \rho (r + b^i v_i) \\ \rho b^i \\ 0 \\ \rho \Psi_{ij} \\ \rho \psi \end{pmatrix}.$$

Запись системы уравнений уруговязкопластической среды в виде полной системы дифференциальных законов сохранения позволяет определить не только классическое, но и обобщенное решение [7], получить все допустимые соотношения на волнах сильного разрыва, применить для рассматриваемого материала консервативные методы численного расчета [8]. Подчеркнем, что для системы уравнений теории течения упругопластического материала, нечувствительного к скорости деформирования, набор независимых дивергентных форм исчерпывается законами сохранения энергии, импульса и совместности деформаций.

Дивергентная запись полной системы уравнений особенно просто выглядит в случае лагранжевых координат ξ^k :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \dot{E} - \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left\{ T^{mi} v_i + \frac{1}{\rho} F_k^{-1m} m_i^k \right\} &= r + b^i v_i, \\ \dot{v}^i - \frac{\partial T^{mi}}{\partial \xi^m} = b^i, \quad \dot{F}_j^i - \frac{\partial (v^i \delta_j^m)}{\partial \xi^m} = 0, \quad \dot{W}_{ij} = \Psi_{ij}, \quad \dot{\chi} = \psi, \quad \text{где } T^{mi} = \\ &= \frac{1}{\rho} F_a^{-1m} \sigma^{ki}, \quad T^{mi} \neq T^{im}. \end{aligned}$$

В адиабатическом приближении ($q^k = 0$) система (3.5) может быть симметризована. Чтобы показать это, получим как следствие (3.5) уравнение

$$(3.6) \quad \dot{\eta} = r/\Theta + \delta, \quad \delta = \tau^{mn}\Psi_{mn} + b\psi$$

для скорости изменения энтропии. Выражение (3.6) представляет собой дополнительный закон сохранения, справедливый в областях гладких течений. Для вывода (3.6) умножим первое уравнение (3.5) на неизвестный пока множитель $\alpha = \alpha(u_\alpha)$, второе — на β_i , третье — на γ_i^j , четвертое — на λ^{ji} , пятое — на ζ и сложим все уравнения. В результате получим систему

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{\eta} &= \alpha \dot{E} + \beta_i \dot{v}^i + \gamma_i^j \dot{F}_j^i + \lambda^{ji} \dot{W}_{ij} + \zeta \dot{\chi}, \\ \frac{1}{\Theta} (r + \tau^{mn}\Psi_{mn} + b\psi) &= \alpha r + \alpha \delta^i v_i + \beta_i \delta^i + \lambda^{mn}\Psi_{mn} + \zeta \psi, \\ \alpha \frac{\partial}{\partial \xi^m} (T^{mi} v_i) + \beta_i \frac{\partial T^{mi}}{\partial \xi^m} + \gamma_i^j \frac{\partial (v^i \delta_j^m)}{\partial \xi^m} &= 0, \end{aligned}$$

из которой находим

$$(3.8) \quad \alpha = \frac{1}{\Theta}, \quad \beta_i = -\frac{\bar{v}_i}{\Theta}, \quad \gamma_i^j = -\frac{1}{\Theta} T_{ij}^j, \quad \lambda^{ji} = \frac{1}{\Theta} \tau^{ji}, \quad \zeta = \frac{1}{\Theta} b.$$

С учетом тождества $dA = T_{ij}^m dF_{ij}^m - \tau^{mn} dW_{mn} - b d\bar{v} - \eta d\Theta$, эквивалентного соотношениям (2.12), (2.14), можно проверить, что выражения (3.8) удовлетворяют и более сильным по сравнению с (3.7) условиям:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} d\eta &= \alpha dE + \beta_i d v^i + \gamma_i^j d F_j^i + \lambda^{ji} d W_{ij} + \zeta d\chi, \\ \alpha d (T^{mi} v_i) + \beta_i d T^{mi} + \gamma_i^j d (v^i \delta_j^m) &= 0. \end{aligned}$$

Записывая (3.9) в форме

$$\begin{aligned} d(\alpha E + \beta_i v^i + \gamma_i^j F_j^i + \lambda^{ji} W_{ij} + \zeta \chi - \eta) &= E d\alpha + v^i d\beta_i + W_{ij} d\lambda^{ji} + \chi d\zeta, \\ d(\alpha T^{mi} v_i + \beta_i T^{mi} + \gamma_i^j v^i \delta_j^m) &= T^{mi} v_i d\alpha + T^{mi} d\beta_i + v^i d\gamma_i^j \end{aligned}$$

и обозначая

$$L^0 = -\alpha E - \beta_i v^i - \gamma_i^j F_j^i - \lambda^{ji} W_{ij} - \zeta \chi + \eta =$$

$$= \frac{1}{\Theta} \left(\frac{1}{2} v_i v^i + \frac{1}{\rho} \sigma_k^k - \tau^{ij} W_{ij} - b\chi - A \right), \quad L^m = -(1/\Theta) T_{ij}^m v_i, \quad \text{получим}$$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} E &= -\partial L^0 / \partial \alpha, \quad v^i = -\partial L^0 / \partial \beta_i, \quad F_j^i = -\partial L^0 / \partial \gamma_j^i, \quad W_{ij} = -\partial L^0 / \partial \lambda^{ji}, \quad \chi = -\partial L^0 / \partial \zeta, \\ T^{mi} v_i &= \partial L^m / \partial \alpha, \quad T^{mi} = \partial L^m / \partial \beta_i, \quad v^i \delta_j^m = \partial L^m / \partial \gamma_j^i. \end{aligned}$$

Соотношения (3.10) позволяют записать систему (3.5) в симметричном виде

$$(3.11) \quad \frac{\partial L_{q_\alpha}^0}{\partial t} + \frac{\partial L_{q_\alpha}^m}{\partial \xi^m} = L_{q_\alpha \bar{v}}^0 \frac{\partial q_\beta}{\partial t} + L_{q_\alpha \bar{v}}^m \frac{\partial q_\beta}{\partial \xi^m} = -\frac{1}{\rho} f_\alpha,$$

где $q_\alpha = \{\alpha, \beta_i, \gamma_i^j, \lambda^{ji}, \zeta\}$; $L_{q_\alpha}^{0,m} = \partial L^{0,m} / \partial q_\alpha$; $L_{q_\alpha \bar{v}}^{0,m} = \partial^2 L^{0,m} / \partial q_\alpha \partial q_\beta$, при условии, что $\det \|\partial q_\alpha / \partial u_\beta\| \neq 0$. Если матрица $L_{q_\alpha \bar{v}}^0$ является положительно определенной, то система (3.11) будет заведомо гиперболической [9]. Условие положительной определенности матрицы $L_{q_\alpha \bar{v}}^0$ эквивалентно условию выпуклости функции внутренней энергии ϵ по своим аргументам: $(\partial^2 \epsilon(p_\alpha) / \partial p_\alpha \partial p_\beta) \lambda^\alpha \lambda^\beta > 0, \forall \lambda^\alpha \neq 0, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 20$, где $p_\alpha = \{F_j^i, \bar{W}_{ij}, \chi, \eta\}$. Доказательство эквивалентности аналогично приведенному в [3] для случая пелинейной упругости.

Отметим, что достаточное условие гиперболичности существенно более сильное по сравнению с необходимым условием

$$(F_a^k n_k) \frac{\partial^2 \epsilon (F_n^m, W_{mn}, \chi, \eta)}{\partial F_a^i \partial F_b^j} (F_b^s n_s) \lambda^i \lambda^j > 0, \quad \forall \lambda^i \neq 0,$$

которое, как можно показать, имеет место для изучаемой системы уравнений.

Рассмотрим в заключение соотношения на сильных разрывах в упруговязкопла-

стической среде. Пусть $D = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \left/ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \right)^{1/2} \right.$ — скорость поверхности разрыва $\varphi(x^m, t) = 0$, $n_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \left/ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \right)^{1/2} \right.$ — компоненты единичной пространственной нормали, направленной в сторону движения. Тогда на сильном разрыве для системы уравнений (3.3) имеют место соотношения [7] — $D [\varphi_\alpha^+] + n_i [\varphi_\alpha^i] = 0$, где $[a] = a^+ - a^-$ — скачок величины a . Индексами (+) обозначено состояние частицы после и перед фронтом. Обозначая через $G = D - n_i v^i$ скорость распространения поверхности $\varphi = 0$ относительно частиц среды и используя (3.4), получим

$$(3.12) \quad [\rho G E] + [\sigma^{ik} v_i] n_k + [q^k] n_k = 0, \quad [\rho G v^i] + [\sigma^{ik}] n_k = 0, \\ [\rho G F_j^i] + [\rho v^i F_j^k] n_k = 0, \quad [\rho G W_{ij}] = 0, \quad [\rho G \chi] = 0.$$

Сворачивая уравнение для скачка F_j^i с нормалью n_i , находим, что при $D \neq 0$

$$(3.13) \quad [\rho F_j^k] n_k = 0.$$

Смысл соотношения (3.13) становится ясным, если принять во внимание связь между компонентами нормали к поверхности $\varphi = 0$ в начальной и актуальной конфигурациях

$$n_j = \frac{dS}{d\hat{S}} \frac{\rho}{\hat{\rho}} F_j^k n_k,$$

где dS , $d\hat{S}$ — элементарные площадки на поверхности разрыва в рассматриваемых конфигурациях. Отсюда следует, что (3.13) выражает собой непрерывность нормали \hat{n} в начальной конфигурации.

Используя (3.13), можно показать [3], что имеет место условие непрерывности потока массы

$$(3.14) \quad [\rho G] = 0.$$

Формулы (3.13), (3.14) дают возможность записать уравнение для скачка F_j^i в виде

$$[F_j^i] = h^i \rho F_j^k n_k, \quad h^i = -\frac{1}{\rho G} [v^i],$$

после чего остальные уравнения (3.12) представим в форме

$$(3.15) \quad \rho G \left\{ [\varepsilon] - \frac{1}{2} (\sigma_i^{k+} + \sigma_i^{k-}) h^i n_k \right\} + [q^k] n_k = 0, \\ [\sigma^{ik}] n_k - (\rho G)^2 h^i = 0, \quad \rho G [W_{ij}] = 0, \quad \rho G [\chi] = 0.$$

На контактном разрыве ($G = 0$) $[v^i] = [\sigma^{ik}] n_k = [q^k] n_k = 0$, а величины $[W_{ij}]$, $[\chi]$, $[\varepsilon]$ и $[F_j^i]$ являются произвольными. В случае ударной волны ($G \neq 0$) из (3.15) следует, что симметричная часть W_{ij} ; пластического градиента и параметр упрочнения χ непрерывны, а все остальные величины терпят разрыв.

Поступила 20 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
3. Кондауров В. И. О законах сохранения и симметризации уравнений нелинейной теории термоупругости. — ДАН СССР, 1981, т. 256, № 4.
4. Кукуджанов В. П., Кондауров В. И. Численное решение неоднородных задач динамики твердого тела. — В сб.: Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975.
5. Clifton R. J. On the equivalence of $F^e F^p$ and $\bar{F}^p \bar{F}^e$. — J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, N 1.
6. Lee E. H. Elastic-plastic deformation at finite strains. — J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, ser. E, N 1.
7. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
8. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
9. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.