А. Е. Панкратьев, Гиперболические произведения групп, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, номер 2, 9–13

Автор выражает благодарность проф. А. П. Веселову и доц. О. А. Чалых за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chalykh O.A., Veselov A.P.* Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras //Communs Math. Phys. 1990. **126**. 597–611.
2. *Кричевер И.М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений //Успехи матем. наук. 1977. **32**, № 6. 183–208.
3. *Schmidt M., Veselov A.P.* Quantum elliptic Calogero–Moser problem and deformations of algebraic surfaces. Preprint of Freie Universität. Berlin, 1996.
4. *Веселов А.П., Стыркас К.Л., Чалых О.А.* Алгебраическая интегрируемость для уравнения Шредингера и группы, порожденные отражениями //Теор. матем. физ. 1993. **94**, № 2. 253–275.
5. *Ходаринова Л.А.* О квантовой эллиптической задаче Калоджеро–Мозера //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1998. № 5. 16–19.
6. *Felder G., Varchenko A.* Three formulas for eigenfunction of integrable Schrödinger operators. Preprint of UNC, 1995.
7. *Braverman A., Etingof P., Gaitsgory D.* Quantum integrable system and differential Galois theory //Transformation Groups. 1997. **2**, N 1. 31–57.
8. *Веселов А.П., Фейгин М.В., Чалых О.А.* Новые интегрируемые деформации квантовой задачи Калоджеро–Мозера //Успехи матем. наук. 1996. **51**, № 3. 185–186.
9. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* Quantum imtegrable systems related to Lie algebras //Phys. Repts. 1983. **94**, N 6. 313–404.
10. *Волченко К.Ю., Козачко А.Н., Мишачев К.Н.* Кольцо квазиинвариантов группы диэдра //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1999. № 1. 52–55.
11. *Чалых О.А.* Дополнительные интегралы обобщенной квантовой задачи Калоджеро–Мозера //Теор. матем. физ. 1996. **102**, № 1. 23–33.

Поступила в редакцию
17.11.97

УДК 512.543.52

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

А. Е. Панкратьев

1. Диаграммы над свободными произведениями. Рассмотрим свободное произведение конечного числа конечно определенных групп $F = \underset{i}{*}G_i$, $i \in I$. Любой неединичный элемент $w \in F$ однозначно записывается в нормальной форме $w = x_1 \dots x_n$, где каждый множитель x_i является неединичным элементом одной из групп $G_m = \langle \mathcal{A}_m | R_m \rangle$, при этом соседние x_i, x_{i+1} $(i = 1, \dots, n-1)$ принадлежат разным свободным множителям G_k, G_l. Под *длиной* $|w|$ элемента w в свободном произведении будем понимать число n элементов в такой записи.

Пусть $u = x_1 \dots x_k$ и $v = y_1 \dots y_l$ — нормальные формы элементов u и v и пусть $w = uv$. Скажем, что слово w имеет *приведенное разложение* $w = uv$, если x_k, y_1 лежат в разных свободных множителях. Если $x_k \neq y_1^{-1}$, то uv называется *полуприведенной формой* элемента w (при этом они могут принадлежать одному и тому же свободному множителю G_i). Аналогично вводятся понятия приведенного и полуприведенного разложений на любое число множителей $w = u_1 u_2 \dots u_n$. Элемент w с нормальной формой $w = x_1 \dots x_k$ называется *слабо циклически приведенным*, если $x_1 \neq x_k^{-1}$. В случае когда x_1 и x_k лежат в разных свободных множителях, элемент w называется *циклически приведенным*.

Подмножество R группы F называется *симметризованным*, если каждое слово $r \in R$ является слабо циклически приведенным и каждое слабо циклически приведенное слово, сопряженное любому из элементов r и r^{-1}, принадлежит R.

Наложим на свободное произведение $F = \underset{i}{*}G_i$ конечное множество дополнительных соотношений R. Обозначим через $H = \langle F | R \rangle$ полученную группу.

Процесс построения диаграмм Δ над группой $H = F/N$, предложенный Р. Линдоном и П. Шуппом [1], состоит в следующем. Диаграмма является связной односвязной планарной картой. Вершины делятся на два типа: первичные и вторичные. Метка $\varphi(e)$ на каждом ребре e карты является элементом некоторого множителя G_i группы F, причем метки на последовательных ребрах одной клетки или границы $\partial\Delta$, встречающихся в первичных вершинах, принадлежат различным множителям, а если два ребра встречаются во вторичной вершине, то их метки принадлежат одному и тому же множителю G_j. Помечающая функция φ, заданная на ребрах, естественным образом продолжается на произвольные конечные пути.

Пусть $w \underset{H}{=} 1$, т.е. $w \underset{F}{=} p_1 \ldots p_n$, где каждый множитель p_i сопряжен в F с некоторым словом из $R \cup R^{-1}$. Для вывода соотношения $w \underset{H}{=} 1$ мы сперва построим начальную диаграмму, состоящую из петель для каждого p_j, выходящих из базовой точки o и расположенных по кругу.

Для одного сомножителя $p = uru^{-1} = z_1 \ldots z_k x_1 \ldots x_m z_k^{-1} \ldots z_i^{-1}$ $(r \in R)$ в нормальной форме начальная диаграмма выглядит следующим образом. Если x_1 и x_m лежат в различных свободных множителях группы F, то начальная диаграмма для p — это петля с вершиной v, соединенной с базовой точкой o некоторым путем. Путь $o - v$ состоит из $2k$ ребер e_1, e_1', …, e_k, e_k', где каждая пара $e_i e_i'$ помечена элементами соответствующего свободного множителя так, что выполнено равенство $\varphi(e_i e_i') = z_i$. Очевидно, в выборе меток имеет место некоторый произвол, который будет использован в дальнейшем. Петля в точке v состоит из $2m$ ребер d_1, d_1', …, d_m, d_m', причем $\varphi(d_i d_i') = x_i$. Если x_1 и x_m лежат в одном и том же свободном множителе группы F, то будем считать, что в конце пути $o - v$ есть еще одно ребро e и петля в точке v состоит из ребер b, d_2, …, d_{m-1}, d_{m-1}', c, где $\varphi(d_i d_i') = x_i$, $2 \leqslant i \leqslant m-1$. Три ребра e, b, c, встречающиеся во вторичной вершине v, помечены так, чтобы выполнялись необходимые (и допустимые) условия $\varphi(eb) = x_1$, $\varphi(ce^{-1}) = x_m$ и $\varphi(cb) = x_m x_1$. Вершина o считается первичной.

При отождествлении частей начальной диаграммы Δ первичные вершины отождествляются с первичными, а вторичные — со вторичными. В $\partial\Delta$ могут быть последовательные сегменты e, e' и f, f', такие, что e' и f разделены первичной вершиной, а метки $\varphi(ee')$ и $\varphi(ff')$ лежат в одном и том же свободном множителе группы F. В этом случае метка на ребре f заменяется на метку $\varphi(e')^{-1}$, причем метки на других ребрах, встречающихся во вторичной вершине, разделяющей f и f', подгоняются соответствующим образом. Теперь ребра e' и f можно отождествить как имеющие взаимно обратные метки. Если $\varphi(e) \neq \varphi(f')^{-1}$, то можно перейти к рассмотрению других первичных вершин; если $\varphi(e) = \varphi(f')^{-1}$, то можно отождествить и e с f'; если же ef' образует замкнутую петлю с граничной меткой 1, то эта петля вместе с ее внутренностью может быть вычеркнута из диаграммы Δ.

После конечного числа отождествлений получим диаграмму M^*, удовлетворяющую следующим свойствам.

(1) Существует граничный цикл $s_1 \ldots s_t$ карты M^*, начинающийся в точке o, такой, что $\varphi(s_1) \ldots \varphi(s_t)$ — полуприведенное разложение элемента $w = p_1 \ldots p_n$.

(2) Если D — произвольная клетка из M^*, то ее граничный цикл δ состоит из четного числа ребер $e_1, \ldots, e_{2j}$, причем одно из разложений этого цикла — $\varphi(e_1)\varphi(e_2 e_3) \ldots \varphi(e_{2j-2} e_{2j-1})\varphi(e_{2j})$ или $\varphi(e_1 e_2) \ldots \varphi(e_{2j-1} e_{2j})$ — приведено и является слабо циклически приведенным разложением, сопряженным с одним из p_i.

Для каждого соотношения $w \underset{H}{=} 1$ помимо построенной выше диаграммы существует и другая диаграмма вывода этого соотношения. А именно каждое соотношение r_j из множества R имеет в группе H нормальную форму $r_j = w_1 w_2 \ldots w_k$ $(w_i \in G_{l_i})$. Каждый слог w_i как элемент группы G_{l_i} можно представить некоторым минимальным в G_{l_i} словом (в смысле словарной метрики в группе G_{l_i}). Обозначим через $\Omega = \Omega(R)$ множество таких минимальных слов (т.е. для каждого слога каждого соотношения из множества R в Ω входит ровно одно слово, которое в соответствующем множителе минимально и равно этому слогу). Таким образом, любое соотношение r_j представляется словом в алфавите $\mathcal{A} = \bigcup_i \mathcal{A}_i$. При этом группа H имеет конечное задание $H = \langle \mathcal{A} | S \rangle$, где множество соотношений S включает в себя все R_i и все соотношения из R, записанные в образующих $\bigcup_i \mathcal{A}_i$. Слоговую длину будем обозначать символом $|w|$, а длину слова w в алфавите $\mathcal{A}$ — символом $\|w\|$. Запись $\|w\|$ будем также использовать для обозначения длин элементов свободных множителей в своих алфавитах $\mathcal{A}_i$.

При таком задании группы H для каждого слова W, равного единице в H, можно в силу леммы Ван Кампена построить над копредставлением $H = \langle \mathcal{A} | S \rangle$ диаграмму M вывода соотношения $W \underset{H}{=} 1$.

Заметим, что клетки, отвечающие соотношениям из R (R-клетки), разбивают диаграмму M на непересекающиеся поддиаграммы над отдельными свободными множителями G_i, границы которых имеют метки, составленные из слов множества $\Omega(R)$. В самом деле, все ребра каждой такой поддиаграммы помечены элементами одного и того же множителя. Следовательно, две такие поддиаграммы не могут иметь общее ребро и пересечение возможно лишь по некоторому множеству (граничных) вершин.

По каждой диаграмме M^* вывода соотношения $w \underset{H}{=} 1$ в смысле свободного произведения (диаграмме Линдона–Шуппа) можно построить диаграмму Ван Кампена M над копредставлением $H = \langle \mathcal{A} | S \rangle$. Для этого каждый слог x_j любого соотношения $r_i = x_1 \dots x_n \in R$ нужно заменить соответствующим словом $w_{i_j} \in \Omega(R)$ и затем каждую вторичную вершину заменить поддиаграммой вывода в соответствующем множителе G_j соотношения, читаемого при обходе всех полусегментов, встречающихся в этой вершине. Так, если из вторичной вершины v выходят полусегменты с метками $z_1, \dots, z_k$, то их концы попарно соединяем внутри соответствующих клеток путями с метками $\omega_i = z_{i-1}^{-1} z_i$. Эти пути ограничивают некую область, в которую можно "вклеить" диаграмму вывода в соответствующем множителе G_l соотношения $\omega_1 \cdot \ldots \cdot \omega_k = 1$. Поддиаграммы, на которые заменяются вторичные вершины, также будем называть *вторичными*. Условимся считать, что каждая вторичная поддиаграмма минимальна, т.е. содержит наименьшее число клеток среди всех диаграмм над соответствующим множителем G_l с тем же контуром.

Если при построении диаграммы Ван Кампена у некоторых полусегментов, выходящих из вторичной вершины v, совпадают конечные вершины, то с теоретико-множественной точки зрения вторичная поддиаграмма получается неодносвязной. Она имеет вид многоугольника, у которого попарно отождествлены некоторые вершины. Чтобы избежать сложностей, связанных с неодносвязностью, можно более широко определить понятие дисковой поддиаграммы, например как поддиаграммы, которую бесконечно малой деформацией можно привести к дисковой. Избавиться от неодносвязности можно также и путем 0-измельчения диаграммы (подробнее см. в [2]). В дальнейшем будем считать, что все вторичные поддиаграммы являются дисковыми.

Отметим, во-первых, что если вторичная вершина v является внешней, то при построении вторичной поддиаграммы концы пары полусегментов z_j, z_{j+1}, лежащих на границе диаграммы M^*, соединяем путем, помеченным минимальным словом, равным $z_j^{-1} z_{j+1}$ в группе G_l. Во-вторых, на вторичные поддиаграммы заменяются все вторичные вершины, даже те, из которых выходят ровно два полусегмента.

Таким образом, для каждого соотношения $w \underset{H}{=} 1$ будем рассматривать пару диаграмм M^* и M — диаграмму Линдона–Шуппа над свободным произведением $H = \langle F | R \rangle$ и диаграмму Ван Кампена над копредставлением $H = \langle \mathcal{A} | S \rangle$.

2. Гиперболические произведения. Для любого слова $w \underset{H}{=} 1$ определим $L(w)$ как наименьшее число $l \geqslant 0$, для которого слово w может быть представлено в группе F в виде

$$w = \prod_{i=1}^{l} u_i r_i^{\varepsilon_i} u_i^{-1}, \quad r_i \in R, \ \varepsilon_i = \pm 1.$$

Определение. Группа H называется *гиперболическим произведением групп* G_i, $i \in I$, если функция $L(w)$ ограничена сверху некоторой линейной функцией $C \cdot |w|$ от длины слова w.

Отметим, что данное определение не зависит от системы соотношений R. В самом деле, пусть R' — другая (конечная) система соотношений, эквивалентная R. В силу конечности и эквивалентности этих систем каждое соотношение из системы R' можно представить как произведение не более N элементов, сопряженных с соотношениями из R. Отсюда видно, что и с системой соотношений R' группа H также является гиперболическим произведением — константу C в данном выше определении достаточно домножить на N.

Ясно также, что в случае бесконечных циклических множителей G_i определение гиперболического произведения сводится к одному из определений гиперболической группы.

Теорема 1. *Гиперболическое произведение (конечного числа) гиперболических групп является гиперболической группой.*

Доказательство. Пусть $F = \underset{i}{*} G_i$, $i \in I$, и группа $H = \langle F | R \rangle$ является гиперболическим произведением групп G_i. Будем доказывать теорему в следующей формулировке: существует константа C, такая, что для любого слова w в алфавите $\mathcal{A}$, равного единице в группе H, существует диаграмма Ван Кампена M вывода соотношения $w = 1$ в $H = \langle \mathcal{A} | R \rangle$, число клеток $S(M)$ в которой не превосходит $C \cdot \|w\|$.

Рассмотрим слово w как элемент группы $H = \langle F|R\rangle$ и построим диаграмму Линдона–Шуппа M^* вывода соотношения $w \underset{H}{=} 1$. По определению гиперболического произведения существует такая константа k, что число $S(M^*)$ клеток в диаграмме M^* не превосходит $k \cdot |w|$.

По диаграмме M^* построим диаграмму Ван Кампена M указанным выше способом. Введем следующие обозначения: $\rho = \max\{|r|; r \in R\}$ — максимальная слоговая длина соотношений из R; ω — максимум длин (в метрике отдельных свободных множителей) слов из множества Ω; $P(M)$ — сумма периметров вторичных поддиаграмм $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, на которые R-клетки разбивают диаграмму M, и $N(M)$ — суммарное число клеток во всех этих вторичных поддиаграммах. Поскольку объединение контуров вторичных поддиаграмм совпадает с объединением контуров R-клеток и контура диаграммы M, то с учетом очевидного неравенства $|w| \leqslant \|w\|$ имеем

$$P(M) = \sum_{i=1}^{k} \|\partial\Delta_i\| \leqslant |w| \cdot k \cdot \rho \cdot \omega + \|w\| \leqslant \|w\| \cdot (k \cdot \rho \cdot \omega + 1).$$

Остается линейно ограничить число клеток во всех вторичных поддиаграммах суммой их периметров.

Поскольку все множители G_i гиперболичны, то в каждом из них выполнено линейное изопериметрическое неравенство. Но множителей конечное число. Значит, существует константа D, такая, что для всех вторичных поддиаграмм Δ_k выполнено линейное изопериметрическое неравенство

$$S(\Delta_k) \leqslant D \cdot \|\partial\Delta_k\|,$$

где $S(\Delta_k)$ — число клеток в поддиаграмме Δ_k. Суммируя неравенства для всех вторичных поддиаграмм, получаем линейную оценку для величины $N(M)$ через сумму периметров $P(M)$:

$$N(M) \leqslant D \cdot P(M).$$

Таким образом, общее число клеток во всех вторичных поддиаграммах $N(M)$ ограничено величиной $\|w\| \cdot D \cdot (k \cdot \rho \cdot \omega + 1)$. Складывая ее с числом R-клеток $S(M^*)$, получаем требуемую оценку:

$$\begin{aligned} S(M) = S(M^*) + N(M) \leqslant k \cdot |w| + \|w\| \cdot D \cdot (k \cdot \rho \cdot \omega + 1) \leqslant \\ \leqslant \|w\| \cdot (k + D \cdot (k \cdot \rho \cdot \omega + 1)) = C \cdot \|w\|. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Свободные произведения со стандартными условиями малых сокращений. Напомним традиционные условия малого сокращения над свободными произведениями.

Слово b называется *куском*, если множество R симметризовано [1] и содержит различные элементы r_1, r_2 с полуприведенными разложениями $r_1 = bc_1$ и $r_2 = bc_2$.

Скажем, что R удовлетворяет условию $C'(\lambda)$, если для любого куска b любого слова r из R (r имеет полуприведенное разложение $r = bc$) выполнено неравенство $|b| < \lambda|r|$. Далее, скажем, что R удовлетворяет условию $C(p)$, если никакой элемент из R не является произведением менее чем p кусков. И, наконец, R удовлетворяет условию $T(q)$ ($q \geqslant 4$), если для любого h, удовлетворяющего условию $3 \leqslant h < q$, и любых $r_1, \ldots, r_h \in R$, таких, что $r_i r_{i+1}^{-1} \neq e$ ($i = \overline{1,h}$), по крайней мере одно из произведений $r_1r_2, \ldots, r_{h-1}r_h, r_hr_1$ приведено.

Известно, что в случае групп условие гиперболичности является в некотором смысле обобщением условий малого сокращения. В частности, группы, удовлетворяющие условиям $C'(1/6)$ или $C'(1/4)\&T(4)$, являются гиперболическими [3]. Аналогичную картину мы наблюдаем и в случае свободных произведений. А именно справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $F = *G_i$, $i \in I$, и R — симметризованное множество слов из F, удовлетворяющее условию $C'(1/6)$. Тогда группа $H = \langle F|R\rangle$ является гиперболическим произведением групп G_i, $i \in I$.*

Доказательство. Для произведений с малым сокращением (т.е. в том случае, когда множество соотношений R удовлетворяет условию $C'(1/6)$) имеет место утверждение, аналогичное лемме Гриндлингера [1]. А именно в любой приведенной диаграмме над H найдется клетка, более половины контура которой принадлежит границе диаграммы. Из индуктивных соображений отсюда следует линейное изопериметрическое неравенство с константой $C = 1$. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую признательность А.Ю. Ольшанскому, предложившему рассмотреть понятие гиперболического произведения и оказавшему помощь в работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 96-01-00420.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М., 1980.
2. *Ольшанский А.Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М., 1989.
3. *Гис Э., де ла Арп П.* Гиперболические группы по Михаилу Громову. М., 1992.

Поступила в редакцию
17.11.97

УДК 513:944

МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ БИФУРКАЦИИ ФУНКЦИЙ МОРСА НА ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Н. В. Коровина

Введение. Проблема описания бифуркаций функций Морса (см., например, [1]) возникает в теории лиувиллевых слоений интегрируемых гамильтоновых систем. Понятие *атома*, введенное в этой теории [2] и позволяющее классифицировать такие системы с точностью до эквивалентности, представляет и самостоятельный интерес. Цель данной работы — описание максимально симметричных атомов. Эта естественная задача также важна для классификации многомерных особенностей слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем [3].

Основные определения. Рассмотрим 2-поверхность M^2 и функцию Морса f на ней. Функция f расслаивает M^2 на свои линии уровня. Функции Морса f и g, определенные на M^2 и N^2 соответственно, называются *послойно оснащенно эквивалентными в окрестности своих особых слоев* $f^{-1}(c)$ *и* $g^{-1}(c')$, если существуют $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ и диффеоморфизм $\lambda : f^{-1}(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \to g^{-1}(c'-\varepsilon', c'+\varepsilon')$, переводящий связные компоненты линий уровня функции f в связные компоненты линий уровня функции g и сохраняющий направление роста функций. *Атомом* называется окрестность связного критического уровня функции f, рассматриваемая с точностью до послойной оснащенной эквивалентности. Критические точки называются *вершинами атома*, а их число — *сложностью атома*. *Циклом* будем называть связную компоненту края атома, *положительным* (*отрицательным*) *циклом* — связную компоненту уровня $f^{-1}(c+\varepsilon)$ (соответственно $f^{-1}(c-\varepsilon)$). *Длиной положительного* (*отрицательного*) *цикла* будем называть число $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, где k_i — число обходов i-й вершины этим циклом, а n — сложность атома.

Симметрией атома называется гомеоморфизм атома на себя с точностью до изотопии, сохраняющий направление роста функции f. В ориентируемом случае (атом как двумерная поверхность может быть ориентируемым или неориентируемым) можно рассматривать только *собственные симметрии* атома, т.е. такие симметрии, которые сохраняют его ориентацию. Группа Sym^+ собственных симметрий ориентированного атома является подгруппой в группе Sym всех его симметрий, причем либо они совпадают, либо индекс Sym^+ в Sym равен 2.

Теорема 1. *Для атома X сложности n $|\mathrm{Sym}(X)| \leqslant 4n$; если X ориентируемый, $|\mathrm{Sym}^+(X)| \leqslant 2n$.*

Доказательство. Критический уровень функции Морса представляет собой некоторый граф (все вершины которого имеют степень 4) на рассматриваемом атоме — будем называть его *критическим графом.*

Возьмем какой-нибудь положительный цикл длины l. Пусть $v_1, \dots, v_l$ — вершины, которые он последовательно обходит; $e_1, \dots, e_l$ — ребра критического графа, которые последовательно обходятся данным циклом. Докажем, что симметрия s атома определяется набором $s(v_1), \dots, s(v_l)$, $s(e_1), \dots, s(e_l)$. В самом деле, этим набором однозначно определяется образ цикла $e_1, \dots, e_l$ критического графа, значит, определен образ целой ленточки (одна граница которой — рассматриваемый положительный цикл, а другая состоит из кусочков отрицательных циклов, идущих по $e_1, \dots, e_l$). Возьмем теперь какую-нибудь вершину атома и соединим ее с какой-нибудь из вершин цикла (атом