Ф. Ф. Султанбеков

К ВОПРОСУ О ПОПОЛНЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В работе будут рассмотрены более слабые условия на функцию треугольника, чем непрерывность сверху, которые обеспечивают реализацию пополнения равномерности случайного метрического пространства в виде полной равномерной структуры опять же случайного метрического пространства, но без сохранения первоначальной функции треугольника. Всюду мы следуем терминологии работ [1], [2], [3] .

В множестве $\mathbb{B}$ значений случайной метрики рассмотрим топологию слабой сходимости, порожденную метрикой Леви:

$$\ell(\xi,\eta)\equiv \inf\{\varepsilon>0:\ \xi(x+\varepsilon)-\varepsilon\leq\eta(x)\leq\xi(x-\varepsilon)+\varepsilon\ (x\in\mathbb{R})\}\ (\xi,\eta\in\mathbb{B}).$$

Модифицируя доказательства соответствующих результатов в [4], можно установить следующие свойства метрического пространства $(\mathbb{B},\ell)$:

Теорема 1.(i) Пространство $(\mathbb{B},\ell)$ сепарабельно и полно. (ii) Подмножество $K\subset\mathbb{B}$ компактно тогда и только тогда, когда K ограничено и замкнуто.

Пусть (M,μ) – случайное метрическое пространство (СМП) с функцией треугольника (фт) μ. Рассмотрим в этом пространстве равномерные структуры $\mathfrak{U}_1,\mathfrak{U}_2$, определяемые окружениями вида $U_\varepsilon=\{(p,q)\in M\times M:\ \ell(pq,\Delta)<\varepsilon\}$ и $V_\varepsilon=\{(p,q)\in M\times M:\ \sup\limits_{\tau\in M}\ell(p\tau,\tau q)<\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ соответственно. Как было показано в [5] достаточным условием существования равномерности $\mathfrak{U}_1$ является условие: отображение $\xi\longmapsto\mu(\xi,\xi)$ пространства $(\mathbb{B},\ell)$ в себя непрерывно в точке $\Delta,\Delta(x)\equiv 0\ (x>0)$. Топологии, порожденные этими равномерностями, обозначим через τ_1,τ_2.

Под изометрией одно СМП (M,μ) в другое СМП (M',μ') будем понимать отображение $f: M\longrightarrow M'$, сохраняющее случайную метрику: $f(p)f(q)=pq$. Если к тому же f является биекцией, то скажем, что СМП (M,μ) и (M',μ') изоморфны.

Определение. Пополнением СМП (M,μ) относительно равномерности $\mathfrak{U}_i$ называется любая пара $(f,(M',\mu'))$, где (M',μ') – СМП с полной равномерной структурой $\mathfrak{U}_i'$, а f – случайная изометрия пространства M' на некоторое всюду плотное в топологии τ_i' подпространство пространства M'.

Для дальнейшего нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма. Если $\xi_n \leq \eta_n, \xi_n \to \xi, \eta_n \to \eta$ в $\mathbb{B}$, то $\xi \leq \eta$.

Теорема 2. Пусть фт μ непрерывна сверху. Тогда любое СМП (M,μ) обладает пополнением M' относительно равномерности $\mathfrak{U}_1$ с той же фт μ. Это пополнение (M',μ) единственно с точностью до изоморфизма СМП.

Доказательство. Поскольку отделимая равномерность $\mathfrak{U}_1$ обладает счетной базой, то она метризуема [6]. Это значит, что существуют метрика d в M и убывающие последовательности чисел $\varepsilon_n \downarrow 0, \delta_n \downarrow 0$ такие, что $\{(p,q):d(p,q)<\delta_{n+1}\} \subset \{(p,q):\ell(pq,\Delta)<\varepsilon_n\} \subset \{(p,q):d(p,q)<\delta_n\}$. Покажем, что для любой фундаментальной в $\mathfrak{U}_1$ последовательности (p_n) последовательность $(p_n p_1)$ ограничена в $\mathbb{B}$. Допустим противное. Тогда существуют $\varepsilon_0>0$ и возрастающая последовательность $x_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ такие, что $\sup\limits_n p_n p_1(x_k)>3\varepsilon_0$ для всех k. В силу непрерывности μ сверху для этого ε_0 существует $\delta_0>0$, что $\ell(\xi,\Delta)<\delta_0$ влечет $\ell(\mu(\xi,\eta),\eta)<\varepsilon_0$. Для этого δ_0 существует m_0 такое, что $\ell(p_n p_{m_0},\Delta)<\delta_0$ для всех $n>m_0$. Поэтому $p_n p_1(x+\varepsilon_0)-\varepsilon_0 \leq \mu(p_n p_{m_0}, p_{m_0}p_1)(x+\varepsilon_0)-\varepsilon_0 \leq p_{m_0}p_1(x)$ $(n>m_0, x\in\mathbb{R})$ или $p_n p_1(x) \leq p_{m_0}p_1(x-\varepsilon_0)+\varepsilon_0$ $(n>m_0, x\in\mathbb{R})$.

Пусть k_0 такое, что $\varepsilon_0 > p_{m_0}p_1(x_k-\varepsilon_0)$ для всех $k>k_0$. Тогда $p_n p_1(x_k)<2\varepsilon_0$ при всех $k>k_0$, $n>m_0$. Если k_1 такое число, что $\sup\limits_{1\leq n\leq m_0} p_n p_1(x_k)<\varepsilon_0$ при $k>k_1$, то для $k>\max(k_0,k_1)$ имеем $\sup\limits_n p_n p_1(x_k)<2\varepsilon_0$. Противоречие.

а) Пусть $(p_n),(q_n)$ фундаментальны в $\mathfrak{U}_1$. Установим, что $(p_n q_n)$ фундаментальна в $(\mathbb{B},\ell)$. В силу неравенства $p_n q_n \leq \mu(p_n p_1, p_1 q_1, q_1 q_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ последовательность $(p_n q_n)$ ограничена в $\mathbb{B}$. По той же причине ограничены семейства функций
$\{p_n p_m : n,m\in\mathbb{N}\}, \{q_n q_m : n,m\in\mathbb{N}\}$.

Покажем, что на ограниченном множестве $A\subset\mathbb{B}$ фт μ равностепенно непрерывна в Δ, то есть $\ell(\xi_n,\Delta)\to 0$ $(\xi_n\in A)$ влечет $\sup\limits_{\eta\in A}\ell(\mu(\xi_n,\eta),\eta)\to 0$. Допустим противное. Тогда найдутся $\varepsilon>0$, $(\xi_n)\subset A$, $(\eta_n)\subset A$ такие, что

$\xi_n \to \Delta$, $\ell(\mu(\xi_n,\eta_n),\eta_n) > \varepsilon$ для всех n . По теореме 1 выделим из (η_n) подпоследовательность (η_{n_k}) , сходящуюся к некоторой функции $\eta \in \mathbb{B}$. Тогда

$$\ell(\mu(\xi_{n_k},\eta_{n_k}),\eta_{n_k}) \leq \ell(\mu(\xi_{n_k},\sup_{i\geq k}\eta_{n_i}),\eta_{n_k}) \leq \ell(\eta,\eta_{n_k}) + \ell(\eta,\mu(\xi_{n_k},\sup_{i\geq k}\eta_{n_i})).$$

В силу непрерывности сверху фт μ правая часть неравенства будет меньше ε при k достаточно большом. Противоречие.

Теперь возьмем в качестве ограниченного множества A семейство, содержащее функции $\mu(p_n p_m, q_n q_m)$, $p_n q_n$ $(n,m \in \mathbb{N})$ и пусть

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall \xi,\eta \in A\ (\ell(\xi,\Delta)<\delta \Rightarrow \ell(\mu(\xi,\eta),\eta)<\varepsilon).$$

Пусть N такое, что для $n,m>N$ будет $\ell(\mu(p_n p_m, q_n q_m),\Delta)<\delta$ (в силу фундаментальности (p_n) , (q_n) и непрерывности μ сверху этого можно добиться). Тогда имеем

$$p_n q_n(x) \leq \mu(\mu(p_n p_m, q_m q_n), p_m q_m)(x) \leq p_m q_m(x-\varepsilon)+\varepsilon \ (x \in \mathbb{R}).$$

Взяв в этом неравенстве $x+\varepsilon$ вместо x , получим $\ell(p_n q_n, p_m q_m) < \varepsilon$ для $n,m > N$.

б) В силу а) существует $\lim_n p_n q_n \in \mathbb{B}$ для любых фундаментальных последовательностей $(p_n),(q_n)$. Убедимся, что отношение $(p_n)\approx(q_n) \Leftrightarrow \lim_n p_n q_n = \Delta$ равносильно отношению $(p_n)\sim(q_n) \Leftrightarrow \lim_n d(p_n,q_n)=0$.
Пусть $\lim_k p_k q_k = \Delta$. Это означает, что для любого ε_n существует число N_n такое, что $\ell(p_k q_k, \Delta) < \varepsilon_n$ для всех $k > N_n$. Но тогда $d(p_k,q_k)<\delta_n$, т. е. $\lim_k d(p_k,q_k)=0$.

Пусть $\widetilde{M}$ – пополнение метрического пространства (M,d). Для $\tilde{p},\tilde{q} \in \widetilde{M}$ положим $\tilde{p}\tilde{q} \equiv \lim_n p_n q_n$, где $(p_n)\in\tilde{p}$, $(q_n)\in\tilde{q}$. Установим корректность этого определения. Пусть $(p_n')\in\tilde{p}$, $(q_n')\in\tilde{q}$. Тогда $p_n p_n' \to \Delta$, $q_n q_n' \to \Delta$, $p_n' q_n' \to \tilde{p}'\tilde{q}'$ $(n\to+\infty)$. Положим $\xi_n \equiv \sup_{k\geq n} p_k p_k'$, $\eta_n \equiv \sup_{k\geq n} q_k q_k'$, $\zeta_n \equiv \sup_{k\geq n} p_k' q_k'$.

Тогда $p_n q_n \leq \mu(p_n p_n', p_n' q_n', q_n' q_n) \leq \mu(\xi_n,\eta_n,\zeta_n)$

при любом n и так как последовательности $(\xi_n),(\eta_n),(\zeta_n)$ монотонно убывающие, то $p_{n+\ell} q_{n+\ell} \leq \mu(\xi_{n+\ell},\eta_{n+\ell},\zeta_{n+\ell}) \leq$
$\leq \mu(\xi_{n+\ell},\eta_{n+\ell},\zeta_n)$

при любых n и ℓ. Так как $\mu(\xi_{n+\ell},\eta_{n+\ell}) \to \Delta\ (\ell \to +\infty)$, то используя лемму и непрерывность сверху μ, получим $\tilde{p}\tilde{q} \leqslant \mu(\Delta,\zeta_n)=\zeta_n$, а значит $\tilde{p}\tilde{q} \leqslant \tilde{p}'\tilde{q}'$. Аналогично получим неравенство $\tilde{p}'\tilde{q}' \leqslant \tilde{p}\tilde{q}$.

Докажем аксиомы СМП. В силу равносильности отношений эквивалентности введенных по метрике d и случайной метрике pq имеем $\tilde{p}\tilde{q}=\Delta \Leftrightarrow \tilde{p}=\tilde{q}$. Аксиома симметрии очевидна. Пусть $(p_n)\in\tilde{p}, (q_n)\in\tilde{q}, (r_n)\in\tilde{r}$.
Тогда имеем $p_n q_n \leqslant \mu(p_n r_n, r_n q_n) \leqslant \mu(\sup\limits_{k>n} p_k r_k, \sup\limits_{k>n} r_k q_k)$.
Снова используя лемму и учитывая непрерывность сверху μ, получим

$$\tilde{p}\tilde{q}=\lim_n p_n q_n \leqslant \mu(\lim_n \sup_{k>n} p_k r_k, \lim_n \sup_{k>n} r_k q_k)=\mu(\tilde{p}\tilde{r},\tilde{r}\tilde{q}).$$

Таким образом, $\tilde{M}$ является СМП с той же функцией треугольника μ.

в) Рассмотрим в СМП $(\tilde{M},\mu)$ равномерную структуру $\mathfrak{U}_1$. В силу непрерывности сверху μ она существует. Покажем, что она совпадает с равномерной структурой пополнения метрического пространства (M,d). Если $(\tilde{p},\tilde{q})\in$ $\in\{(\tilde{p},\tilde{q}):\ell(\tilde{p}\tilde{q},\Delta)<\varepsilon_{n+1}\}$, то в силу того, что $\tilde{p}\tilde{q}=$ $=\lim\limits_k p_k q_k$ для данного числа $\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}$ существует N_n такое, что $\ell(p_k q_k, \tilde{p}\tilde{q})<\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}$ при всех $k>N_n$. Тогда $\ell(p_k q_k,\Delta)<\varepsilon_n$, а значит $d(p_k,q_k)<\delta_n$. Переходя к пределу по k, получим $d(\tilde{p},\tilde{q})<\delta_n$. Итак, установлено включение

$$\{(\tilde{p},\tilde{q}):\ell(\tilde{p}\tilde{q},\Delta)<\varepsilon_{n+1}\}\subset\{(\tilde{p},\tilde{q}):d(\tilde{p},\tilde{q})<\delta_n\}.$$

Аналогично устанавливается включение

$$\{(\tilde{p},\tilde{q}):d(\tilde{p},\tilde{q})<\delta_{n+1}\}\subset\{(\tilde{p},\tilde{q}):\ell(\tilde{p}\tilde{q},\Delta)<\varepsilon_{n-1}\}.$$

Итак, равномерная структура $\mathfrak{U}_1$ СМП $(\tilde{M},\mu)$ полна. Поскольку отображение $p\longmapsto(p,p,\ldots)$ из M в $(\tilde{M},\mu)$ сохраняет случайную метрику, то существование пополнения относительно $\mathfrak{U}_1$ установлено.

Переходим к доказательству единственности. Пусть (M',μ) и (M'',μ) пополнения (M,μ); f и g – случайные изометрии пространства M на всюду плотные в метриках $p'q'\ (p',q'\in M')$ и $p''q''\ (p'',q''\in M'')$ подпространства $M_0'\subset M'$ и $M_0''\subset M''$ соответственно. Пусть $p'\in M'$. Тогда существует последовательность $(p_n')\subset M_0'$ такая, что $\rho_n'\rho' \to \Delta$ $(n \to +\infty)$. Следовательно, $(g\circ f^{-1})(\rho_n')$ фундаментальна в M'' , а значит сходится к некоторому элементу ρ'' . Положим $h(\rho') \equiv \rho''$. Непосредственно устанавливается, что элемент ρ'' не зависит от выбора последовательности (ρ_n'), сходящейся к ρ' . Наконец, пусть последовательность $(q_n') \subset M_0'$ такая, что $q_n'q' \to \Delta$. Тогда из неравенств

$$\rho_n'q_n' \leqslant \mu(\rho_n'\rho', \rho'q', q'q_n'), \quad \rho'q' \leqslant \mu(\rho'\rho_n', \rho_n'q_n', q_n'q')$$

и непрерывности сверху μ следует, что $\rho_n'q_n' \to \rho'q'$.
По тем же соображениям $g\circ f^{-1}(\rho_n')g\circ f^{-1}(q_n') \to \rho''q''$ в $\mathbb{B}$. Поскольку $g\circ f^{-1}$ изометрия, то $\rho''q'' = h(\rho')h(q') = \rho'q'$.
Сюрьективность отображения h можно установить обратившись к отображению $f\circ g^{-1}$. Теорема доказана полностью.

Используя свойства метрики Леви ℓ , можно получить (как и в теореме 2) реализацию пополнения равномерности $\mathfrak{U}_2$ в виде СМП $(\tilde{M}, \mu)$, где $\tilde{M}$ пополнение метрического пространства (M, d) $d(\rho, q) \equiv \sup\limits_{\tau \in M} \ell(\rho\tau, \tau q)$:

Теорема 3. Пусть фт μ непрерывна сверху. Тогда любое СМП (M, μ) обладает единственным пополнением относительно равномерности $\mathfrak{U}_2$ с той же фт μ .

В нашей работе [7] была установлена непрерывность сверху фт

$$\mu_S^T(\xi,\eta)(x) \equiv \inf_{S(x',x'')<x} T(\xi(x'),\eta(x'')) \quad (\xi,\eta \in \mathbb{B}) .$$

В работе [1] отмечалась непрерывность фт

$$\mu_*(\xi,\eta)(x) \equiv \eta(x) - \int_0^x \xi(x-t)\,d\eta(t) \quad (\xi,\eta \in \mathbb{B}) .$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие. Пусть (M, μ) - СМП, в котором фт $\mu = \mu_S^T$ или $\mu = \mu_*$. Тогда утверждения теорем 2 и 3 имеют место.

Замечание. Теоремы 2 и 3 в другой редакции и отличным от предлагаемого нами способом доказательства установлены в [3] .

Существование пополнения относительно равномерности $\mathfrak{U}_1$ имеет место при более слабом требовании на функцию треугольника, но уже без сохранения исходной фт. Через $\xi^x \equiv \xi I_{(-\infty,x]}$ обозначим срезку функции $\xi \in \mathbb{B}$ в точке x.

Скажем, что фт μ непрерывна сверху на бесконечности, если для любых $\xi, \eta \in \mathbb{B}$ выполнено условие:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon,\xi,\eta)>0\ \forall \xi_1,\eta_1\in \mathbb{B}\,(\xi_1\geqslant\xi,\ \eta_1\geqslant\eta,$$
$$\xi_1^N=\xi^N,\ \eta_1^N=\eta^N \Rightarrow \ell(\mu(\xi,\eta),\mu(\xi_1,\eta_1))<\varepsilon).$$

Если требование $\xi_1\geqslant\xi$, $\eta_1\geqslant\eta$ в приведенном выше условии убрать (соотв. заменить на требование $\xi_1\leqslant\xi,\eta_1\leqslant\eta$), то получим определение непрерывной на бесконечности (соотв. непрерывной снизу на бесконечности) фт.

Свойство непрерывности на бесконечности можно еще выразить, сказав, что фт μ мало зависит от достаточно далеких значений своих функциональных аргументов. Нетрудно видеть, что непрерывность, непрерывность сверху, непрерывность снизу функции треугольника влечет соответствующее свойство на бесконечности.

Назовем функцию треугольника μ предопределенной, если
$$\forall x\in \mathbb{R}_+\ \forall \xi,\xi_1,\eta,\eta_1\in \mathbb{B}\,(\xi^x=\xi_1^x,\ \eta^x=\eta_1^x \Rightarrow \mu(\xi,\eta)(x)=\mu(\xi_1,\eta_1)(x)).$$

Если трактовать $\mathbb{R}_+$ как ось времени, то можно сказать, что значения такой фт не зависят от будущего поведения ее функциональных аргументов. Примерами предопределенных фт являются функции треугольника μ_S^T, введенные нами в [7]. Можно показать, что предопределенная фт непрерывна снизу на бесконечности.

Теорема 4. Пусть фт μ непрерывна сверху на бесконечности либо предопределена. Допустим также, что семейство отображений $\xi\mapsto\mu(\xi,\eta)$ $(\eta\in\mathbb{B})$ из $\mathbb{B}$ в себя непрерывно в Δ. Тогда любое СМП (M,μ) обладает пополнением (M',μ') относительно равномерности $\mathfrak{U}_1$. Пополнение единственно с точностью до изоморфизма СМП.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай, когда μ непрерывна сверху на бесконечности. Покажем, что существует непрерывная сверху фт μ' такая, что $\mu\leqslant\mu'$.

Для произвольной функции $\xi\in\mathbb{B}$ положим $x_\xi\equiv\max\{x:\xi(x)=1\}$, а под обозначением " $\eta\succ\xi$ " будем понимать следующее:

1) $\eta\in\mathbb{B}$ непрерывна и $x_\eta>x_\xi$, 2) $\eta(x)>\xi(x)$ $(x>x_\xi)$.

Положим $\mu'(\xi,\eta)\equiv\inf\limits_{\xi'\succ\xi,\eta'\succ\eta}\mu(\xi',\eta')$ $(\xi,\eta\in\mathbb{B})$. Установим, что μ' непрерывная сверху фт. Свойство монотонности μ' следует из того, что если $\eta\leqslant\zeta$, то $\zeta'\succ\zeta$ влечет $\zeta'\succ\eta$. В силу условий теоремы, $\xi\to\Delta$ влечет $\mu(\xi,\eta)\to\eta$ при любом $\eta\in\mathbb{B}$. Значит Δ нейтральный элемент μ':

$$\mu'(\xi,\Delta)=\inf_{\xi'\succ\xi}\inf_{\eta'\succ\Delta}\mu(\xi',\eta')=\inf_{\xi'\succ\xi}\xi'=\xi.$$

Теперь покажем, что μ' непрерывна сверху. В силу монотонности и коммутативности μ' достаточно установить непрерывность сверху по первому аргументу при фиксированном втором.

Пусть $\xi_n\geqslant\xi,\ \xi_n\to\xi\ (n\to+\infty),\ \eta\in\mathbb{B}$. Так как последовательность ξ_n сходится, то она ограничена в $\mathbb{B}$, т. е. существует функция $\zeta\in\mathbb{B}$ такая, что $\xi_n\leqslant\zeta\ (n=1,2,\dots)$. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно, а $N_1>0$ такое, что $\mu'(\zeta,\eta)(N_1)<\varepsilon$. Пусть $x\in[x_\xi,N_1]$. Согласно определению $\inf$ в $\mathbb{B}$ существуют непрерывные функции $\xi'_\varepsilon,\eta'_\varepsilon\in\mathbb{B}$, число $x_\varepsilon>0$ такие, что $x_\varepsilon<x,\ \xi'_\varepsilon\succ\xi,\ \eta'_\varepsilon\succ\eta$ и $\mu(\xi'_\varepsilon,\eta'_\varepsilon)(x_\varepsilon)-\varepsilon<\mu'(\xi,\eta)(x)$. С другой стороны, для любых $y<x,\ \xi'_n\succ\xi_n,\ \eta'\succ\eta$ имеет место неравенство $\mu'(\xi_n,\eta)(x)\leqslant\mu(\xi'_n,\eta')(y)$. Поэтому для любых n и любых $\xi'_n\succ\xi_n$ справедливо неравенство

$$0\leqslant\mu'(\xi_n,\eta)(x)-\mu'(\xi,\eta)(x)<\mu(\xi'_n,\eta'_\varepsilon)(x_\varepsilon)-\mu(\xi'_\varepsilon,\eta'_\varepsilon)(x_\varepsilon)+\varepsilon. \quad (1)$$

Пусть δ число такое, что $0<\delta<\varepsilon$ и

$$\mu(\xi'_\varepsilon,\eta'_\varepsilon)(x_\varepsilon-\delta)-\mu(\xi'_\varepsilon,\eta'_\varepsilon)(x_\varepsilon)<\varepsilon\quad . \qquad (2)$$

По $\delta>0$ найдем число $N_2=N(\delta,\xi'_\varepsilon,\eta'_\varepsilon)$, фигурирующее в определении непрерывной сверху на бесконечности фт μ. Положим $N=\max(N_1,N_2)$.

Пусть $\sigma_1\equiv\inf\{\sigma>0:1-\sigma\leqslant\xi(x_{\xi'_\varepsilon}-\sigma)\}$, $x_1\equiv x_{\xi'_\varepsilon}-\sigma_1$. Тогда $x_\xi\leqslant x_1<x_{\xi'_\varepsilon}$. Положим

$$\ell_{N,\varepsilon}\equiv\inf_{x_1\leqslant x\leqslant N}\inf\{\sigma>0:\xi'_\varepsilon(x+\sigma)-\sigma\leqslant\xi(x)\}.$$

Убедимся в том, что $\ell_{N,\varepsilon}>0$. Действительно, если $\ell_{N,\varepsilon}=0$, то существует последовательность $\sigma_k\to0\ (k\to+\infty)$ и последовательность $y_k\in[x_1,N]$ такие, что $\xi'_\varepsilon(y_k+\sigma_k)-\sigma_k\leqslant\xi(y_k)$ для всех k. Выделим из (y_k) сходящуюся подпоследовательность $y_{k_n}\to y\in[x_1,N]$. Из (y_{k_n}) можно выделить подпоследовательность $(y_{k_{n_\ell}})$ такую, что либо $y_{k_{n_\ell}}\to y-$, либо $y_{k_{n_\ell}}\to y+$. Тогда в первом случае в силу непрерывности ξ'_ε будем иметь $\xi'_\varepsilon(y)\leqslant\xi(y-)=\xi(y)$, во-втором – $\xi'_\varepsilon(y)\leqslant\xi(y+)\leqslant\xi(y)$. Оба случая противоречат условию $\xi'_\varepsilon\succ\xi$.

Пусть n_0 такое число, что $\ell(\xi_n,\xi)<\frac{1}{4}\ell_{N,\varepsilon}$ для всех $n>n_0$, а ξ'_n такая функция из $\mathbb{B}$, что $\xi'_n\succ\xi_n$

и $l(\xi_n',\xi_n)<\frac{1}{4}l_{N,\varepsilon}$. Тогда $\xi_n'(t)\leqslant\xi_\varepsilon'(t)$ для всех $t\in[0,N]$. Положим $\xi_n''\equiv\max\{\xi_\varepsilon',\xi_n'\}$. Тогда $\xi_n''\succ\xi_n$ и значит из (1)

$$0\leqslant\mu'(\xi_n,\eta)(x)-\mu'(\xi,\eta)(x)<\mu(\xi_n'',\eta_\varepsilon')(x_\varepsilon)-\mu(\xi_\varepsilon',\eta_\varepsilon')(x_\varepsilon)+\varepsilon. \quad (3)$$

Поскольку срезки функций ξ_n'' и ξ_ε' в точке N_2 равны $(\xi_n'')^{N_2}=(\xi_\varepsilon')^{N_2}$, то по условию теоремы $l(\mu(\xi_n'',\eta_\varepsilon'),\mu(\xi_\varepsilon',\eta_\varepsilon'))<\delta$. Из этого неравенства следует,что

$$\mu(\xi_n'',\eta_\varepsilon')(x_\varepsilon)\leqslant\mu(\xi_\varepsilon',\eta_\varepsilon')(x_\varepsilon-\delta)+\delta \quad . \quad (4)$$

Таким образом, при $n>n_0$ из (2), (3), (4) получаем

$$0\leqslant\mu'(\xi_n,\eta)(x)-\mu'(\xi,\eta)(x)<\delta+\varepsilon+\varepsilon<3\varepsilon.$$

Если же $x<x_\varepsilon$, то так как $\mu'(\xi_n,\eta)\geqslant\mu'(\xi,\eta)\geqslant\xi$, а $\xi(x)\geqslant\xi(x_\varepsilon)=1$, то $\mu'(\xi_n,\eta)(x)=1=\mu'(\xi,\eta)(x)$.
Если $x>N$, то $0\leqslant\mu'(\xi_n,\eta)(x)-\mu'(\xi,\eta)(x)\leqslant 2\mu'(\zeta,\eta)(N_1)<2\varepsilon$.
Итак, для любого $x\in\mathbb{R}_+$ имеет место сходимость $\mu'(\xi_n,\eta)(x)\longrightarrow\mu'(\xi,\eta)$, что доказывает непрерывность сверху функций $\mu'(\cdot,\cdot)$.

Теперь мы можем доказать ассоциативность функции $\mu'(\cdot,\cdot)$. Для этого отметим, что в силу определения μ' имеем $\mu'\geqslant\mu$. Пусть $\xi,\eta,\zeta\in\mathbb{B}$ и $\xi',\eta',\zeta'\in\mathbb{B}$ таковы, что $\xi'\succ\xi,\eta'\succ\eta,\zeta'\succ\zeta$. Тогда

$$\mu'(\mu'(\xi,\eta),\zeta)\leqslant\mu(\mu(\xi',\eta'),\zeta')=\mu(\xi',\mu(\eta',\zeta'))\leqslant\mu'(\xi',\mu'(\eta',\zeta')).$$

Это неравенство верно для любых $\xi'\succ\xi,\eta'\succ\eta,\zeta'\succ\zeta$. Поэтому если $\xi_n'\succ\xi,\eta_n'\succ\eta,\zeta_n'\succ\zeta$ и $\xi_n'\longrightarrow\xi$, $\eta_n'\longrightarrow\eta,\zeta_n'\longrightarrow\zeta$, то из непрерывности сверху функции $\mu'(\cdot,\cdot)$ и леммы получим $\mu'(\mu'(\xi,\eta),\zeta)\leqslant\mu'(\xi,\mu'(\eta,\zeta))$.
Аналогично получается обратное неравенство и ассоциативность μ' установлена.

Для предопределенной фт μ доказательство существования непрерывной сверху фт $\mu'\geqslant\mu$ получается теми же рассуждениями. Изменения надо внести в определение N, положив $N=N_1$ и в соотношении (3) заметить, что для предопределенной фт μ равенство $\mu(\xi_n'',\eta_\varepsilon')(x_\varepsilon)=\mu(\xi_\varepsilon',\eta_\varepsilon')(x_\varepsilon)$ следует из $(\xi_n'')^N=(\xi_\varepsilon')^N$.

Теперь теорема 2 завершает доказательство.

<u>Теорема 5</u>. Пусть для фт μ выполняются условия теоремы 4. Тогда любое СМП (M,μ) обладает единственным пополнением (M',μ') относительно равномерности $\mathfrak{U}_2$.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 4 с использованием теоремы 3.

Литература

1. Шерстнев А. Н. О вероятностном обобщении метрических пространств. - Уч. зап. КГУ, Казань, 1964, 124, № 2, с.3-11.

2. Шерстнев А. Н. О понятии случайного нормированного пространства. - ДАН СССР, 1963, 149, №2,с.280 - 283.

3. Муштари Д. Х. О пополнении случайных метрических пространств. - В кн. : Вероятностные методы и кибернетика. Казань, 1967, № 5,с.109 - 119.

4. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. - М. : ГИТТЛ, 1949.

5. Муштари Д. Х. , Шерстнев А. Н. О способах введения топологии в случайных метрических пространствах. - Изв. вузов. Мат. , 1966, № 6.,с.99 - 108.

6. Келли Дж. Л. Общая топология. - М. : Наука , 1981.

7. Султанбеков Ф. Ф. Об одном классе функций треугольника в системе аксиом случайных метрических пространств . - Изв. вузов. Мат. , 1981, № 3,с.60 - 66.