Доклады Академии наук СССР
1985. Том 284, № 4

УДК 517.97 МАТЕМАТИКА

А.А. АГРАЧЕВ, член-корреспондент АН СССР Р.В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

ИНДЕКС ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ И КВАЗИЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

1. Начнем с неформального объяснения понятия индекса экстремальности; точные определения см. в п. 2.

Предположим, что рассматривается экстремальная задача для некоторого функционала φ_0: $Z \to \mathbf{R}$ при ограничениях $\varphi_i(z) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (природу множества Z пока уточнять не будем). Пусть $z_0 \in Z$ и $l < 0$; мы считаем, что индекс экстремальности в точке z_0 больше l, если можно превратить эту точку в экстремальную, добавив "устойчивым образом" $(-l)$ новых ограничений (устойчивость здесь означает, что, если дополнительные ограничения немного изменить, экстремальность z_0 сохранится). Предположим, что $z_0 \in Z$ – экстремальная точка и $0 \leqslant k \leqslant m$; мы считаем, что индекс экстремальности в точке z_0 больше k, если можно "устойчивым образом" уменьшить на k число ограничений, сохранив свойство экстремальности.

В действительности мы используем более геометричный подход, при котором функционал не отделяется от ограничений: вместо функционала φ_0 и ограничений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ рассматривается вектор-функция $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)^{\mathrm{T}}$, а экстремальными значениями считаются точки, лежащие на границе множества $\operatorname{im} \Phi$. Соответственно модифицируется понятие индекса экстремальности. Далее, мы рассматриваем не произвольное отображение Φ, а управляемую систему. Индекс квазиэкстремальности данного управления – это наивысший индекс экстремальности в соответствующей "точке", которого можно добиться сколь угодно малым изменением системы. В настоящей заметке вычисляется индекс квазиэкстремальности фиксированного управления в терминах первой и второй вариаций системы.

2. Пусть M – n-мерное, а U – r-мерное, многообразия класса C^∞, которые мы считаем вложенными в качестве замкнутых подмногообразий в $\mathbf{R}^d$. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f_t(x, u), \quad x \in M, \quad u \in U, \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $f_t(x, u)$ бесконечно дифференцируемо по (x, u) и измеримо по t, причем

$$\int_0^1 \|f_t(\cdot, \cdot)\|_{K, \alpha} dt < +\infty \quad \forall K \subset\subset M \times U, \quad \alpha \geqslant 0.$$

Здесь $\|\cdot\|_{K,\alpha}$ означает максимум всех производных до порядка α на компакте K. Допустимыми управлениями являются произвольные измеримые ограниченные отображения $u(\cdot)$: $[0, 1] \to U \subset \mathbf{R}^d$; ясно, что пространство допустимых управлений $L_\infty([0, 1]; U)$ – гладкое банахово подмногообразие в $L_\infty^d [0, 1]$. Семейство полунорм $\int_0^1 \|\cdot\|_{K,\alpha} dt$, $K \subset\subset M \times U$, $\alpha \geqslant 0$, превращает линейное пространство всевозможных управляемых систем вида (1) в пространство Фреше, которое мы будем обозначать символом $CS(M, x_0; U)$.

Зафиксируем некоторое допустимое управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, 1]$. Предположим, что соответствующая траектория $\tilde{x}(t)$, где $\dot{\tilde{x}} = f_t(\tilde{x}(t)), \tilde{u}(t))$, $\tilde{x}(0) = x_0$, определена на всем отрезке $[0, 1]$. Тогда для всех $u(\cdot)$ из некоторой окрестности $\mathcal{U}$ "точки" $\tilde{u}(\cdot)$ в $L_\infty([0, 1]; U)$ определено отображение F: $u(\cdot) \mapsto x(1) \in M$, где $\dot{x}(t) = f_t(x(t), u(t))$, $t \in [0, 1]$, $x(0) = x_0$. Нетрудно показать, что F – бесконечно дифференцируемое отображение из $\mathcal{U}$ в M. Прежде чем двигаться дальше, опишем интересующие нас локальные инварианты гладких отображений.

Пусть $\mathcal{A}$ – банахово многообразие класса C^∞, $a \in \mathcal{A}$. Обозначим через $C_a^\infty(\mathcal{A}, M)$ пространство ростков в точке a гладких отображений из $\mathcal{A}$ в M с топологией сходимости всех производных в точке a. В следующих определениях слова "для почти всякого ростка" означают: для любого ростка из некоторого открытого всюду плотного подмножества в пространстве ростков.

Определение 1. Росток $\mathcal{H} \in C_a^\infty(\mathcal{A}, M)$ называется экстремальным, если существует такая окрестность $\mathcal{O}$ точки a в $\mathcal{A}$ и представитель H: $\mathcal{O} \to M$ ростка H, что $H(a) \in \partial H(\mathcal{O})$, т.е. точка $H(a)$ лежит на границе множества $H(\mathcal{O})$.

Определение 2. Пусть снова $\mathcal{H} \in C_a^\infty(\mathcal{A}, M)$.

i) Предположим, что $\mathcal{H}$ – экстремальный росток. Скажем, что $\mathcal{H}$ имеет индекс экстремальности $k > 0$, если k– наименьшее такое число, что для почти всякого ростка $\Phi \in C^\infty_{\mathcal{H}(a)}(M, \mathbf{R}^{n-k})$ росток $\Phi \circ \mathcal{H} \in C_a^\infty(\mathcal{A}, \mathbf{R}^{n-k})$ не является экстремальным.

ii) Предположим, что росток $\mathcal{H}$ не является экстремальным. Скажем, что $\mathcal{H}$ имеет индекс экстремальности $l \leqslant 0$, если l – наименьшее такое число, что для почти всякого ростка $\Psi \in C_a^\infty(\mathcal{A}, \mathbf{R}^{-l})$ росток $(\mathcal{H}, \Psi) \in C_a^\infty(\mathcal{A}, M \times \mathbf{R}^{-l})$ не является экстремальным. Если наименьшего l не существует, то индекс экстремальности считается равным $-\infty$.

Таким образом, индекс экстремальности произвольного ростка $\mathcal{H} \in C_a^\infty(\mathcal{A}, M)$ лежит на отрезке $[-\infty, n]$. Росток является экстремальным, когда его индекс экстремальности положителен.

Вернемся к управляемой системе (1).

Определение 3. Индексом локальной экстремальности управления $\tilde{u}(\cdot)$ относительно системы (1) называется индекс экстремальности ростка отображения F в "точке" $\tilde{u}(\cdot)$. Если индекс локальной экстремальности положителен, то управление $\tilde{u}(\cdot)$ называется локально-экстремальным относительно системы (1).

Определение 4. Индексом квазиэкстремальности управления $\tilde{u}(\cdot)$ относительно системы (1) называется максимальное такое число $k \in [-\infty, n]$, что сколь угодно близко к $f_t(x, u)$ в пространстве $CS(M, x_0; U)$ существует управляемая система $g_t(x, u)$, относительно которой управление $\tilde{u}(\cdot)$ имеет индекс локальной экстремальности k. Если индекс квазиэкстремальности положителен, что управление $\tilde{u}(\cdot)$ называется квазиэкстремальным относительно данной системы (1).

Таким образом, индекс квазиэкстремальности управления относительно данной системы $f_t(x, u)$ – это верхний предел индексов локальной экстремальности $\tilde{u}(\cdot)$ относительно систем $g \in CS(M, x_0; U)$ при g, стремящемся к f (легко видеть, что соответствующий нижний предел всегда равен $-\infty$). В частности, индекс квазиэкстремальности данного управления полунепрерывно сверху зависит от системы.

3. Оказывается, индекс квазиэкстремальности можно вычислить, зная лишь дифференциал и гессиан отображения F в "точке" $\tilde{u}(\cdot)$. Для описания дифферен-

циала и гессиана нам потребуются некоторые обозначения. При любом y_1 из некоторой окрестности $O_1 \subset M$ точки $\tilde{x}(1)$ в M решение уравнения $\dot{y}(\tau) = f_\tau(y(\tau)), \tilde{u}(\tau))$, $y(1) = y_1$ определено для всех $\tau \in [0, 1]$; при этом, каково бы ни было $t \in [0, 1]$, отображение p_t: $y(t) \mapsto y(1)$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности O_t точки $\tilde{x}(t)$ на O_1. Обозначим, как обычно, символом p_{t*} дифференциал диффеоморфизма p_t, а p_t^* — кодифференциал (p_{t*} преобразует векторные поля на O_t в векторные поля на O_1, p_t^* преобразует дифференциальные формы на O_1 в дифференциальные формы на O_t). Символы T_xM и T_x^*M обозначают касательное и кокасательное пространства к M в точке x, а T_uU — касательное пространство к U в точке u. Положим

$$\tilde{f}'_t(x) = \frac{\partial f_t}{\partial u}(x, \tilde{u}(t)), \quad \tilde{f}''_t(x) = \frac{\partial^2 f_t}{\partial u_1 \partial u_2}(x, \tilde{u}(t));$$

тогда $\tilde{f}'(x)$: $T_{\tilde{u}(t)}U \to T_xM$ — линейное отображение, и для всякого $v \in T_{\tilde{u}(t)}U$ соответствие $x \mapsto \tilde{f}'_t(x)v$ определяет векторное поле $\tilde{f}'_t v$ на M. Аналогично, $\tilde{f}''_t(x)$: $T_{\tilde{u}(t)}U \times T_{\tilde{u}(t)}U \to \operatorname{coker} \tilde{f}'_t(x)$ — билинейное симметричное отображение (мы используем стандартное обозначение $\operatorname{coker} \tilde{f}_t(x) = T_xM/\operatorname{im} \tilde{f}_t(x)$, значения вторых производных $\partial^2 f/\partial u_1 \partial u_2$ корректно определены только с точностью до образа $\partial f/\partial u$). Заметим, наконец, что касательное пространство $T_{\tilde{u}(\cdot)}L_\infty([0, 1]; U)$ к банахову многообразию $L_\infty([0, 1]; U)$ в "точке" $\tilde{u}(\cdot)$ состоит из таких измеримых и ограниченных отображений $t \mapsto v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что $v(t) \in T_{\tilde{u}(t)}U$, $\forall t \in [0, 1]$.

Предложение 1. *Пусть* $\tilde{F}'$: $T_{\tilde{u}(\cdot)}L_\infty([0, 1]; U) \to T_{\tilde{x}(1)}M$ — *дифференциал отображения* F *в "точке"* $\tilde{u}(\cdot)$, $\ker \tilde{F}'$ — *ядро этого дифференциала*, $\operatorname{im} \tilde{F}'$ — *его образ*, $\operatorname{coker} \tilde{F}' = T_{\tilde{x}(1)}M/\operatorname{im} \tilde{F}'$ — *коядро и* $\tilde{F}''$: $\ker \tilde{F}' \times \ker \tilde{F}' \to \operatorname{coker} \tilde{F}'$ — *гессиан* F в "точке" $\tilde{u}(\cdot)$. *Справедливы следующие равенства:*

$$\tilde{F}'v(\cdot) = \int_0^1 p_{t*}\tilde{f}'_t(\tilde{x}(t))v(t)\,dt,$$

$$\operatorname{im} \tilde{F}' = \operatorname{span}\{p_{t*}\tilde{f}'_t(\tilde{x}(t))v \mid v \in T_{\tilde{u}(t)}U,\ t \text{ — точка Лебега отображения}$$

$$\tau \mapsto p_{\tau*}\tilde{f}'_\tau(\tilde{x}(\tau))\}.$$

$$\tilde{F}''(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \int_0^1 \{(p_{t*}\tilde{f}''_t(\tilde{x}(t))(v_1(t), v_2(t)) +$$

$$+ \left[\int_0^t p_{\tau*}\tilde{f}'_\tau v_1(\tau)\,d\tau,\ p_{t*}\tilde{f}'_t v_2(t)\right](\tilde{x}(1))\}\,dt + \operatorname{im} \tilde{F}',$$

$\forall v_i(\cdot) \in \ker \tilde{F}'$, $i = 1, 2$. *Квадратные скобки* $[\cdot, \cdot]$ *здесь обозначают коммутатор векторных полей на* M.

Положим $(\operatorname{im} \tilde{F}')^\perp = \{\psi \in T^*_{\tilde{x}(1)}M \mid (p_t^*\psi)\tilde{f}_t(\tilde{x}(t))v = 0,\ \forall v \in T_{\tilde{u}(t)}U$ и п.в. $t \in [0, 1]\}$ — ортогональное дополнение к образу $\tilde{F}'$. Для любого $\psi \in (\operatorname{im} \tilde{F}')^\perp$ отображение $v(\cdot) \mapsto \psi\tilde{F}''(v(\cdot), v(\cdot))$ является скалярной квадратичной формой на $\ker \tilde{F}'$, мы сохраним для нее обозначение $\psi\tilde{F}''$. Напомним, что индексом Морса произвольной квадратичной формы Q называется максимальная размерность (возможно, $+\infty$) подпространства, на котором эта форма отрицательна; стандартное обозначение: $\operatorname{ind} Q$. Условимся, что $\min \phi = +\infty$.

Теорема 1. *Индекс квазиэкстремальности управления $\tilde{u}(\cdot)$ относительно системы* (1) *равен*

$$\dim \operatorname{coker} \tilde{F}' - \min\{\operatorname{ind}(\psi \tilde{F}'') \mid \psi \in (\operatorname{im} \tilde{F}')^{\perp}, \quad \psi \neq 0\}.$$

4. В виде оценки индекса квазиэкстремальности приобретают свою окончательную форму обобщенные условия Лежандра (см. [1–3]). На протяжении этого пункта мы предполагаем, что $f_t(x, u)$ и $\tilde{u}(t)$ кусочно гладко и непрерывно слева зависят от t, производные по t в точках разрыва следует понимать как предел слева соответствующих производных.

Положим $\tilde{f}_t(x) = f_t(x, \tilde{u}(t))$, соответствие $x \mapsto \tilde{f}_t(x)$ определяет векторное поле $\tilde{f}_t$ на M. Обычным образом определяется оператор $\operatorname{ad} \tilde{f}_t$, преобразующий пространство векторных полей на M в себя: $(\operatorname{ad} \tilde{f}_t)g = [\tilde{f}_t, g]$ для произвольного векторного поля g.

Определение 5. Пусть $t \in (0, 1]$, $k \geqslant 0$ целое. Билинейное отображение L_t^k: $(v_1, v_2) \mapsto \left[\tilde{f}_t' v_1, \left(\frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{ad} \tilde{f}_t\right)^k \tilde{f}_t' v_2\right](\tilde{x}(t))$ из $T_{\tilde{u}(t)} U \times T_{\tilde{u}(t)} U$ в $T_{\tilde{x}(t)} M$ называется формой Лежандра порядка k в точке t.

Нам будет удобно также использовать обозначение

$$L_t^{-1}(v_1, v_2) = \tilde{f}_t''(\tilde{x}(t))(v_1, v_2).$$

Пусть $\psi \in T^*_{\tilde{x}(1)} M$, $\psi_t = p_t^* \psi$, ковектор ψ в том и только том случае принадлежит $(\operatorname{im} \tilde{F}')^{\perp}$, когда $\psi_t \tilde{f}_t'(\tilde{x}(t)) = 0$, $\forall t \in (0, 1]$; при этом произведения $\psi_t L_t^k$, $k = -1, 0, 1, \ldots$, суть скалярные билинейные формы на $T_{\tilde{u}(t)} U$, $t \in (0, 1]$. Обозначим через $k_t(\psi)$ наименьшее такое число $k \geqslant -1$, что $\psi_\tau L_\tau^k$ не есть тождественный нуль ни на каком отрезке $[\bar{t}, t]$, где $0 < \bar{t} < t$.

Предложение 2. *Предположим, что семейство ковекторов $\psi_t = p_t^* \psi$, $t \in (0, 1]$, удовлетворяет условию $\psi_t \tilde{f}_t'(\tilde{x}(t)) \equiv 0$. Тогда, каково бы ни было $t \in (0, 1]$,*

1) *если* $k_t(\psi) \geqslant 2 \dim \operatorname{span}\{p_{\tau *} \tilde{f}_\tau'(\tilde{x}(\tau)) v \mid v \in T_{\tilde{u}(\tau)} U, \quad 0 < \tau \leqslant t\}$, *то* $k_t(\psi) = +\infty$;

2) *если $k_t(\psi)$ – нечетное число, то билинейная форма $\psi_t L_t^{k_t(\psi)}(v_1, v_2)$ симметрична, а если четное, то кососимметрична.*

В случае нечетного $k_t(\psi)$ для квадратичной формы $v \mapsto \psi_t L_t^{k_t(\psi)}(v, v)$ сохраним обозначение $\psi_t L_t^{k_t(\psi)}$, символом I_t обозначим квадратичную форму $v \mapsto |v|^2$ на $T_{\tilde{u}(t)} U$.

Теорема 2. *Предположим, что управление $\tilde{u}(\cdot)$ имеет конечный индекс квазиэкстремальности относительно системы* (1).

Тогда существует такое $\psi \in T^*_{\tilde{x}(1)} M \setminus \{0\}$, что $\forall t \in (0, 1]$ и $\psi_t = p_t^* \psi$ выполняются соотношения:

а) $\psi_t \tilde{f}_t'(\tilde{x}(t)) = 0$;

б) *если $k_t(\psi) < +\infty$, то $k_t(\psi)$ – нечетное число и* $(-1)^{(k_t(\psi)+1)/2} L_t^{k_t(\psi)} \geqslant 0$.

Обратно, если для некоторого семейства $\psi_t = p_t^* \psi \neq 0$, $t \in (0, 1]$, выполняются соотношения а), б) *и, кроме того, $\forall t \in (0, 1]$ $k_t(\psi) < +\infty$, $(-1)^{(k_t(\psi)+1)/2} L^{k_t(\psi)} \geqslant \epsilon I_t$, где $\epsilon > 0$, то управление $\tilde{u}(\cdot)$ имеет конечный индекс квазиэкстремальности относительно системы* (1).

Замечание. Основные понятия и результаты настоящей работы распространяются на случай, когда множество U управляющих параметров – не гладкое многообразие, а "криволинейный многогранник". Точные определения вместе с доказательствами мы рассчитываем привести в подробной статье.

Всесоюзный институт научной и технической информации
Москва

Поступило
22 XI 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В.* – Матем. сб., 1976, т. 100(142), с. 610–643. 2. *Аграчев А.А.* – Там же, 1977, т. 102 (144), с. 551–568. 3. *Krener A.J.* – SIAM J. Control., 1977, vol. 25, № 2, p. 256–293. 4. *Аграчев А.А.* ICM-82 Short Communications, XII. Warszawa: PWN, 1983, p. 29.

УДК 519.854 МАТЕМАТИКА

А.Д. ВАЙНШТЕЙН

ВЫПУКЛЫЕ ЗАДАЧИ О РАЗБИЕНИИ

(Представлено академиком Л.В. Канторовичем 12 VI 1985)

1. С каждым функционалом, заданным на некотором множестве, можно связать две оптимизационные задачи: максимизации и минимизации. В классе линейных функционалов эти задачи, очевидно, эквивалентны; в других случаях их сложность может быть существенно различной. Такая ситуация возникает, например, в задачах оптимизации субмодулярной функции* на решетке [1]: задача минимизации такой функции оказывается полиномиально разрешимой, а задача максимизации – NP-трудной. В этой заметке исследуется еще одна такая пара задач – выпуклые задачи о разбиении.

2. Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ – конечное множество, каждому элементу которого поставлено в соответствие рациональное число w_i, причем $w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots \geqslant w_n$. Весом произвольного подмножества $A \subseteq I$ назовем величину

$$V(A) = f(w_A, \ |A|),$$

где $w_A = \sum_{i \in A} w_i$, $|A|$ – мощность A, f: $\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{Q}$ – некоторая функция.

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ – произвольное разбиение I, т.е. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = I$, $A_i \cap A_j = \phi$ при $i \neq j$. Весом разбиения $\mathcal{A}$ назовем величину

$$V(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{k} V(A_i).$$

---

* Напомним, что функция f называется субмодулярной, если для любых двух множеств A и B выполняется неравенство $f(A \cup B) + f(A \cap B) \leqslant f(A) + f(B)$, и супермодулярной, если субмодулярна функция $-f$.