Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

N. Koschliakov, О приложении полиномов Лагерра к теории чисел,
Журн. Лен. физ.-мат. общ., 1927, том 1, выпуск 2, 275–280

https://www.mathnet.ru/lfmo25

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.174
24 апреля 2025 г., 22:07:33

Ueber eine Zahlentheoretische Anwendung der Laguerreschen Polynome.

Von N. Koschliakov.

Es sei $r_\kappa(m)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichungen

$$x_1^2 + x_1^2 + + \ldots + x_\kappa^2 = m, \quad k \geq 2.$$

Bezeichnen also

$$q = e^{-\pi a}, \quad a > 0$$

und stellen sich die Aufgabe den asymptotischen Ausdruck für die weit stehende Gliedern in Entwiklung der Function

$$(1) \qquad \theta_\kappa(u) = 1 + r_\kappa(1)\, q e^{-u} + \ldots + r_\kappa(n)\, q^n e^{-nu} + \ldots$$

in Potenzreiche zu finden.

Die Formel (1) ergibt

$$\theta_\kappa(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n u^n,$$

wo der Kürze wegen

$$(2) \qquad A_n = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} r_\kappa(m)\, m^n e^{-\pi a m}.$$

Um den asymptotischen Ausdruck der A_n bei grossen n zu erhalten, beweisen wir die Transformationformel

$$(3) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} r_\kappa(m)\, m^n e^{-\pi a m} =$$

$$= \frac{n!}{\pi^n \cdot a^{n+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} r_\kappa(m)\, e^{-\frac{\pi m}{a}} L_n^{\left(\frac{\kappa}{2}-1\right)}\left(\frac{\pi m}{a}\right),$$

wo die $L_n^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)$ die zum Parameter $\alpha = \frac{k}{2} - 1$ gehörigen Laguerreschen Polynome sind:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n e^{-x} x^{n+\alpha}}{dx^n}, \quad \alpha > -1, \tag{4}$$

Mittels (4) und der elementaren Formel [1])

$$\frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{e^{-\frac{\mu^2}{a}}}{(\sqrt{a})^k}\right\} = \frac{(-1)^n}{\mu^{k-2}\cdot a^{n+1}} \frac{d^n e^{-\frac{\mu^2}{a}}\left(\frac{\mu^2}{a}\right)^{n+\frac{k}{2}-1}}{d\left(\frac{\mu^2}{a}\right)^n},$$

erhalten wir

$$\frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{e^{-\frac{\mu^2}{a}}}{(\sqrt{a})^k}\right\} = \frac{(-1)^n n!}{a^{n+\frac{k}{2}}} L_n^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\left(\frac{\mu^2}{a}\right) e^{-\frac{\mu^2}{a}}. \tag{5}$$

Differentiiert man die bekante Formel

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_k(m)\, e^{-\pi m a} = \sum_{m=0}^{\infty} r_k(m) \frac{e^{-\frac{\pi m}{a}}}{(\sqrt{a})^k}$$

n mal nach a, so kommen wir zur gesuchten Transformationformel (3)

Aus (2) und (3) folgt

$$A_n = \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\pi^n a^{n+\frac{k}{2}}} + \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{\pi^n \cdot a^{n+\frac{k}{2}}} \sum_{m=1}^{\infty} r_\kappa(m) L_n^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\left(\frac{\pi m}{a}\right) e^{-\frac{\pi m}{a}}.$$

Um den asymptotischen Ausdruck der Summen (6) bei grossen n zu erhalten, ersetzen wir den Laguerreschen Polynom $L_n^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)$ durch seihen asymptotischen Ausdruck.

---

[1]) Auf diese Formel für den Spezial Fall $k = 1$ hat uns H. P. Bernays hingewiesen.

In einen neuderdings veröffentlichen Arbeit hat H. G. Szegö [1]) gezeigt, dass

$$(7)\quad e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{2\alpha+1}{4}\pi\right) + R_n,$$

wobei

$$R_n = x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) + x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}+\varkappa}\right)$$

und

$$n^{-\delta} \leq x \leq n^{\varepsilon},\quad 0 < \delta < 1,\quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{3},\quad \varkappa > \frac{3\varepsilon}{2}.$$

sind.

Es gilt nach (7)

$$(8)\quad \sum_{m=1}^{\infty} r_k(m) L_n^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\left(\frac{\pi m}{a}\right) e^{-\frac{\pi m}{a}} =$$

$$= \pi^{-\frac{k+1}{4}} a^{\frac{k-1}{4}} n^{\frac{k-3}{4}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_k(m)}{m^{\frac{k-1}{4}}} \cos\left(2\sqrt{\frac{\pi m n}{a}} - \frac{k-1}{4}\pi\right) e^{-\frac{\pi m}{2a}} +$$

$$+ O\left(n^{\frac{k+5}{4}+\eta}\right),$$

wobei η eine beliebig kleine, feste positive Zahl ist.

Aus (6) und (8) folgt

$$A_n = \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \pi^n a^{n+\frac{k}{2}}} +$$

$$+ \frac{n^{\frac{k-3}{4}}}{\pi^{n+\frac{k+1}{4}} a^{n+\frac{k+1}{4}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_k(m)}{m^{\frac{k-1}{4}}} \cos\left(2\sqrt{\frac{\pi m n}{a}} - \frac{k-1}{4}\pi\right) e^{-\frac{\pi m}{2a}} +$$

$$+ \frac{1}{(\pi a)^n} O\left(n^{\frac{k-5}{4}+\eta}\right).$$

---

[1]) Mathem. Zeitschrift. 25 Bd. 1 h. 1926.

Mittels der Stirlingschen Formel erhalten wir den asymptotischen Ausdruck

$$(9) \qquad A_n = \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}{n!\,(\pi a)^{n+\frac{k+1}{4}}} \left\{ \frac{\pi^{\frac{k+1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) a^{\frac{k-1}{4}}} + \right.$$

$$\left. + n^{\frac{1-k}{4}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_k(m)}{m^{\frac{k-1}{4}}} \cos\left(2\sqrt{\frac{\pi m n}{a}} - \frac{k-1}{4}\pi\right) e^{-\frac{\pi m}{2a}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{\kappa+1}{4}-\eta}}\right) \right\}.$$

Aus (9) folgt dann für genügend grosse n

$$(10) \qquad A_n = \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}{n!\,(\pi a)^{n+\frac{\kappa+1}{4}}} \left\{ \frac{\pi^{\frac{\kappa+1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) a^{\frac{\kappa-1}{4}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{\kappa-1}{4}}}\right) \right\}.$$

Für $k = 1$ muss die Function $\theta_\kappa(u)$ durch Iacobische Functionen

$$\theta_1(u) = 1 + 2q \cos 2\nu + 2q^4 \cos 4\nu + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n u^{2n},$$

$$\mathrm{H}_1(u) = 2\sqrt[4]{q} \cos \nu + 2\sqrt[4]{q^9} \cos 3\nu + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n u^{2n},$$

$$\theta(u) = 1 - 2q \cos 2\nu + 2q^4 \cos 4\nu + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n u^{2n},$$

$$\mathrm{H}(u) = 2\sqrt[4]{q} \sin \nu - 2\sqrt[4]{q^9} \sin 3\nu + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D_n u^{2n+1},$$

$$q = e^{-\pi\frac{\kappa'}{\kappa}}, \quad \nu = \frac{\pi}{2}\,\frac{u}{k},$$

ersezt werden.

Die asymptotischen Ausdrücke für A_n, B_n, C_n und D_n habe ich in der Arbeit „On Sonine's Polynomials" [1]) erhalten. Ich bewiese dort das folgende

$$A_n = \left(\frac{e\pi}{4nkk'}\right)\sqrt{\frac{k}{2\pi nk'}}\left\{1 + \right. \tag{11}$$

$$\left. + 2\sum_{m=1}^{\infty} \cos\left[2m\sqrt{\frac{n\pi k}{k'}}\right] e^{-\frac{\pi\kappa m^2}{2\kappa'}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{n}}\right\},$$

$$B_n = \left(\frac{e\pi}{4nkk'}\right)\sqrt{\frac{k}{2\pi nk'}}\left\{1 + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos\left[2m\sqrt{\frac{n\pi k}{k'}}\right] e^{-\frac{\pi\kappa m^2}{2\kappa'}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{n}}\right\},$$

$$C_n =$$

$$= \left(\frac{e\pi}{4nkk'}\right)\sqrt{\frac{k}{2\pi nk'}}\left\{2\sum_{m=1}^{\infty} \cos\left[(2m-1)\sqrt{\frac{n\pi k}{k'}}\right] e^{-\frac{\pi\kappa(2m-1)^2}{8\kappa'}} + \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{n}}\right\},$$

$$D_n =$$

$$= \left(\frac{e\pi}{4nkk'}\right)\frac{1}{2\sqrt{2nk'}}\left\{2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sin\left[(2m-1)\sqrt{\frac{n\pi k}{k'}}\right] e^{-\frac{\pi\kappa(2m-1)^2}{8\kappa'}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{n}}\right\}$$

wobei die Grössen ε_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ in Bezug zu n begrentz sind.

Die Hauptglieder in den Formeln (11) für die Koefficiente A_n und C_n sind dieselben, wie in bekanten Stieltlesschen Formel, die er auf ganz anderem Weg erhalten hat [2]).

[1]) Messenger of Mathematics, February ,1926.
[2]) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. t. I. lettre 227.

О приложении полиномов Лагерра к теории чисел.

Н. С. Кошляков.

Автор дает асимптотическое выражение для коэффициентов разложения функции

$$\theta_{\kappa}(u) = 1 + r_{\kappa}(1)\, q\, e^{-u} + \ldots + r_{\kappa}(n)\, q^{n} e^{-nu} + \ldots,$$

где $q = e^{-\pi a}$ $(a > 0)$ и $r_{\kappa}(m)$ число целых решений уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{\kappa}^2 = m \quad (k \geq 2).$$

При $k = 1$ функция $\theta_{\kappa}(u)$ заменяется известными функциями Jacobi, и соответствующие асимптотические выражения были даны автором в его статье „On Sonine's Polynomials“ (Messenger of Math., February, 1926).