Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. Л. Ершов, Разрешимость некоторых неэлементарных теорий, *Алгебра и логика. Семинар*, 1964, том 3, номер 2, 45–47

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
`http://www.mathnet.ru/rus/agreement`

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.172
17 января 2025 г., 21:54:13

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том III
Выпуск 2 Руководитель А.И.Мальцев 1964 г.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ

Ю.Л.Ершов

Пусть K-класс моделей сигнатуры σ . *Расширенной теорией* (в отличие от элементарной теории) класса K назовем множество всех предложений исчисления второй ступени, в которых в качестве константных предикатов встречаются только предикаты из σ , а кванторы берутся только по предметным переменным и одноместным предикатам.

Вопрос о разрешимости расширенной теории класса моделей K можно свести к вопросу о разрешимости элементарной теории другого класса моделей $\widetilde{K}$. Такое сведение позволяет пользоваться для доказательства разрешимости расширенной теории методами, разработанными для элементарных теорий.

Пусть $\mathfrak{M}=\langle M, P_1^{n_1},\ldots, P_k^{n_k}\rangle$- модель сигнатуры $\sigma=\langle P_1^{n_1},\ldots, P_k^{n_k}\rangle$.

Стандартным расширением модели $\mathfrak{M}$ назовем модель $\widetilde{\mathfrak{M}}=\langle 2^M, \cap, \cup, C, \widetilde{P}_1^{n_1},\ldots,\widetilde{P}_k^{n_k}\rangle$сигнатуры $\sigma_1=\langle \cap, \cup, C, \widetilde{P}_1^{n_1},\ldots,\widetilde{P}_k^{n_k}\rangle$, где 2^M означает,что основное множество модели $\widetilde{\mathfrak{M}}$ состоит из всех подмножеств множества M , операции $\cup, \cap, C$ - это обычные теоретико-множественные операции объединения, пересечения и дополнения; предикат $\widetilde{P}_i^{n_i}$ определим так: если одноэлементные подмножества множества M отождествить с соответствующими элементами множества M, то можно считать, что M содержится в 2^M; предикат $\widetilde{P}_i^{n_i}$ истинен на наборе n_i элементов из 2^M тогда и только тогда, когда все эти элементы принадлежат M и на них истинен предикат $P_i^{n_i}$ в модели $\mathfrak{M}$. Если K - класс моделей, то $\widetilde{K}=\{\widetilde{\mathfrak{M}} \mid \mathfrak{M}\in K\}$.

Следующая теорема очевидна.

ТЕОРЕМА. Вопрос о разрешимости или неразрешимости расширенной теории класса K эквивалентен соответствующему вопросу для элементарной теории класса $\widetilde{K}$

Укажем некоторые приложения этой теоремы.

I. Пусть K – класс моделей вида $\mathfrak{M}=\langle M,=\rangle$, где $=$ – обычный предикат равенства на множестве M. Тогда $\widetilde{K}=\{\langle 2^M,\cap,\cup,C,=\rangle \mid \mathfrak{M}\in K\}$ – класс полных атомных булевых алгебр. Разрешимость элементарной теории этого класса хорошо известна (теория этого класса совпадает с теорией класса конечных булевых алгебр). Расширенная теория класса K – это расширенная теория равенства, так что разрешимость класса конечных булевых алгебр эквивалентна теореме Левенгейма о разрешимости расширенной теории равенства.

2. Пусть $\widetilde{K}$ – класс, который указан в п.I. Рассмотрим класс $\mathcal{P}(\widetilde{K},\widetilde{K})$ всех обобщенных произведений[I] моделей из $\widetilde{K}$, алгебры множеств для взятия обобщенных произведений берутся также из класса $\widetilde{K}$. В сигнатуре $\mathcal{P}(\widetilde{K},\widetilde{K})$ оставим только $\cap,\cup,C,=$ (равенство) и $\sim$ (эквивалентность), где эквивалентность $\sim$ определяется так: $f_0\sim f_1 \overset{df}{\Longleftrightarrow} \langle A(X_0)\,\&\,A(X_1)\,\&\,X_0\cup X_2=1\,\&\,X_1\cup X_3=1\,\&\,X_0=X_1;$ $A(V_0), A(V_1), V_0=0, V_1=0\rangle$, где $A(X)$ формула, которая утверждает, что X – атом булевой алгебры ($A(X)\overset{df}{\Longleftrightarrow} X\neq 0\ \&\ \forall y(y\leqslant X\to y=0\vee y=X)$), операции $\cap,\cup,C$ определяются обычным образом, как у прямого произведения, например, $f_0=f_1\cap f_2 \overset{df}{\Longleftrightarrow}\langle X_0=1;\ V_0=V_1\cap V_2\rangle$.

Если класс $\mathcal{P}(\widetilde{K},\widetilde{K})$, рассматриваемый в указанной сигнатуре, обозначить через K_1, то легко проверить, что $K_1=\widetilde{K}_2$, где K_2 – класс всех моделей вида $\mathfrak{M}=\langle M,=,\sim\rangle$, где $\sim$ отношение эквивалентности на множестве M. Из разрешимости класса $\widetilde{K}$ и теоремы Фефермана и Воота следует разрешимость класса $\mathcal{P}(\widetilde{K},\widetilde{K})$, а следовательно, и разрешимость расширенной теории эквивалентности и равенства.

3. Рассматривая классы $\mathcal{P}(K_1,\widetilde{K})=K_2$, $\mathcal{P}(K_2,\widetilde{K})=K_3\ldots$ в подходящим образом подобранных сигнатурах, можно легко доказать следующую

ТЕОРЕМУ. Для любого конечного n расширенная теория n вписанных эквивалентностей (то есть расширенная теория класса моделей вида $\mathfrak{M}=\langle M,=,\sim_1,\ldots,\sim_n\rangle$, где $\sim_i$ – отношение эквивалентности на M для $i=1,\ldots,n$ и $x\sim_i y\to x\sim_j y$, если $i<j$) разрешима.

4. Бюхи[2] доказал, что расширенная теория модели $\mathfrak{N}=\langle N,<\rangle$, где N – множество натуральных чисел, а $<$ – обычное отношение

порядка, то есть расширенная теория множества, упорядоченного по типу ω , разрешима. В [2] поставлен вопрос: не будет ли разрешима расширенная теория множества, упорядоченного по типу ω^2 .

Рассмотрим $\mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{H}})$ – обобщенную степень $\widetilde{\mathcal{H}}$ относительно алгебры множеств $\widetilde{\mathcal{H}}$, в сигнатуре $\cap, \cup, C, <$, где $f_0 < f_1 \overset{df}{\Longleftrightarrow}$

$$\langle \{ [X_0 < X_1 \& X_0 \cup X_3 = 1 \& X_1 \cup X_4 = 1] \vee [A(X_2) \& X_2 \cup X_3 = 1] \}; A(V_0), A(V_1), V_0 < V_1, V_0 = 0, V_1 = 0 \rangle,$$

а $\cap, \cup, C$ и A, как в п. 2.

Теперь нетрудно видеть, что $\mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{H}})$ есть стандартное расширение для множества, упорядоченного по типу ω^2 . Из разрешимости $\widetilde{\mathcal{H}}$ следует разрешимость $\mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{H}})$, а следовательно, и разрешимость расширенной теории множества, упорядоченного по типу ω^2.

5. Рассматривая обобщенные произведения, разрешимость ранее доказанных теорий, определяя порядок, как и в п.4, легко доказать по индукции, что разрешимы расширенные теории множеств, упорядоченных по типу ω^n для $n = 2, 3, \ldots$.

Если для взятия обобщенных произведений использовать конечные алгебры множеств, у которых атомы линейно упорядочены (теория каждой такой алгебры, очевидно, разрешима), и использовать разрешимость расширенных теорий множеств, упорядоченных по типам ω^n, $n = 1, 2, \ldots$, то уже нетрудно доказать

ТЕОРЕМУ. Для любого вполне упорядоченного множества типа $< \omega^\omega$ его расширенная теория разрешима.

Остаются открытыми естественно возникающие вопросы:

I. Не будет ли разрешима расширенная теория любого вполне упорядоченного множества, класса всех вполне упорядоченных множеств ?

2. Не будет ли разрешима расширенная теория класса всех линейно упорядоченных множеств ?

Поступила в редакцию
I4.III. I964 г.

Литература

1. Feferman S, Vaught R. The first order properties of algebraic systems , Fund.Math., 47(1953), 57–105.

2. Büchi I.R. On a decision method in restricted second order arithmetic. Logic, methodology and philosophy of science, proceedings of the 1960 International Congress, Stanford University Press, Stanford, California, (1962), 1–11.