Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Следующие утверждения верны.*

1) *Функционал $J(u)$ определён в каждой точке пространства $H(\Omega)$.*
2) *Функционал $J(u)$ дифференцируем в любой точке $u \in H(\Omega)$ и $\operatorname{grad} J(u) = u - G(u)$, где $G(u) \in H(\Omega)$.*
3) *Функционал $J(u)$ является возрастающим в $H(\Omega)$.*

Из пункта 2) теоремы следует важное следствие.

Следствие. *Множество критических точек функционала $J(u)$ совпадает с множеством обобщённых решений задачи* (1), (4).

Тогда [1] функционал $J(u)$ имеет точку абсолютного минимума на $H(\Omega)$ являющуюся обобщённым решением задачи (1), (4).

1. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956. — 393 с.

Кафедра прикладной математики,

Камская государственная инженерно-экономическая академия;

423810, г. Набережные Челны, пр. Мира, 13.

ildar-han@mail.ru

УДК 517.929

В. В. Малыгина

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_0 x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x\left(t - r_k(t)\right), & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(\xi) = 0, & \xi \notin \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{1}$$

где a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — вещественные постоянные, а ненулевые функции $r_k \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ измеримы по Лебегу.

Решением уравнения (1) назовём [1] абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению почти всюду.

В данной работе приводятся условия на коэффициенты a_k, при выполнении которых для любых запаздываний r_k, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant r_k(t) \leqslant \omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

решения уравнения (1) являются знакопостоянными и асимптотически устойчивыми.

Зафиксируем набор положительных чисел $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ и обозначим через D_ω множество векторов $(p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, обладающих следующими свойствами:

а) $p_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

б) $p_0 < \sum_{k=1}^n p_k$;

в) существует такое $\xi_0 \geqslant p_0$, что $\xi_0 - \sum_{k=1}^n p_k e^{(\xi_0 - p_0)\omega_k} = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in D_\omega$ *и выполнены условия* (2). *Тогда:*

– *любое нетривиальное решение уравнения* (1) *сохраняет знак на* $\mathbb{R}_+$;

– *существует* $T \geqslant 0$ *такое, что при* $t \geqslant T$ *все нетривиальные решения уравнения* (1) *являются монотонными;*

– *при всех* $t \geqslant T$ *для любого нетривиального решения уравнения* (1) *справедлива оценка*

$$0 < x(t) \leqslant N e^{-\gamma(t-T)}, \text{ если } x(0) > 0,$$
$$0 > x(t) \geqslant N e^{-\gamma(t-T)}, \text{ если } x(0) < 0,$$

где $N > 0$, *а* $\gamma = -a_0 + \sum_{k=1}^n a_k > 0$.

Чтобы сделать применение теоремы 1 эффективным дадим геометрическое описание области D_ω.

Теорема 2. *Область* D_ω *есть подмножество пространства* $\mathbb{R}^{n+1}$, *ограниченное в координатах* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *гиперплоскостями* $a_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *гиперплоскостью* $a_0 = \sum_{k=1}^n a_k$ *и гиперповерхностью, заданной параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} \xi - \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k e^{(\xi - a_0)\omega_k} = 0, \\ 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \omega_k e^{(\xi - a_0)\omega_k} = 0, \end{cases}$$

где параметр ξ пробегает множество $[a_0, +\infty)$.

Пример 1. Пусть $n = 0$. Тогда $D_\omega = \{a_0 \in \mathbb{R} \colon a_0 < 0\}$.

Пример 2 [2]. Пусть $a_0 = 0$, $n = 1$. Тогда $D_\omega = \{a_1 \in \mathbb{R} \colon 0 < a_1\omega_1 \leqslant \frac{1}{e}\}$.

Пример 3 [3]. Пусть $a_0 \neq 0$, $n = 1$. Тогда $D_\omega = \{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant a_1\omega_1 < 1, a_0\omega_1 < a_1\omega_1 \leqslant e^{a_0\omega_1 - 1}\}$.

Пример 4. Пусть $a_0 = 0$, $n = 2$, $\omega_1 > \omega_2$. Тогда $D_\omega = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \colon a_1 \geqslant 0, a_2 \geqslant 0, a_1 + a_2 > 0, a_2 \leqslant \varphi(a_1)\}$, где кривая $p_2 = \varphi(p_1)$ задаётся параметрическими уравнениями

$$p_1 = \frac{\xi\omega_2 - 1}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\xi\omega_1}, \quad p_2 = \frac{\xi\omega_1 - 1}{\omega_1 - \omega_2} e^{-\xi\omega_2}, \quad \xi \in \left[\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}\right].$$

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введние в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.
2. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 352 с.
3. *Гусаренко С. А., Домошницкий А. И.* Об асимптотических и осцилляционных свойствах линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка // *Дифференц. уравнения*, 1989. — Т. 25, № 12. — С. 2090–2103.

Кафедра вычислительной математики и механики,

Пермский государственный технический университет;

614000, г. Пермь, Комсомольский пр., 29.

mavera@list.ru

УДК 517.956

И. Г. Мамедов

О НОВЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ФУНКЦИЙ В ОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С. Л. СОБОЛЕВА

Интегральные представления функций из соболевских пространств с доминирующими смешанными производными изучены