М. А. Лифшиц, О плотности распределения нормы устойчивого вектора, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 158, 105–114

М.А.Лифшиц

О ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМЫ УСТОЙЧИВОГО ВЕКТОРА

Пусть X - устойчивый случайный вектор со значениями в банаховом пространстве $(B,\|\cdot\|)$. В этой статье изучается следующий вопрос: когда распределение случайной величины $\|X\|$ имеет ограниченную плотность?

Интерес к подобной проблематике связан с работами о скорости сходимости в центральной предельной теореме, где ограниченность плотности распределения нормы оказывается одним из достаточных условий при оценивании скорости сходимости.

Мы не будем предполагать, что норма является дифференцируемой функцией. Для пространств с гладкой нормой о распределении $\|X\|$ можно получить существенно более точную информацию. Результаты, полученные в этом направлении Н.В.Смородиной и автором, будут опубликованы в журнале "Теория вероятностей и ее применения". Случай гильбертовой нормы рассмотрен в [6,7].

§ I. Пример устойчивого вектора с неограниченной плотностью распределения нормы.

Пусть I - разбиение натурального ряда на конечные блоки: $I_1=[1;m_1],\ I_2=[m_1+1;m_2],\dots,\ I_k=[m_{k-1}+1,m_k],\dots$

Для последовательности чисел $z=\{z_j\}$ положим

$$\|z\|_I=\sup_k\sum_{j\in I_k}|z_j|\,.$$

Пусть пространство c_0^I состоит из таких последовательностей, для которых $\lim\limits_{k\to 0}\sum_{j\in I_k}|z_j|=0$.

Тогда $(c_0^I,\|\cdot\|_I)$ - сепарабельное банахово пространство. Если I - это разбиение на отдельные числа, то c_0^I - это обычное пространство c_0.

ТЕОРЕМА I. Для каждого $\alpha\in(1,2)$ существуют такое пространство c_0^I и симметричный устойчивый вектор X в нем, что

а) плотность распределения $\|X\|_I$ неограничена;

б) координаты вектора X независимы, а в пределах каждого блока I_k - одинаково распределены.

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Для гауссовского случая ($\alpha=2$) подобные примеры в пространстве хорошо известны (см. [1-3]).

2. Как будет видно из результатов § 2, при $\alpha<1$ утверждение теоремы 1 неверно. Случай $\alpha=1$ остается не изученным.

3. В отличие от гауссовского случая, при $\alpha<2$ не удается "разместить" контпример с независимыми координатами в пространстве C_0. Отсюда и необходимость рассматривать пространства C_0^1.

Доказательству теоремы предпошлем ряд простых утверждений об одномерных устойчивых векторах. Пусть $Y=Y_{\alpha,\mu}$ - случайная величина с характеристической функцией $f_{\alpha,\mu}(t)=\exp\{-\mu|t|^{\alpha}\}$. Обозначим $F_{\alpha,\mu}$ - распределение с.в. Y, а $H_{\alpha,\mu}$ - распределение с.в. $|Y|$.

Полезно представить $Y_{\alpha,\mu}$ в виде суммы двух безгранично делимых слагаемых. Для этого разложим в произведение характеристическую функцию:

$$f_{\alpha,\mu}(t)=\exp\left\{c_\alpha\mu\int_0^\infty\left(e^{it\lambda}+e^{-it\lambda}-2\right)\frac{d\lambda}{\lambda^{1+\alpha}}\right\}=$$
$$=\exp\left\{c_\alpha\mu\int_0^1\left(e^{it\lambda}+e^{-it\lambda}-2\right)\frac{d\lambda}{\lambda^{1+\alpha}}\right\}\exp\left\{c_\alpha\mu\int_1^\infty\left(e^{it\lambda}+e^{-it\lambda}-2\right)\frac{d\lambda}{\lambda^{1+\alpha}}\right\} \qquad (1)$$

Пусть $Y=Y_-+Y_+$ - разбиение, отвечающее разложению (1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для некоторой константы $\mathcal{K}_1(\alpha)\in(0;\infty)$ и всех $\mu>0$ верно неравенство $P\{Y_+\neq 0\}\leq\mathcal{K}_1(\alpha)\mu$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $1<\alpha<2$, то $E|Y|<\infty$ и для некоторой константы $\mathcal{K}_2(\alpha)\in(0;\infty)$ и всех $\mu>0$

$$E|Y|=\mathcal{K}_2(\alpha)\mu^{1/\alpha}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $1<\alpha<2$, то для некоторой константы $\mathcal{K}_3(\alpha)\in(0;\infty)$ и всех $\mu>0$

$$E|Y_+|\leq\mathcal{K}_3(\alpha)\mu$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Случайная величина Y_- - центрирована; для некоторой константы $\mathcal{K}_4(\alpha)\in(0,\infty)$ и всех $\mu>0$

$$E|Y_-|^2=\mathcal{K}_4(\alpha)\mu.$$

Мы опускаем очевидные доказательства утверждений 1-4.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha>1$, а v,ε,δ - положительные числа. Тогда найдутся $\mu, M>0$ и натуральное n, такие, что

1) $v/2\leq M\leq v$;

2) $H_{\alpha,\mu}^{*n}\{[M-\varepsilon;M+\varepsilon]\}\geq 1-\delta$

(Здесь и далее $*$ - знак операции свертки.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью n независимых копий с.в. Y_- и Y_+ построим с.в. с распределением $H^{*n}_{\alpha,\mu}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |Y^i_- + Y^i_+| \sim H^{*n}_{\alpha,\mu}.$$

Положим $M = nE|Y|$. Последовательно воспользуемся утверждением I, неравенством Чебышева и утверждением 4:

$$P\left\{\left|\sum_i |Y^i_- + Y^i_+| - M\right| > \varepsilon\right\} \leq \sum_i P\left\{Y^i_+ \neq 0\right\} +$$

$$+ P\left\{\left|\sum_i |Y^i_-| - M\right| > \varepsilon\right\} \leq \mathcal{K}_1(\alpha)\mu n + \varepsilon^{-2} D\sum_i |Y^i_-| =$$

$$= \mathcal{K}_1(\alpha)\mu n + \varepsilon^{-2} E|Y_-|^2 n = \left[\mathcal{K}_1(\alpha) + \mathcal{K}_4(\alpha)\varepsilon^{-2}\right]\mu n.$$

Кроме того, в силу утверждений 2 и 3

$$|M - \mathcal{K}_2(\alpha)\mu^{1/\alpha} n| = n\left|E|Y_-| - E|Y|\right| \leq nE|Y_+| \leq \mathcal{K}_3(\alpha)\mu n.$$

Остается выбрать μ и n так, чтобы

$$\mathcal{K}_2(\alpha)\mu^{1/\alpha} n = 3r/4 \tag{2}$$

$$\mathcal{K}_3(\alpha)\mu n \leq r/8; \quad \left[\mathcal{K}_1(\alpha) + \mathcal{K}_4(\alpha)\varepsilon^{-2}\right]\mu n \leq \delta \tag{3}$$

Благодаря тому, что $\alpha > 1$, условия (2) и (3) можно выполнить одновременно, выбрав малое μ и большое n. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Мы должны указать размеры блоков I_k и величины масштабных параметров μ_k для распределений координат вектора X (параметр μ_k обслуживает координаты блока I_k). Построение проведем по индукции. На первом шаге положим $r_1 = 1$; $\varepsilon_1 = 1/4$; $\delta_1 = 1/2$. С помощью леммы I выберем $\mu_1 = \mu$, размер первого блока $m_1 = n$ и число $M_1 = M \in [1/2; 1]$ так, что

$$H^{*n}_{\alpha,\mu}\left\{\left[M - \tfrac{1}{4}; M + \tfrac{1}{4}\right]\right\} \geq \tfrac{1}{2}.$$

Предположим теперь, что k блоков уже определены с помощью чисел $r_l, \varepsilon_l, \delta_l, M_l$, $1 \leq l \leq k$. Очередные параметры определим так:

$$\tau_{k+1} = \frac{1}{5} \min_{\ell \le k} (M_\ell - \varepsilon_\ell);$$

$$\delta_{k+1} = \min\left\{\frac{1}{2} P\left\{\max_{\ell \le k} \sum_{j \in I_\ell} |X_j| < \frac{1}{4}\tau_{k+1}\right\}; \frac{1}{3}\delta_k\right\};$$

$$\varepsilon_{k+1} = \min\left\{\delta_{k+1}/(k+1);\ \tau_{k+1}/4\right\}.$$

Теперь воспользуемся леммой I и по числам $\tau_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \delta_{k+1}$ выберем длину очередного блока $m_{k+1} - m_k = n_{k+1}$ и масштабный параметр μ_{k+1}.

Распределение вектора X определено. Дадим необходимые оценки распределения $\|X\|_I$. Ввиду независимости координат

$$P\left\{\|X\|_I \in [M_k - \varepsilon_k; M_k + \varepsilon_k]\right\} \geq P\left\{\max_{\ell < k} \sum_{j \in I_\ell} |X_j| \leq M_k - \varepsilon_k\right\} \times$$

$$\times P\left\{\sum_{j \in I_k} |X_j| \in [M_k - \varepsilon_k; M_k + \varepsilon_k]\right\} \times \left(1 - \sum_{\ell > k} P\left\{\sum_{j \in I_\ell} |X_j| > M_k - \varepsilon_k\right\}\right) = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3.$$

Рассмотрим отдельно каждый из трех сомножителей.

1. По построению, $M_k - \varepsilon_k \geq \tau_k/2 - \tau_k/4 = \tau_k/4$. Поэтому в силу определения δ_k

$$\Pi_1 \geq P\left\{\max_{\ell < k} \sum_{j \in I_\ell} |X_j| \leq \tau_k/4\right\} \geq 2\delta_k.$$

2. В силу леммы I

$$\Pi_2 = H_{\alpha,\mu_k}^{*n_k}\left\{[M_k - \varepsilon_k; M_k + \varepsilon_k]\right\} \geq 1 - \delta_k \geq 1/2.$$

3. По построению, для $\ell > k$

$$M_\ell + \varepsilon_\ell \leq \tau_\ell + \tau_\ell/4 = 5\tau_\ell/4 \leq M_k/4 \leq \tau_k/4 \leq M_k - \varepsilon_k.$$

Поэтому

$$\Pi_3 \geq 1 - \sum_{\ell > k} P\left\{\sum_{j \in I_\ell} |X_j| > M_\ell + \varepsilon_\ell\right\} \geq 1 - \sum_{\ell > k} H_{\alpha,\mu_\ell}^{*n_\ell}\left\{[M_\ell + \varepsilon_\ell; \infty]\right\} \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{\ell > k} \delta_\ell \geq 1 - \sum_{\ell > k} \delta_k\, 3^{k-\ell} \geq 1/2.$$

Перемножая оценки для Π_1, Π_2 и Π_3, получим

$$P\left\{\|X\|_I \in [M_k - \varepsilon_k; M_k + \varepsilon_k]\right\} \geq \delta_k/2.$$

и, в свою очередь,

$$\sup_{M,\varepsilon} P\left\{\|X\|_I \in [M - \varepsilon; M + \varepsilon]\right\}/2\varepsilon \geq \delta_k/4\varepsilon_k \geq k/4 \qquad (4)$$

Легко убедиться в том, что построенный вектор X действительно почти наверное принадлежит пространству C_0^I, а распределение $\|X\|_I$ абсолютно непрерывно. Тогда предельный переход в (4) при $K\to\infty$ показывает, что плотность распределения $\|X\|_I$ неограничена. ■

§ 2. Достаточные условия ограниченности плотности распределения нормы

В отличие от рассмотренного в § I случая $1<\alpha<2$, при $0<\alpha<1$ удается получить весьма общие условия ограниченности плотности распределения нормы. Если попытаться объяснить различие случаев $\alpha>1$ и $\alpha<1$, то можно заметить, что в представлении устойчивого вектора стохастическим интегралом по пуассоновой мере скачков при $\alpha>1$ основную роль играют малые скачки (см. утверждения I, 3 из §I), а при $\alpha<1$ - большие. Последнее обстоятельство делает возможным применение метода расслоений для оценки плотностей распределений различных функционалов (см. [I]). Мы будем использовать технику расслоений для процессов с независимыми приращениями ([8] , [I, §9]). То обстоятельство, что нам придется иметь дело с банаховозначными процессами, не приводит к каким-либо серьезным изменениям. Поэтому ряд технических деталей, изложенных в [I] , будет опущен.

Пусть $(B,\|\cdot\|)$ сепарабельное банахово пространство, X - устойчивый случайный вектор со значениями в B. Рассмотрим пространство Скорохода $\mathbb{D}=\mathbb{D}[[0,1],B]$, состоящее из B -значных функций без разрывов второго рода. В пространстве $\mathbb{D}$ существует мера P, отвечающая такому однородному процессу с независимыми приращениями $X(s)$, $0\leqslant s\leqslant 1$, что $X(1)$ и X равнораспределены. В дальнейшем будем в качестве основного вероятностного пространства рассматривать $(\mathbb{D}, P)$ и изучать распределение функционала $f:\mathbb{D}\to R^1$, $f(x(\cdot))=\|x(1)\|$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0<\alpha<1$, а распределение вектора X строго устойчиво и не сосредоточено в нуле. Тогда распределение Pf^{-1} нормы вектора X имеет ограниченную плотность относительно меры Лебега.

ЗАМЕЧАНИЕ. Тривиальный пример: $B=R^2$, X - вектор с одномерным носителем, не проходящим через ноль - показывает, что без условия строгой устойчивости обойтись нельзя. Другой контрпример на ту же тему можно получить, рассмотрев банахово пространство, единичная сфера которого имеет плоские или "почти плоские" участки, и устойчивый вектор с распределением, сосредоточенным на гиперплоскости, не проходящей через ноль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Начнем с нескольких обозначений. Пусть $\ell>0$. Для $x\in\mathbb{D}$ через $x^{\ell}(t)$ обозначим сумму скачков функции $x(\cdot)$ на отрезке $[0,t]$, по норме превосходящих ℓ. Пусть $\nu_\ell(x)$ - количество таких скачков на $[0,1]$. Положим $x_\ell=x-x^\ell$. Введем полугруппу преобразований $G_c^\ell:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, $c\geq 0$ формулой

$$G_c^\ell x=x_\ell+\exp(c)x^\ell.$$

Орбиты этой полугруппы - лучи в пространстве $\mathbb{D}$. Полугруппа G_c^ℓ является частным случаем так называемых полугрупп преобразований скачков ([I, 8]).

Зафиксируем $\tau>0$ и построим расслоение, которое позволит оценить плотность Pf^{-1} на отрезке $[\tau,2\tau]$. Положим $\ell_k=2^{-k}$; $(k=1,2,3,\ldots)$

$$\mathbb{D}_k=\left\{x\in\mathbb{D}\,|\,f(x)\geq\tau;\ f(x_{\ell_k})\leq f(x^{\ell_k})/3\right\};$$

$$H_k=\bigcup_{0\leq c\leq 1}G_c^{\ell_k}\left\{[\mathbb{D}_k\setminus\mathbb{D}_{k-1}]\cap\left\{x\in\mathbb{D}\,|\,f(x)\in[\tau,2\tau]\right\}\right\}.$$

ЛЕММА 2. Справедливы следующие утверждения:

I) Функционал f монотонен на $\mathbb{D}_k$ вдоль орбит $G_c^{\ell_k}$ и

$$f_c'(x)=\frac{d}{dc}f\left(G_c^{\ell_k}(x)\right)\geq f(x)/2.$$

2) Если $c\geq 1$, то $G_c^{\ell_k}\mathbb{D}_k\subset\mathbb{D}_{k-1}$.

3) След множества H_k на орбите полугруппы $G_c^{\ell_k}$ либо пуст, либо представляет собой связный кусок орбиты, вдоль которого параметр c меняется на Δ единиц, $1\leq\Delta\leq 2$.

4) При P - почти всех $x\in\mathbb{D}$

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{\ell_k})=0$$

5) $P\left\{\bigcup H_k\setminus\left\{x\in\mathbb{D}\,|\,f(x)\in[\tau;2\tau]\right\}\right\}=0.$

Мы опускаем элементарное доказательство леммы 2 и переходим к оцениванию $P\left\{H_k\right\}$. Пусть

$$c\in[0,1];\ x\in[\mathbb{D}_k\setminus\mathbb{D}_{k-1}]\cap\left\{x\in\mathbb{D}\,|\,f(x)\in[\tau,2\tau]\right\},\ y=G_c^{\ell_k}x\in H_k.$$

Тогда

$$f(y)=f(x+e^c x^{\ell_k})\leq(1+e)f(x)+ef(x_{\ell_k})\leq$$

$$\leq(1+2e)f(x)\leq 7f(x)\leq 14\tau.$$

Из условия $x \in D_{k-1}$ следует, что $f(x_{\ell_{k-1}}) \geq f(x^{\ell_{k-1}})/3$.

Поэтому $\frac{4}{3} f(x_{\ell_{k-1}}) \geq (f(x_{\ell_{k-1}}) + f(x^{\ell_{k-1}}))/3$ и

значит $f(x_{\ell_{k-1}}) \geq f(x)/4 \geq r/4$.

Поэтому либо $f(x_{\ell_k}) \geq r/8$, либо $f(x_{\ell_{k-1}} - x_{\ell_k}) \geq r/8$.

В первом случае $f(y_{\ell_k}) = f(x_{\ell_k}) \geq r/8$.

Во втором случае $f(y_{e^c \ell_{k-1}} - y_{e^c \ell_k}) \geq r/8$.

Таким образом,

$$H_k \subset \left\{ y \in D \,|\, f(y_{\ell_k}) \geq \frac{r}{8} \right\} \cup \bigcup_{0 \leq c \leq 1} \left\{ y \in D \,|\, f(y_{e^c \ell_{k-1}} - y_{e^c \ell_k}) \geq \frac{r}{8} \right\}. \quad (6)$$

Чтобы оценить вероятность правой части, рассмотрим подробнее распределение величины $y_\ell(1)$. Пусть $\mathcal{F}$ – мера Леви для распределения X, а σ – его спектральная мера (соответствующие определения см. [5]). Случайный вектор $y_\ell(1)$ относительно меры P будет безгранично делимым, а его мера Леви имеет вид $\sigma(d\theta)\frac{dv}{v^{1+2}} \mathbb{1}_{\{|v| < \ell\}}$. Соответственно, мера Леви распределения вектора $\ell^{-1} y_\ell(1)$ вимеет вид $\sigma(d\theta)\frac{dv}{v^{1+\alpha}} \mathbb{1}_{\{|v|<1\}} \ell^{-\alpha}$, что соответствует $\ell^{-\alpha}$-кратной свертке распределения $y_1(1)$.

Отсюда

$$P\left\{ f(y_{\ell_k}) \geq \frac{r}{8} \right\} = P\left\{ f(\ell_k^{-1} y_{\ell_k}) \geq r/8\,\ell_k \right\} \leq P\left\{ \sum_{i=1}^{\ell_k^{-\alpha}} f(y_1^{(i)}) \geq \frac{r}{8\ell_k} \right\} \leq \quad (7)$$

$$\leq \ell_k^{-\alpha} P\left\{ f(y_1) \geq \frac{r}{8\ell_k^{1-\alpha}} \right\} \leq \ell_k^{-\alpha} \exp\left\{ -\frac{r}{8\ell_k^{1-\alpha}} \right\} E \exp(\|y_1(1)\|).$$

Конечность присутствующего здесь экспоненциального момента гарантируется результатами работы 4 .

Если же y принадлежит второму множеству из (6), то y имеет не менее $r/8\,\ell_k$ скачков, превышающих по норме ℓ_k. Учитывая, что указанное число скачков пуассоновское со средним значением

$$\gamma = \int_{\ell_k}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{1+\alpha}} \sigma(B) = \alpha^{-1} \ell_k^{-\alpha} \sigma(B), \quad (8)$$

приходим при $r > 32\,\sigma(B)\alpha^{-1}\ell_k^{1-\alpha}$ к оценке

$$P\left\{ y \in D \,|\, f(y_{e\ell_{k-1}} - y_{e\ell_k}) \geq r/8 \right\} \leq \exp\left\{ \gamma(e-1) - \frac{r}{8\ell_k} \right\} \leq \quad (9)$$

$$\leqslant \exp\left\{-r/16\, l_\kappa\right\}.$$

Для малых κ оценка (9) может оказаться неприменимой. Для них можно использовать вытекающую из (5) оценку

$$P(H_\kappa) \leqslant P\left\{y \in \mathbb{D} \mid f(y) \leqslant 14r\right\} \tag{I0}$$

Если носитель распределения X бесконечномерен, то правая часть (I0) при $r \to 0$ убывает быстрее любой степени.

Теперь можно перейти к оценке плотностей методом расслоений. Пусть U_κ - расслоение множества H_κ на орбиты полугруппы $G_c^{l_\kappa}$; $P_{u,\kappa}$ и $p_{u,\kappa}$ - условное распределение на орбите u и его плотность; P_{U_κ} - фактор-мера (подробнее об этих понятиях и их свойствах см. [I]); ρ_κ - плотность меры $P[f^{-1}(\cdot) \cap H_\kappa]$. Тогда по формуле полной вероятности [I, §§ 3-4] при $\vartheta \in [r; 2r]$

$$\rho_\kappa(\vartheta) = \int\limits_{H_\kappa | U_\kappa} P_{U_\kappa}(du) \sum_{\{x \in u \mid f(x) = \vartheta\}} p_{u,\kappa}(x) / |f_c'(x)|. \tag{II}$$

Ввиду монотонности f вдоль орбит (лемма 2) сумма состоит не более чем из одного члена. Кроме того, по лемме 2

$$f_c'(x) \geqslant f(x)/2 \geqslant r/2.$$

Что касается условного распределения $P_{u,\kappa}$, то из общих формул [I, §9], верных для любых групп преобразований скачков, нетрудно вывести, что $P_{u,\kappa}$ - показательное распределение:

$$p_{u,\kappa}\left(G_c^{l_\kappa} x\right) = p_{u,\kappa}(x) \exp\left(-\alpha \nu_{l_\kappa}(x) c\right).$$

Напомним, что $\nu_l(x)$ - число скачков функции $x \in \mathbb{D}$, превышающих по норме l.

Учитывая, что H_κ высекает на орбитах достаточно длинные отрезки (лемма 2), получим:

$$p_{u,\kappa} \leqslant \left[\int\limits_0^1 \exp\left(-\alpha \nu_{l_\kappa}(x) c\right) dc\right]^{-1} \leqslant \mathcal{K} \nu_{l_\kappa}(x).$$

Здесь и далее $\mathcal{K}$ - несущественные для нас положительные постоянные, возможно, зависящие от распределения X. Подставляя эти оценки в (II), а затем применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$\rho_\kappa(\vartheta) \leqslant \mathcal{K} r^{-1} \int\limits_{H_\kappa | U_\kappa} P_{U_\kappa}(du) \nu_{l_\kappa} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{K} r^{-1} \left[\int P_{U_\kappa}(du) \nu_{l_\kappa}^2\right]^{1/2} P(H_\kappa)^{1/2}.$$

Поскольку ν_{l_K} - пуассоновская случайная величина со средним значением (8), то

$$\int P_{U_K}(du)\,\nu^2_{l_K} \leq E\,\nu^2_{l_K} \leq \mathcal{K}\, l_K^{-2\alpha}.$$

Таким образом,

$$\rho_K(\vartheta) \leq \mathcal{K}\, r^{-1} l_K^{-\alpha} P(H_K)^{1/2}.$$

Пусть ρ - плотность распределения $P f^{-1}$. Ввиду того, что множества H_K образуют покрытие множества $\{x \in D \mid f(x) \in [r; 2r]\}$ (см.лемму 2), для $\vartheta \in [r, 2r]$ имеем

$$\rho(\vartheta) \leq \sum_K \rho_K(\vartheta) \leq \mathcal{K}\, r^{-1} \sum_K l_K^{-\alpha} P(H_K)^{1/2}. \tag{I2}$$

Подставляя в (I2) оценки (7), (9) и (I0), приходим к оценке

$$\rho(\vartheta) \leq \mathcal{K} r^{-1} \sum_K l_K^{-2\alpha} \min\left\{P\left\{y \mid f(y) \leq 14r\right\}; \exp\left\{-r l_K^{\alpha-1}/16\right\} l_K^{-\alpha}\right\}^{1/2}. \tag{I3}$$

Если $r > 1$, то,оставляя второй операнд минимума, получаем равномерно ограниченную по r оценку.

Если $r < 1$, то для нескольких первых слагаемых (таких, что $r\, l_K^{\alpha-1} < \mathcal{K}\, r^{-1}$) оставим от минимума первый операнд, а для остальных слагаемых оставим второй операнд. Получим оценку типа

$$\rho(\vartheta) \leq \mathcal{K} r^{-1}\left[r^{-\mathcal{K}}(1+|\log r|) P\left\{y \mid f(y) \leq 14r\right\}^{1/2} + \sum_{K=1}^{\infty} \exp\left\{-\mathcal{K} 2^{(1-\alpha)\mathcal{K}} r^{-1}\right\} r^{-\mathcal{K}} 2^{\mathcal{K}K}\right].$$

Если носитель распределения X бесконечномерен, то $P\{y \mid f(y) \leq 14r\}$ убывает при $r \to 0$ быстрее любой степени и полученная оценка показывает, что $\rho(\cdot)$ ограничена на $[0,I]$. Если же размерность носителя конечна и не равна нулю, то ограниченность $\rho(\cdot)$ на $[0,I]$ легко выводится из экспоненциального убывания характеристического функционала.

Автор признателен Ю.А.Давыдову, В.И.Паулаускасу, В.Ю.Бенткусу и Д.Папу за стимулирующие обсуждения прдмета этой статьи. Когда статья была закончена, автору стало известно, что близкие результаты получены в [9].

Литература

1. Д а в ы д о в Ю.А., Л и ф ш и ц М.А. Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах. - В сб. "Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. (Итоги науки и техники)", 1984, т.22, с.61-158.
2. П а у л а у с к а с В. О плотности распределения нормы гауссовского вектора в банаховых пространствах. - Докл.АН СССР, 1982, т.266, № 6, с.1301-1302.
3. P a u l a u s k a s V. On the Density of the Norm of Gaussian Vector in Banach Spaces. - Lecture Notes in Math., 1983, v.990, p.178-198.
4. К р у г л о в В.М., А н т о н о в С.Н. Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве. - Теория вероятн. и ее примен., 1984, т.XXIX, в.4, с.735-742.
5. L i n d e W. Infinitely Divisible and Stable Measures on Banach Spaces. Leipzig: Teubner, 1983.
6. P a p D. Density of the Norm of Stable Vector in Hilbert Space.- Тезисы докладов IУ Вильнюсской Международной конференции по теории вероятностей и математической статистике, 1985, т.4, с.223.
7. Б е н т к у с В.Ю., П а п Д. О распределении нормы устойчивого случайного вектора гильбертова пространства. - Литовский мат.сборник, 1986.
8. Л и ф ш и ц М.А. Метод расслоений для процессов с независимыми приращениями. - В кн.: Проблемы теории вероятностных распределений. VIII. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.130, с.109-121.
9. R y z n a r M. Density of stable seminorms. - Bull.Acad. Pol.Sci., 1985, v.33, N 7-8, p.431-440.