Ю. Е. Аниконов, Л. Н. Пестов, Интегральная геометрия и структура римановых пространств, *Докл. АН СССР*, 1989, том 307, номер 3, 521–523

Доклады Академии наук СССР
1989. Том 307, № 3

УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

Ю.Е. АНИКОНОВ, Л.Н. ПЕСТОВ

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И СТРУКТУРА РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 2 III 1988)

Пусть M – n-мерное, $n \geqslant 2$, односвязное, компактное класса C^∞ риманово многообразие с метрическим тензором $g = (g_{ij})$ и строго выпуклым краем ∂M.

Введем обозначения: (R_{ijkl}) – тензор кривизны метрики g, T_x – касательное пространство в x, ΩM – касательное расслоение единичных векторов, $\Omega M = \{(x, \xi):$ $x \in M,\ \xi \in T_x,\ |\xi| = \sqrt{g_{ij}(x)\,\xi^i\xi^j} = 1\}$ (по повторяющимся нижним и верхним индексам подразумевается здесь и ниже суммирование от 1 до n), $\Omega^-\partial M = \{(x, \xi):\ x \in \partial M,$ $\xi \in T_x, |\xi| = 1, (\xi, \nu(x)) \leqslant 0\}$, где $\nu(x)$ – внешняя нормаль к ∂M в точке x, $\gamma_{x,\xi}(t)$ – геодезическая, определенная начальными данными $\gamma_{x,\xi}(0) = x$, $\dot\gamma_{x,\xi}(0) = \xi$, $|\xi| = 1$, $t \geqslant 0$. Множество гладких (класса C^∞) ковариантных симметрических тензорных полей валентности m, $m \geqslant 0$, на M и ∂M обозначим соответственно $S_m M$ и $S_m\partial M$. На $S_m M$ определена операция симметрического ковариантного дифференцирования $d: S_m M \to S_{m+1}M$, $d = \sigma\nabla$, где σ – оператор симметрирования, ∇ – оператор ковариантного дифференцирования относительно метрики g. Будем в дальнейшем предполагать, что многообразие M рассеивающее: любая его геодезическая покидает компакт $k \subset M$, $k \cap \partial M = 0$. Функцию $t^0(x, \xi)$, $(x, \xi) \in \Omega^-\partial M$, определим как длину геодезической $\gamma_{x,\xi}(t)$, $(x, \xi) \in \Omega^-\partial M$ и будем называть ее годографом метрики g. В силу сделанных предположений относительно M годограф $t^0(x, \xi)$ корректно определен на $\Omega^-\partial M_0$.

Пусть $u \in S_m M$, $u = (u_{i_1}, \dots, {}_{i_m})$, $m \geqslant 0$. Рассмотрим интегралы по геодезическим, соединяющим точки края ∂M многообразия M:

$$(1)\qquad u(x, \xi) = \int\limits_0^{t^0(x,\xi)} u_{i_1,\dots,i_m}(\gamma_{x,\xi}(t))\,\dot\gamma_{x,\xi}^{i_1}(t)\dots\dot\gamma_{x,\xi}^{i_m}(t)\,dt, \qquad (x, \xi) \in \Omega^-\partial M.$$

В [1, 2] изучался вопрос об однозначности определения поля $u(x)$, $x \in M$, интегралами (1). Используемый здесь основной результат работы [2] сформулируем в виде теоремы интегральной геометрии.

Теорема 1. *Пусть M – компактное рассеивающее многообразие со строго выпуклым краем ∂M и секционные кривизны M неположительны, т.е. в каждой точке $x \in M$ $R_{ijkl}\,\xi^i\eta^j\xi^k\eta^l \leqslant 0$ для любых $\xi, \eta \in T_x$. Тогда интегралы* (1) *обращаются в нуль при $(x, \xi) \in \Omega^-\partial M$, если и только если*

$$u = dv, \quad v \in S_{m-1}M, \quad v|_{\partial M} = 0, \quad m \geqslant 1,$$

$$u = 0, \quad \text{если} \quad m = 0.$$

Такие теоремы интегральной геометрии позволяют, оказывается, выяснить по интегральной информации структуру римановых пространств, (например, разложимость, [3–6]).

Новым результатом этого направления здесь являются приводимые ниже теоремы о структуре пространства M.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Уравнения геодезических допускают первый интеграл*

$$(2)\qquad I(\gamma_{x,\xi}(t), \dot\gamma_{x,\xi}(t)) = u_{i_1\ldots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t))\,\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t)\ldots\dot\gamma^{i_m}_{x,\xi}(t), \qquad (x,\xi)\in\Omega M,$$

где $u = (u_{i_1\ldots i_m}) \in S_mM$, $m \geqslant 1$, *если и только если существует поле* $u^0 \in S_m\partial M$ *такое, что*

$$(3)\qquad u^0_{i_1\ldots i_m}(x)\,\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_m} = u^0_{i_1\ldots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t^0(x,\xi)))\,\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t^0(x,\xi))\ldots\dot\gamma^{i_m}_{x,\xi}(t(x,\xi)),$$
$$(x,\xi)\in\Omega^-\partial M.$$

Наметим д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $I(\gamma_{x,\xi}(t), \dot\gamma_{x,\xi}(t))$ – первый интеграл уравнений геодезических, т.е. $dI(\gamma_{x,\xi}(t), \dot\gamma_{x,\xi}(t))\,dt = 0$. Тогда в силу начальных данных $\gamma_{x,\xi}(0) = x$, $\dot\gamma_{x,\xi}(0) = \xi$, $I(x,\xi) = I(\gamma_{x,\xi}(t), \dot\gamma_{x,\xi}(t))$. В частности, при $(x,\xi)\in\Omega^-\partial M$, $t = t^0(x,\xi)$ получаем (3), где $u^0 = u|_{\partial M}$. Пусть, наоборот, выполнено (3) для некоторого поля $u^0 \in S_m\partial M$, $m \geqslant 1$, и $\tilde u(x)$, $x\in M$, – продолжение поля u^0, $\tilde u \in S_mM$. Рассмотрим функцию

$$\tilde I(\gamma_{x,\xi}(t), \dot\gamma_{x,\xi}(t)) = \tilde u_{i_1\ldots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t))\,\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t)\ldots\dot\gamma^{i_m}_{x,\xi}(t), \quad (x,\xi)\in\Omega^-\partial M.$$

Дифференцирование по t и последующее интегрирование от $t = 0$ до $t = t^0(x,\xi)$ приводят к равенству

$$\tilde I(\gamma_{x,\xi}(t), \dot\gamma_{x,\xi}(t)) - \tilde I(x,\xi) =$$
$$= \int\limits_0^{t^0(x,\xi)} (d\tilde u)_{i_1\ldots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t))\,\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t)\ldots\dot\gamma^{i_m}_{x,\xi}(t)\,dt, \qquad (x,\xi)\in\Omega^-\partial M.$$

Поскольку $\tilde u|_{\partial M} = u^0$, то из (3) следует

$$\int\limits_0^{t^0(x,\xi)} (d\tilde u)_{i_1\ldots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t))\,\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t)\ldots\dot\gamma^{i_m}_{x,\xi}(t)\,dt = 0, \qquad (x,\xi)\in\Omega^-\partial M.$$

По теореме 1 из этого равенства следует, что существует поле $v = S_mM$ такое, что $d\tilde u = dv$ и $v|_{\partial M} = 0$. Но тогда поле $u = \tilde u - v$ удовлетворяет равенству $du = 0$, что эквивалентно наличию интеграла (2). Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Годограф* $t^0(x,\xi)$ *метрики* g *представим в виде*

$$t^0(x,\xi) = u^0_{i_1\ldots i_{2k-1}}(\gamma_{x,\xi}(t^0(x,\xi)))\,\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t^0(x,\xi))\ldots\dot\gamma^{i_{2k-1}}_{x,\xi}(t^0(x,\xi)) -$$
$$- u^0_{i_1\ldots i_{2k-1}}(x)\,\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_{2k-1}}, \qquad (x,\xi)\in\Omega^-\partial M,$$

где $u^0 \in S_{2k-1}\partial M$, $k \geqslant 1$, *если и только если существует поле* $u\in S_{2k-1}M$ *такое, что*

$$(4)\qquad du = \sigma(\underbrace{g\otimes g\otimes\ldots\otimes g}_{k}).$$

Вопрос о более детальном описании структуры римановых многообразий, на которых существует тензорное поле u, удовлетворяющее (4) или такое, что $du = 0$, является классической задачей и, как представляется, в общем случае остается открытым. Рассмотрим уравнение $du = 0$, $u \in S_m u$, в случае конформно-евклидовой метрики: в некоторой системе координат $g_{ij}(x) = \lambda(x)\delta_{ij}$, где $\delta = (\delta_{ij})$ – единичная матрица. Уравнение $du = 0$ в данном случае приобретает такое представление:

$$(5) \qquad \lambda^2 d^0 v + \frac{1}{2} \sigma (\delta \otimes v/\lambda_x^2) = 0,$$

где $d^0 = \sigma \nabla^0$, $\quad \nabla_i^0 = \partial/\partial x^i$, $\quad v/\lambda_x^2 = \sum\limits_{i_m = 1}^{n} v_{i_1 \ldots i_m} \lambda_x^2 i m$.

Используя результаты работы [7], можно показать, что решение уравнения (5) записывается в виде

$$(6) \qquad v = v^0 + \sigma (\delta \otimes w),$$

где $w \in S_{m-2}M$, поле v^0 такое, что

$$(7) \qquad dv^0 = \sigma (\delta \otimes w^0),$$

w^0 – некоторое поле валентности $m-2$. Если $n > 2$, то компоненты поля $v^0(x)$ являются, по-видимому, полиномами степени не выше $2m$. (Поле w и функция $\lambda(x)$ удовлетворяют системе уравнений, вытекающей из (5)–(7)). В случае $m = 1$, $n > 2$, $v(x) = v^0(x)$ и имеет место формула [3]

$$(8) \qquad v(x) = a_0 x + Ax - b\,|\,x\,|^2 + 2x(b, x) + c,$$

где $a_0 = \mathrm{const}$, A – постоянная кососимметрическая матрица, b и c – постоянные векторы. При $m > 1$ и $n > 2$ соотношению (7) удовлетворяют поля вида

$$v^0_{i_1 \ldots i_m} = a_{j_1 \ldots j_m} v^{j_1}_{i_1} \ldots v^{j_m}_{i_m},$$

где $(a_{j_1 \ldots j_m})$ – постоянный симметрический тензор, v^k, $k = 1, \ldots, m$, – векторные поля вида (8).

Институт математики и
Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
31 III 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пестов Л.Н.* В кн.: Методы исследования неклассических задач математической физики. Новосибирск, 1985, с. 90–94. 2. *Пестов Л.Н., Шарафутдинов В.А.* – ДАН, 1987, т. 295, № 6, с. 1318–1320. 3. *Аниконов Ю.Е.* – ДАН, 1979, т. 245, № 3, с. 521–523. 4. *Аниконов Ю.Е.* – ДАН, 1980, т. 252, № 1, с. 14–17. 5. *Аниконов Ю.Е.* – Матем. заметки, 1984, т. 35, № 6, с. 841–845. 6. *Пестов Л.Н.* В кн.: Вопросы корректности и методы исследования обратных задач. Новосибирск, 1986, с. 103–106. 7. *Шарафутдинов В.А.* О симметричных тензорных полях на римановом многообразии. Новосибирск, Препринт ВЦ СО АН СССР № 539, 1984, 45 с.