A. B. Muravnik, Asymptotic properties of solutions of two-dimensional differential-difference elliptic problems,
CMFD, 2017, Volume 63, Issue 4, 678–688

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 678–688

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-678-688 УДК 517.929

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

© 2017 г. **А. Б. МУРАВНИК**

Аннотация. В полуплоскости $\{-\infty < x < +\infty\} \times \{0 < y < +\infty\}$ рассматривается задача Дирихле для дифференциально-разностных уравнений вида $u_{xx} + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k u_{xx}(x + h_k, y) + u_{yy} = 0$, где количество нелокальных членов уравнения m произвольно, а на их коэффициенты $a_1, \dots, a_m$ и параметры $h_1, \dots, h_m$, определяющие сдвиги независимой переменной x, не накладывается никаких условий соизмеримости. Единственное условие, накладываемое на коэффициенты и параметры изучаемого уравнения — отрицательность вещественной части символа оператора, действующего по переменной x.

Ранее было доказано, что при выполнении указанного условия (т. е. условия сильной эллиптичности соответствующего дифференциально-разностного оператора) рассматриваемая задача разрешима в смысле обобщенных функций (по Гельфанду—Шилову), построено интегральное представление решения формулой пуассоновского типа, установлена гладкость этого решения вне граничной прямой.

В настоящей работе исследуется поведение указанного решения при $y \to +\infty$. Доказывается теорема об асимптотической близости исследуемого решения и решения классической задачи Дирихле для дифференциального эллиптического уравнения (с той же самой граничной функцией, что и в исходной нелокальной задаче), определяемого следующим образом: в исходном дифференциально-разностном эллиптическом уравнении все параметры $h_1, \dots, h_m$ полагаются равными нулю. Как следствие, устанавливается, что для исследуемых решений справедлив классический критерий стабилизации Репникова—Эйдельмана: решение стабилизируется при $y \to +\infty$ тогда и только тогда, когда среднее значение граничной функции на интервале $(-R, +R)$ имеет предел при $R \to +\infty$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теория дифференциально-разностных (и, более широко — функционально-дифференциальных) эллиптических уравнений в частных производных в настоящее время активно развивается как в теоретическом плане, так и в плане многочисленных приложений. Для задач в ограниченных областях глубокое и полное изложение указанной теории (а также тесной связанной с ней теории нелокальных задач для эллиптических дифференциальных уравнений) можно найти, например, в [3, 14, 16–18, 23] (см. также имеющуюся там библиографию). Задачи в неограниченных областях к настоящему времени изучены в меньшей степени.

В настоящей работе рассматривается следующая задаче Дирихле для модельного дифференциально-разностного сильно эллиптического уравнения в полуплоскости:

$$u_{xx} + \sum_{k=1}^{m} a_k u_{xx}(x + h_k, y) + u_{yy} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (0, +\infty), \tag{1}$$

$$u\big|_{y=0} = u_0(x), \ x \in (-\infty, +\infty), \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг., а также при поддержке гранта Президента Российской Федерации НШ-4479.2014.1 и гранта РФФИ 17-01-00401.

где коэффициенты a_k и h_k, $k = \overline{1,m}$, — вещественные параметры, а начальная функция u_0 непрерывна и ограничена.

Отметим, что в классическом случае эллиптических дифференциальных уравнений такие задачи корректно разрешимы в естественных (и достаточно широких) классах краевых функций (см., например, [2, 7]). В то же время для качественных свойств их решений имеет место принципиальная (сравнительно с задачами в ограниченных областях) новизна: возникают эффекты, характерные, вообще говоря, для параболического случая (см. [5, 19]).

Из [22] известно, что, если существует такая положительная постоянная C, что на всей вещественной оси выполняется неравенство

$$1 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k\xi \geqslant C \tag{3}$$

(ср. с условием сильной эллиптичности уравнения (1) в [23, §9]), то задача (1)-(2) разрешима в смысле обобщенных функций (согласно определению [1, §10]), а ее решение является классическим в полуплоскости $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ и представляется следующим образом:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\xi, y) u_0(\xi) d\xi, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{E}(x,y) = \int_{0}^{\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi, \tag{5}$$

$$G_1(\xi) = \xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)+a(\xi)+1}{2}}, \quad G_2(\xi) = \xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)-a(\xi)-1}{2}},$$

$$\varphi(\xi) = \left[a^2(\xi) + b^2(\xi) + 2a(\xi) + 1\right]^{\frac{1}{2}}, \quad a(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k\xi, \quad b(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k\xi.$$

В настоящей работе исследуется поведение найденного решения при неограниченном возрастании y. Доказывается теорема о его (асимптотической) близости к решению аналогичной задачи для некоторого эллиптического *дифференциального* уравнения и устанавливается необходимое и достаточное условие его стабилизации, заключающееся в существовании предела среднего значения краевой функции задачи.

Отметим, что сходство с качественными свойствами решений *параболических* уравнений, характерное для классической теории, имеет место и в изучаемом неклассическом (а именно, *нелокальном*) случае: теоремы о близости и стабилизации решений, полученные в настоящей работе, аналогичны соответствующим результатам для *дифференциально-разностных параболических* уравнений (см. [8–10, 21]).

Отметим также, что никаких условий соизмеримости сдвигов, содержащихся в нелокальных членах исследуемого уравнения, не накладывается. Как известно (см., например, [6, 15, 18, 20] и имеющуюся там библиографию), для теории нелокальных задач и функционально-дифференциальных уравнений разница между случаем, когда имеют место только целочисленные или соизмеримые сдвиги, и случаем, когда сдвиги несоизмеримы, принципиальная: даже в ограниченных областях во втором случае возникают качественно новые трудности (связанные, в частности, с нарушением гладкости решений, проверкой условий сильной эллиптичности дифференциально-разностных операторов, неустойчивостью этих условий относительно возмущений сдвигов), не имеющие места в первом случае. Таким образом, в настоящей работе задача рассматривается в максимально общей постановке.

1. Поведение решения при $y \to +\infty$

Зафиксируем произвольное вещественное x_0 и применим в (4) замену переменной $\eta = \dfrac{x_0 - \xi}{y}$. Получим, что

$$u(x_0, y) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(y\eta, y) u_0(x_0 - y\eta) d\eta.$$

Функцию $y\mathcal{E}(y\eta, y)$ можно представить в виде

$$y \int\limits_0^{\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[y\xi\eta - yG_2(\xi)\right] d\xi = y \int\limits_0^{\infty} e^{-y\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)+a(\xi)+1}{2}}} \cos\left[y\xi\eta - y\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)-a(\xi)-1}{2}}\right] d\xi,$$

что после замены переменных $y\xi = z$ дает следующее равенство:

$$y\mathcal{E}(y\eta, y) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \cos\left[z\eta - \frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] dz.$$

Если в правой части последнего равенства перейти (формально) к пределу при $y \to +\infty$ под знаком интеграла, то получим

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-z\sqrt{a_0+1}} \cos z\eta dz = \left.\frac{e^{-z\sqrt{a_0+1}}}{\eta^2 + a_0 + 1}\right|_{z=0}^{z=+\infty} = \frac{\sqrt{a_0+1}}{\eta^2 + a_0 + 1},$$

где через a_0 обозначена постоянная $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k$; отметим, что $a_0 + 1 \geqslant C$ (для доказательства этого факта достаточно положить $\xi = 0$ в (3)).

Таким образом, формальный переход к пределу под знаком интеграла приводит к (поточечному) предельному соотношению

$$\lim_{y\to+\infty} \left[u(x, y) - \frac{\sqrt{a_0+1}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(x - yz)}{z^2 + a_0 + 1} dz\right] = 0. \tag{1.6}$$

Перейдем к обоснованию указанного предельного перехода. Докажем следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Предельное соотношение* (1.6) *выполняется для любого вещественного* x.

Доказательство. При произвольном фиксированном вещественном x_0 рассмотрим разность

$$u(x_0, y) - \frac{\sqrt{a_0+1}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(x_0 - yz)}{z^2 + a_0 + 1} dz = \tag{1.7}$$

$$= \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(y\eta, y) u_0(x_0 - y\eta) d\eta - \frac{\sqrt{a_0+1}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(x_0 - y\eta)}{\eta^2 + a_0 + 1} d\eta.$$

Используя определение функции $\mathcal{E}$, приводим эту разность к виду

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0 - y\eta) \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \cos\left[z\eta - \frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] dz d\eta -$$

$$- \frac{\sqrt{a_0+1}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(x_0 - y\eta)}{\eta^2 + a_0 + 1} d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0 - y\eta)\left[\int\limits_0^\infty e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}}\cos\left[z\eta - \frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right]dz - \frac{\sqrt{a_0+1}}{\eta^2+a_0+1}\right]d\eta.$$

Второй сомножитель подынтегральной функции (в интеграле по переменной η) равен

$$\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}}\cos\left[z\eta - \frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] - e^{-z\sqrt{a_0+1}}\cos z\eta\right)dz =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}}\cos z\eta\cos\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] - e^{-z\sqrt{a_0+1}}\cos z\eta\right)dz +$$

$$+ \int\limits_0^\infty e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}}\sin z\eta\sin\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right]dz. \quad (1.8)$$

Докажем, что он стремится к нулю при $y \to +\infty$ равномерно по η.

Абсолютная величина второго интеграла в последнем выражении не превосходит

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}}\left|\sin\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right]\right|dz \quad (1.9)$$

в силу условия сильной эллиптичности $1 + a(\xi) \geqslant C$ для любого вещественного ξ. С другой стороны, функция $\varphi(\xi)$ может быть представлена в виде $\sqrt{\left[1+a(\xi)\right]^2 + b^2(\xi)}$, а значит, она тоже ограничена снизу постоянной C. Отсюда вытекает, что выражение (1.9) ограничено сверху выражением

$$\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{C}z}\left|\sin\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right]\right|dz \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{C}z} z\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\,dz.$$

Чтобы оценить последнее подкоренное выражение, представим разность $\varphi(\xi) - a(\xi) - 1$ в виде

$$\frac{\left(\left[a^2(\xi)+b^2(\xi)+2a(\xi)+1\right]^{\frac{1}{2}} - a(\xi) - 1\right)\left(\left[a^2(\xi)+b^2(\xi)+2a(\xi)+1\right]^{\frac{1}{2}} + a(\xi) + 1\right)}{\left[a^2(\xi)+b^2(\xi)+2a(\xi)+1\right]^{\frac{1}{2}} + a(\xi) + 1} =$$

$$= \frac{b^2(\xi)}{\left[a^2(\xi)+b^2(\xi)+2a(\xi)+1\right]^{\frac{1}{2}} + a(\xi) + 1}.$$

Знаменатель последней дроби равен $\varphi(\xi)+a(\xi)+1$, что, как мы только что выяснили, ограничено снизу постоянной $2C$. Таким образом, последний интеграл не превосходит

$$\frac{1}{2\sqrt{C}}\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{C}z} z\left|b\left(\frac{z}{y}\right)\right|dz = \frac{1}{2\sqrt{C}}\left(\int\limits_0^A + \int\limits_A^\infty\right) \stackrel{\text{def}}{=} I_{1,A}(y) + I_{2,A}(y), \quad (1.10)$$

где A — положительный параметр.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty ze^{-\sqrt{C}}dz$ и ограниченности функции b (например, постоянной $\sum\limits_{k=1}^m |a_k|$) существует такое положительное A, что $|I_{2,A}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любого положительного y. Зафиксируем найденное A и найдем такое положительное y_0, что неравенство

$$\left|b\left(\frac{z}{y}\right)\right| \leqslant 2\varepsilon\sqrt{C}\left(\int\limits_0^\infty ze^{-\sqrt{C}z}dz\right)^{-1}$$

выполняется для любого y из интервала $(y_0, +\infty)$ и любого z из интервала $(0, A)$. Таким образом, $|I_{1,A}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любого y из интервала $(y_0, +\infty)$. Тем самым, в силу произвольности выбора положительного ε, доказана равномерная (относительно $\eta \in \mathbb{R}^1$) сходимость к нулю второго слагаемого выражения (1.8) при $y \to +\infty$. Теперь оценим его первое слагаемое

$$\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}}\cos\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)-a\left(\frac{z}{y}\right)-1}\right] - e^{-z\sqrt{a_0+1}}\right)\cos z\eta dz.$$

Разобьем этот интеграл на два слагаемых аналогично (1.10). Оценка второго из этих слагаемых (т. е., интеграла по бесконечному промежутку) ничем не отличается от случая (1.10), поскольку имеем два интеграла, в каждом из которых один из сомножителей подынтегральной функции ограничен, а интеграл от другого сомножителя сходится. Чтобы оценить первое слагаемое (т. е., интеграл по конечному промежутку), отметим, что для любого вещественного η абсолютная величина этого слагаемого не превосходит

$$\int\limits_0^\infty \left|e^{-z\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}-\sqrt{a_0+1}\right]}\cos\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)-a\left(\frac{z}{y}\right)-1}\right]-1\right|e^{-z\sqrt{a_0+1}}dz, \tag{1.11}$$

и используем полученное выше представление разности $\varphi(\xi) - a(\xi) - 1$. Получим, что модуль аргумента косинуса не превосходит

$$\frac{A}{2\sqrt{C}}\left|b\left(\frac{z}{y}\right)\right| = \frac{A}{2\sqrt{C}}\left|\sum_{k=1}^m a_k \sin\frac{h_k z}{y}\right| \leqslant \frac{A\sum\limits_{k=1}^m |a_k h_k|}{2\sqrt{C}}\frac{z}{y}.$$

Значит, найдется такое положительное y_1, что, если $y \geqslant y_1$, то $\cos\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)-a\left(\frac{z}{y}\right)-1}\right]$ принадлежит интервалу $(1-\sqrt{\varepsilon/2A}, 1+\sqrt{\varepsilon/2A})$ для любого z из промежутка интегрирования (напомним, что в данном случае промежуток интегрирования конечен). Далее, чтобы оценить (первую) подынтегральную экспоненту, представим ее показатель в виде

$$-z\sqrt{a_0+1}\left[\sqrt{\frac{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}{2(a_0+1)}}-1\right]$$

и рассмотрим числитель последней дроби. Он равен

$$\left[a^2\left(\frac{z}{y}\right)+b^2\left(\frac{z}{y}\right)+2a\left(\frac{z}{y}\right)+1\right]^{\frac{1}{2}}+a\left(\frac{z}{y}\right)+1 =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{y}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_k z}{y}\right)^2+2\sum_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{y}+1}+a\left(\frac{z}{y}\right)+1.$$

Выбрав y достаточно большим, можно сделать величину $\frac{1}{y}A\max\limits_{k=\overline{1,m}}|h_k|$ настолько малой, чтобы каждая величина $\cos\frac{h_k z}{y}$ была сколь угодно близка к единице (а каждая величина $\sin\frac{h_k z}{y}$ — к нулю) на всем промежутке интегрирования. Тогда для указанных y и вся рассматриваемая дробь сколь угодно близка к единице на всем промежутке интегрирования. Теперь выберем такое положительное y_2, что, если $y \geqslant y_2$, то

$$e^{-A\sqrt{a_0+1}\left[\sqrt{\frac{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}{2(a_0+1)}}-1\right]} \in (1-\sqrt{\varepsilon/2A},\ 1+\sqrt{\varepsilon/2A})$$

для любого z из промежутка интегрирования. Тогда тому же интервалу и для тех же значений z принадлежит и величина

$$e^{-z\sqrt{a_0+1}\left[\sqrt{\frac{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}{2(a_0+1)}}-1\right]},$$

а значит, интеграл (1.11) оценивается точно так же, как первое слагаемое из (1.10).

Таким образом, равномерная (относительно $\eta \in \mathbb{R}^1$) сходимость к нулю выражения (1.8) при $y \to +\infty$ доказана.

Осталось показать, что внутренний интеграл в представлении разности (1.7), т. е. функция

$$\int\limits_0^\infty e^{-yG_1\left(\frac{z}{y}\right)} \cos\left[z\eta - yG_2\left(\frac{z}{y}\right)\right] dz =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-yG_1\left(\frac{z}{y}\right)} \cos\left[yG_2\left(\frac{z}{y}\right)\right] \cos z\eta dz + \int\limits_0^\infty e^{-yG_1\left(\frac{z}{y}\right)} \sin\left[yG_2\left(\frac{z}{y}\right)\right] \sin z\eta dz \qquad (1.12)$$

вещественной переменной η, зависящая от положительного параметра y, оценивается сверху (по абсолютной величине) функцией вида $\frac{M_1}{M_2+\eta^2}$, начиная с некоторого положительного y_0.

Сделав замену переменных $\frac{z}{y} = \xi$, получаем, что первое и второе слагаемые выражения (1.12) равны $y\mathcal{E}_1(y\eta, y)$ и $y\mathcal{E}_2(y\eta, y)$ соответственно, где функции $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ введены в [22]. Далее, из [22] известно, что $x^2\mathcal{E}_2(x,y) = y\int\limits_0^\infty \psi(\xi)\sin x\xi d\xi$, где $\psi \in L_1(0,+\infty)$. Следовательно,

$$y^2\eta^2\mathcal{E}_2(y\eta, y) = y\int\limits_0^\infty \psi(\xi)\sin y\eta\xi d\xi,$$

т. е. $\eta^2|y\mathcal{E}_2(y\eta,y)| \leqslant \|\psi\|_1$. При $\eta \geqslant 1$ из этого неравенства вытекает оценка

$$|y\mathcal{E}_2(y\eta,y)| \leqslant \frac{\|\psi\|_1}{\eta^2} = \frac{2\|\psi\|_1}{2\eta^2} = \frac{2\|\psi\|_1}{\eta^2+\eta^2} \leqslant \frac{2\|\psi\|_1}{1+\eta^2},$$

т. е. требуемое неравенство выполняется с $M_1 = 2\|\psi\|_1$ и $M_2 = 1$. При $\eta < 1$ вернемся к представлению второго слагаемого выражения (1.12), т. е. $y\mathcal{E}_2(y\eta,y)$, в виде

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \sin\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] \sin z\eta\, dz$$

и учтем полученную выше оценку $\varphi(\xi) + a(\xi) + 1 \geqslant 2C$. Получим, что

$$|y\mathcal{E}_2(y\eta,y)| \leqslant \|e^{-\sqrt{C}z}\|_1 = \frac{2\|e^{-\sqrt{C}z}\|_1}{1+1} \leqslant \frac{2\|e^{-\sqrt{C}z}\|_1}{1+\eta^2},$$

т. е. требуемая оценка для второго слагаемого выражения (1.12) верна и при $\eta < 1$.

Теперь исследуем первое слагаемое выражения (1.12). Из [22] известно, что

$$x^2\mathcal{E}_1(x,y) = y\int\limits_0^\infty \psi_1(\xi)\cos x\xi d\xi + y\sqrt{\sum_{k=1}^m a_k + 1},$$

где $\psi_1 \in L_1(0, +\infty)$. Следовательно,

$$y^2\eta^2\mathcal{E}_1(y\eta, y) = y\int\limits_0^\infty \psi_1(\xi)\cos y\eta\xi d\xi + y\sqrt{\sum_{k=1}^m a_k + 1}, \text{ т. е. } \eta^2|y\mathcal{E}_2(y\eta, y)| \leqslant \left(\|\psi\|_1 + \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k + 1}\right).$$

Далее вывод требуемой оценки для второго слагаемого выражения (1.12) полностью аналогичен выводу для первого слагаемого. □

2. Теорема о близости решений

Наряду с исследуемым *дифференциально-разностным* уравнением (1) рассмотрим *дифференциальное* уравнение

$$(a_0 + 1)\, u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{2.1}$$

Оно является эллиптическим в силу условия (3), поэтому существует (и притом единственное) классическое ограниченное решение задачи (2.1), (2) (см., например, [2, 7]). Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Если условие* (3) *выполнено,* $u(x, y)$ — *решение задачи* (1)-(2)*, представленное формулой* (4)*, а* $v(x, y)$ — *классическое ограниченное решение задачи* (2.1), (2)*, то*

$$\lim_{y\to+\infty}[u(x, y) - v(x, y)] = 0$$

для любого вещественного x.

Доказательство. Применяя замену переменной $yz = \xi$, представим функцию

$$\frac{\sqrt{a_0 + 1}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_0(x - yz)}{z^2 + a_0 + 1}\,dz$$

в виде

$$\frac{\sqrt{a_0 + 1}}{\pi}\frac{1}{y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_0(x - \xi)}{\left(\frac{\xi}{y}\right)^2 + a_0 + 1}\,d\xi = \frac{\sqrt{a + 1}}{\pi}\,y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_0(x - \xi)}{\xi^2 + (a_0 + 1)y^2}\,d\xi.$$

Последняя функция совпадает с $v(x, y)$ (см., например, [2, 7]). Теперь для завершения доказательства остается применить теорему 1.1. □

Из [4] (см. также [5]) известен следующий критерий стабилизации решений задачи (2.1), (2): *если* $x, l \in (-\infty, +\infty)$*, а* $v(x, y)$ — *классическое ограниченное решение задачи* (2.1), (2)*, то* $\lim\limits_{y\to+\infty} v(x, y) = l$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2R}\int\limits_{-R}^{R} u_0(x)dx = l.$$

Отсюда и из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение:

Следствие 2.1. *Если условие* (3) *выполнено,* $u(x, y)$ — *решение задачи* (1)-(2)*, представленное формулой* (4)*, а* $x, l \in \mathbb{R}^1$*, то* $\lim\limits_{y\to+\infty} u(x, y) = l$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2R}\int\limits_{-R}^{R} u_0(x)dx = l.$$

Отметим, что следствие 2.1 представляет классическую стабилизационную альтернативу: при $y \to +\infty$ решение либо имеет предел (причем один и тот же) *для каждого вещественного* x (иными словами, поточечно стабилизируется к постоянной), либо не имеет предела *ни для какого вещественного* x. А какой из этих двух альтернативных вариантов имеет место, определяется классическим критерием стабилизации Репникова—Эйдельмана (см. [13]), заключающимся в существовании предельного среднего граничной функции задачи.

Отметим также, что теорема 2.1, будучи теоремой о *близости* решений, является более сильным утверждением, чем следствие 2.1: в отличие от последнего, являющегося теоремой о *стабилизации* решения, она предоставляет определенную информацию о поведении решения даже в том случае, когда последнее не имеет предела.

Замечание 2.1. Эллиптичность «предельного» дифференциального уравнения (2.1) гарантируется тем же условием (3), которое обеспечивает разрешимость исходной нелокальной задачи и представление ее решения формулой пуассоновского типа. В модельном случае, когда нелокальный член — единственный (см. [11, 12]), ситуация такая же, однако природа этого условия менее очевидна: оно заключается в том, что коэффициент при единственном нелокальном члене по модулю меньше единицы, т. е. выглядит, как некое условие малости нелокального члена уравнения сравнительно с остальными его членами. В действительности это — условие положительной определенности оператора, что и подтверждается его формой (3) для общего случая.

3. Свойства ядра Пуассона

В классическом случае *дифференциальных* эллиптических уравнений некоторые важные свойства ядра Пуассона (такие, как положительность и величина его интеграла по всей оси x) вытекают непосредственно из явного вида указанного ядра. В рассматриваемом нами *нелокальном* случае это не так, и, в частности, вопрос о знакопостоянстве функции (5) остается открытым. Однако результаты о стабилизации, полученные в предыдущем разделе, позволяют вывести некоторые ее свойства. А именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Для любых векторов* $(a_1, \dots, a_m)$ *и* $(h_1, \dots, h_m)$, *удовлетворяющих условию* (3), *справедливо тождество*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x, y)dx = 1.$$

Доказательство. Из доказательства [22, теорема 1] ясно, что функция (5) настолько быстро убывает при $x \to \infty$ (при каждом фиксированном положительном y), что функция

$$\mathcal{E}_0(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x, y)dx \tag{3.1}$$

корректно определена на положительной полуоси. Функцию (3.1) можно представить в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\xi, y)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\xi, y)\psi(x - \xi)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x - \xi, y)\psi(\xi)d\xi,$$

где $\psi(\xi) \equiv 1$ — непрерывная и ограниченная на $(-\infty, +\infty)$ функция. Тогда в силу [22, теорема 1] функция $\mathcal{E}_0(y)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1) в полуплоскости $\{y > 0\}$. Отсюда, поскольку $\mathcal{E}_0$ — функция только одной переменной y, вытекает, что все ее производные по x (любого порядка) тождественно равны нулю, а значит, на положительной полуоси она удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $\mathcal{E}_0'' = 0$. Поэтому $\mathcal{E}_0(y) = py + q$, где p и q — вещественные постоянные. Кроме того, из [22, теорема 1] известно, что функция $\mathcal{E}_0(y)$ удовлетворяет задаче (1)-(2) в смысле обобщенных функций (по Гельфанду—Шилову). Поскольку эта функция — гладкая, она удовлетворяет этой задаче и в классическом смысле, а значит, $\mathcal{E}_0(0) = 1$, т. е. $q = 1$. Таким образом, на $[0, +\infty)$ справедливо тождество

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x, y)dx = py + 1, \tag{3.2}$$

где p — вещественная постоянная. Тогда

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\mathcal{E}_0(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x, y)dx = \lim_{y\to+\infty} \left(p + \frac{1}{y}\right) = p.$$

С другой стороны, функция $\mathcal{E}_0(y)$ является решением задачи (1)-(2) с граничной функцией $\psi(\xi)\equiv 1$, для которого, по построению, справедлив критерий стабилизации, установленный следствием 2.1. Отсюда, поскольку $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{2R}\int\limits_{-R}^{R}\psi(x)dx=1$, вытекает, что $\lim\limits_{y\to+\infty}\mathcal{E}_0(y)=1$, из чего следует, что постоянная p в тождестве (3.2) равна нулю. □

Автор глубоко признателен А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе, а также В. Н. Денисову и А. И. Назарову за ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши// Усп. мат. наук. — 1953. — *8*, № 6. — С. 3–54.
2. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические уравнения второго порядка. — М.: Мир, 1989.
3. *Гуревич П. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями и полугруппы Феллера// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *38*. — С. 3–173.
4. *Денисов В. Н.* Об асимптотике решений эллиптических уравнений// Докл. РАН. — 1993. — *329*, № 6. — С. 695–697.
5. *Денисов В. Н., Муравник А. Б.* Об асимптотике решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения в полупространстве// В сб. «Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения». — М.: Физматлит, 2003. — С. 397–417.
6. *Иванова Е. П.* О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *62*. — С. 85–99.
7. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1988. — *32*. — С. 99–218.
8. *Муравник А. Б.* Об асимптотике решения задачи Коши для некоторых дифференциально-разностных параболических уравнений// Дифф. уравн. — 2005. — *41*, № 4. — С. 538–548.
9. *Муравник А. Б.* Об асимптотике решений некоторых параболических уравнений с нелокальными старшими членами// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2006. — *25*. — С. 143–183.
10. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *52*. — С. 3–143.
11. *Муравник А. Б.* О задаче Дирихле в полуплоскости для дифференциально-разностных эллиптических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *60*. — С. 102–113.
12. *Муравник А. Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 4. — С. 566–576.
13. *Репников В. Д., Эйдельман С. Д.* Необходимые и достаточные условия установления решения задачи Коши// Докл. АН СССР. — 1966. — *167*, № 2. — С. 298–301.
14. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
15. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами// Докл. РАН. — 1992. — *324*, № 6. — С. 1158–1163.
16. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *26*. — С. 3–132.
17. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
18. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
19. *Denisov V. N., Muravnik A. B.* On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations// Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. — 2003. — *9*. — С. 88–93.
20. *Ivanova E. P.* Elliptic differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments// Eurasian Math. J. — 2016. — *7*, № 3. — С. 33–40.
21. *Muravnik A. B.* On the Cauchy problem for differential-difference parabolic equations with high-order nonlocal terms of general kind// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2006. — *16*, № 3. — С. 541–561.

22. *Muravnik A. B.* On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — C. 130–143.
23. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

А. Б. Муравник
АО «Концерн «Созвездие», 394018, г. Воронеж, ул. Плехановская, 14;
Российский университет дружбы народов, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: amuravnik@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-678-688 UDC 517.929

Asymptotic Properties of Solutions of Two-Dimensional Differential-Difference Elliptic Problems

© 2017 **A. B. Muravnik**

Abstract. In the half-plane $\{-\infty < x < +\infty\} \times \{0 < y < +\infty\}$, the Dirichlet problem is considered for differential-difference equations of the kind $u_{xx} + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k u_{xx}(x + h_k, y) + u_{yy} = 0$, where the amount m of nonlocal terms of the equation is arbitrary and no commensurability conditions are imposed on their coefficients $a_1, \dots, a_m$ and the parameters $h_1, \dots, h_m$ determining the translations of the independent variable x. The only condition imposed on the coefficients and parameters of the studied equation is the nonpositivity of the real part of the symbol of the operator acting with respect to the variable x.

Earlier, it was proved that the specified condition (i. e., the strong ellipticity condition for the corresponding differential-difference operator) guarantees the solvability of the considered problem in the sense of generalized functions (according to the Gel'fand—Shilov definition), a Poisson integral representation of a solution was constructed, and it was proved that the constructed solution is smooth outside the boundary line.

In the present paper, the behavior of the specified solution as $y \to +\infty$ is investigated. We prove the asymptotic closedness between the investigated solution and the classical Dirichlet problem for the differential elliptic equation (with the same boundary-value function as in the original nonlocal problem) determined as follows: all parameters $h_1, \dots, h_m$ of the original differential-difference elliptic equation are assigned to be equal to zero. As a corollary, we prove that the investigated solutions obey the classical Repnikov—Eidel'man stabilization condition: the solution stabilizes as $y \to +\infty$ if and only if the mean value of the boundary-value function over the interval $(-R, +R)$ has a limit as $R \to +\infty$.

REFERENCES

1. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, "Preobrazovaniya Fur'e bystro rastushchikh funktsiy i voprosy edinstvennosti resheniya zadachi Koshi" [Fourier transformations for fast growing functions and questions of uniqueness of solution of the Cauchy problem], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1953, **8**, No. 6, 3–54 (in Russian).
2. D. Gilbarg and N. Trudinger, *Ellipticheskie uravneniya vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order], Mir, Moscow, 1989 (Russian translation).
3. P. L. Gurevich, "Ellipticheskie zadachi s nelokal'nymi kraevymi usloviyami i polugruppy Fellera" [Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semigroups], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **38**, 3–173 (in Russian).
4. V. N. Denisov, "Ob asimptotike resheniy ellipticheskikh uravneniy" [On asymptotics of solutions of elliptic equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1993, **329**, No. 6, 695–697 (in Russian).
5. V. N. Denisov and A. B. Muravnik, "Ob asimptotike resheniya zadachi Dirikhle dlya ellipticheskogo uravneniya v poluprostranstve" [On asymptotics of solutions of the Dirichlet problem for elliptic equations in a half-space], In: *Nelineynyy analiz i nelineynye differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear Analysis and Nonlinear Differential Equations], Fizmatlit, Moscow, 2003, 397–417 (in Russian).

6. E. P. Ivanova, “O koertsitivnosti differentsial’no-raznostnykh uravneniy s nesoizmerimymi sdvigami argumentov” [On coercivity of differential-difference equations with incommensurable translations of arguments], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 85–99 (in Russian).
7. V. A. Kondrat’ev and E. M. Landis, “Kachestvennaya teoriya lineynykh differentsial’nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka” [Qualitative theory of linear second-order partial differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1988, **32**, 99–218 (in Russian).
8. A. B. Muravnik, “Ob asimptotike resheniya zadachi Koshi dlya nekotorykh differentsial’no-raznostnykh parabolicheskikh uravneniy” [On asymptotics of solutions of the Cauchy problem for some differential-difference parabolic equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2005, **41**, No. 4, 538–548 (in Russian).
9. A. B. Muravnik, “Ob asimptotike resheniy nekotorykh parabolicheskikh uravneniy s nelokal’nymi starshimi chlenami” [On asymptotics of solutions of some parabolic equations with nonlocal higher-order terms], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2006, **25**, 143–183 (in Russian).
10. A. B. Muravnik, “Funktsional’no-differentsial’nye parabolicheskie uravneniya: integral’nye predstavleniya i kachestvennye svoystva resheniy zadachi Koshi” [Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of the Cauchy problem solutions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **52**, 3–143 (in Russian).
11. A. B. Muravnik, “O zadache Dirikhle v poluploskosti dlya differentsial’no-raznostnykh ellipticheskikh uravneniy” [On the Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations in a half-plane], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **60**, 102–113 (in Russian).
12. A. B. Muravnik, “Asimptoticheskie svoystva resheniy zadachi Dirikhle v poluploskosti dlya nekotorykh differentsial’no-raznostnykh ellipticheskikh uravneniy” [Asymptotic properties of solutions of the Dirichlet problem in a half-plane for some differential-difference elliptic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 4, 566–576 (in Russian).
13. V. D. Repnikov and S. D. Eydel’man, “Neobkhodimye i dostatochnye usloviya ustanovleniya resheniya zadachi Koshi” [Necessary and sufficient conditions for stabilization of the solution of the Cauchy problem], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1966, **167**, No. 2, 298–301 (in Russian).
14. L. E. Rossovskiy, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
15. A. L. Skubachevskiy, “Kraevye zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s nesoizmerimymi sdvigami” [Boundary-value problems for differential-difference equations with incommensurable shifts], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1992, **324**, No. 6, 1158–1163 (in Russian).
16. A. L. Skubachevskiy, “Neklassicheskie kraevye zadachi. I” [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).
17. A. L. Skubachevskiy, “Neklassicheskie kraevye zadachi. II” [Nonclassical boundary-value problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179 (in Russian).
18. A. L. Skubachevskiy, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
19. V. N. Denisov and A. B. Muravnik, “On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations,” *Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc.*, 2003, **9**, 88–93.
20. E. P. Ivanova, “Elliptic differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments,” *Eurasian Math. J.*, 2016, **7**, No. 3, 33–40.
21. A. B. Muravnik, “On the Cauchy problem for differential-difference parabolic equations with high-order nonlocal terms of general kind,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2006, **16**, No. 3, 541–561.
22. A. B. Muravnik, “On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 130–143.
23. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

A. B. Muravnik
JSC Concern “Sozvezdie”, 14 Plekhanovskaya, 394018 Voronezh, Russia;
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: amuravnik@yandex.ru