ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.51

А. Ю. Александров

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

1. Введение. Основным при исследовании устойчивости движений нелинейных систем является прямой метод Ляпунова (метод функций Ляпунова) [1]. Он эффективно используется для решения широкого класса задач. Однако главной проблемой, связанной с применением этого метода, остается построение функций Ляпунова, удовлетворяющих условиям той или иной теоремы. Она является особенно трудной для систем большой размерности. Поэтому анализ устойчивости таких систем обычно проводится с помощью метода декомпозиции – агрегирования [2, 3]. Сначала производится декомпозиция изучаемой системы (разбиение ее на подсистемы меньшей размерности с выделением связей между ними), далее строятся функции Ляпунова для изолированных подсистем, а затем на этапе агрегирования найденные функции объединяются в одну скалярную или векторную функцию Ляпунова для получения условий устойчивости исходной системы.

Указанный метод использовался еще А. М. Ляпуновым при исследовании устойчивости в критических случаях [1, 4]. С помощью специальных преобразований он разбивал рассматриваемые системы на подсистемы, соответствующие критическим и некритическим переменным. Теория критических случаев получила глубокое развитие в трудах Г. В. Каменкова, И. Г. Малкина, В. И. Зубова, Н. Н. Красовского и многих других авторов (см. [5–9]).

Метод декомпозиции–агрегирования нашел широкое применение в задачах анализа устойчивости сложных (многосвязных, крупномасштабных) систем. В работах [2, 3, 10, 11] были предложены различные способы декомпозиции и агрегирования. В то же время следует заметить, что большинство из них эффективно только в случае, когда взаимодействующие подсистемы линейны или имеют экспоненциально устойчивые нулевые решения. Для существенно нелинейных подсистем использование этих способов может привести к «сверхдостаточным» условиям устойчивости [2, 3].

В настоящей статье исследуется динамика сложной системы, состоящей из двух взаимодействующих подсистем. Предполагается, что одна из изолированных подсистем

Александров Александр Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой управления медико-биологическими системами факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 108. Научные направления: качественная теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости. E-mail: alex43102006@yandex.ru.

является существенно нелинейной и описывается векторным уравнением Льенара [9]. С помощью метода функций Ляпунова и метода агрегирования определяются достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения изучаемой системы как по всем, так и по отношению к части переменных.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\ddot{X} + \frac{\partial F}{\partial X}\,\dot{X} + \frac{\partial G}{\partial X} = R(t, X, \dot{X}, Z), \\ &\dot{Z} = Q(t, Z) + D(t, X, \dot{X}, Z). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $X \in E^n$, $Z \in E^k$; скалярная функция $G(X)$ и элементы вектора $F(X)$ непрерывно дифференцируемы при всех $X \in E^n$ и являются однородными функциями порядка $\mu + 1$ и $\nu + 1$ соответственно, $\mu \geqslant 1$, $\nu > 0$; векторные функции $Q(t, Z)$, $R(t, X, \dot{X}, Z)$, $D(t, X, \dot{X}, Z)$ определены и непрерывны в области

$$t \geqslant 0, \quad \|X\| < h, \quad \|\dot{X}\| < h, \quad \|Z\| < h \tag{2}$$

($h = \mathrm{const} > 0$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора) и удовлетворяют условиям $Q(t, 0) = 0$, $R(t, 0, 0, 0) = 0$, $D(t, 0, 0, 0) = 0$ при всех $t \geqslant 0$. Таким образом, система (1) имеет нулевое решение.

Уравнения (1) описывают динамику сложной системы, состоящей из двух изолированных подсистем

$$\ddot{X} + \frac{\partial F}{\partial X}\,\dot{X} + \frac{\partial G}{\partial X} = 0, \tag{3}$$

$$\dot{Z} = Q(t, Z), \tag{4}$$

а функции $R(t, X, \dot{X}, Z)$ и $D(t, X, \dot{X}, Z)$ характеризуют взаимодействие между этими подсистемами.

Изолированная подсистема (3) представляет собой векторное уравнение Льенара [9], которое эквивалентно системе

$$\dot{X} = Y, \qquad \dot{Y} = -\frac{\partial F}{\partial X}\,Y - \frac{\partial G}{\partial X}. \tag{5}$$

Пусть для любого $X \neq 0$ матрица $\partial F/\partial X + (\partial F/\partial X)^*$ положительно определена. Тогда при всех $X, Y \in E^n$ справедлива оценка

$$Y^* \frac{\partial F}{\partial X}\,Y \geqslant c_1 \|X\|^\nu \|Y\|^2, \qquad c_1 > 0.$$

Кроме того, будем считать, что $G(X)$ – положительно-определенная функция. Известно [9, 12], что из указанных условий следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (5).

З а м е ч а н и е 1. Уравнения (1) могут описывать взаимодействие двух механических систем, первая из которых находится под действием нелинейных диссипативных и потенциальных сил [13]. Они также могут быть получены при исследовании критического случая n пар чисто мнимых корней (при $\mu = 1$) или критического случая $2n$ нулевых корней (при $\mu > 1$) [1, 5, 7].

Основная цель настоящей статьи – определить условия, при выполнении которых устойчивость нулевых решений изолированных подсистем (3) и (4) обеспечивает устойчивость нулевого решения системы (1).

3. Построение функции Ляпунова для уравнения Льенара. Рассмотрим сначала векторное уравнение Льенара (3) и эквивалентную ему систему (5). Известно [9, 12], что функцию Ляпунова для системы (5) можно выбрать в виде

$$V(X,Y)=G(X)+\frac{1}{2}\,Y^*Y. \tag{6}$$

Имеем

$$\dot V\big|_{(5)}=-Y^*\,\frac{\partial F}{\partial X}\,Y\leqslant -c_1\|X\|^\nu\|Y\|^2.$$

Таким образом, функция (6) удовлетворяет требованиям теоремы Барбашина–Красовского [12, с. 19].

Заметим, что производная $V(X,Y)$ в силу системы (5) знакопостоянна отрицательна, но не является отрицательно-определенной функцией. Существенный недостаток использования таких функций Ляпунова состоит в том, что они не дают возможности получить условия сохранения устойчивости в случаях, когда параметры изучаемых систем известны с некоторой погрешностью или когда на системы действуют внешние возмущающие силы [8, с. 97]. Поэтому построим для системы (5) функцию Ляпунова с отрицательно-определенной производной.

Пусть

$$V_1(X,Y)=G(X)+\frac{1}{2}\,Y^*Y+\gamma_1\,\|Y\|^{s-1}Y^*X+\gamma_2\,\|X\|^{r-1}X^*Y, \tag{7}$$

где $\gamma_1<0$, $\gamma_2>0$, $s\geqslant 1$, $r\geqslant 1$. Используя свойства обобщенно-однородных функций [14], находим, что если

$$r=\max\left\{\mu-\nu;\,\nu+1\right\},\qquad s=\max\left\{2-\frac{1}{\mu-\nu};\,1+\frac{2\nu}{\mu+1}\right\}, \tag{8}$$

а числа γ_1 и γ_2 достаточно малы по абсолютной величине, то в некоторой окрестности точки $(X^*,Y^*)^*=(0^*,0^*)^*$ справедливы неравенства

$$\alpha_1\left(\|X\|^{\mu+1}+\|Y\|^2\right)\leqslant V_1(X,Y)\leqslant\alpha_2\left(\|X\|^{\mu+1}+\|Y\|^2\right), \tag{9}$$

$$\dot V_1\big|_{(5)}\leqslant-\alpha_3\left(\|X\|^{r+\mu}+\|Y\|^{s+1}\right). \tag{10}$$

Здесь $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – положительные постоянные. Значит, $V_1(X,Y)$ – положительно-определенная функция, а ее производная в силу системы (5) отрицательно определена.

С помощью метода оценок [7, с. 70–75] нетрудно показать, что из выполнения неравенств (9) и (10) следует существование чисел $\delta>0$ и $\Delta>0$ таких, что если начальные данные решения $(X^*(t),Y^*(t))^*$ системы (5) удовлетворяют условиям $\|X(t_0)\|<\delta$, $\|Y(t_0)\|<\delta$, то при всех $t\geqslant t_0$ имеем

$$\|X(t)\|^{\mu+1}+\|Y(t)\|^2<\Delta(t-t_0+1)^{-\frac{\mu+1}{\omega}},$$

где $\omega=\max\{\mu-\nu-1;\,\nu\}$.

Наряду с уравнением (3) рассмотрим возмущенное уравнение

$$\ddot X+\frac{\partial F}{\partial X}\,\dot X+\frac{\partial G}{\partial X}=\Psi(t,X,\dot X), \tag{11}$$

в котором векторная функция $\Psi(t,X,\dot X)$ определена и непрерывна при $t\geqslant 0$, $\|X\|<h$, $\|\dot X\|<h$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\Psi(t,X,\dot X)\|\leqslant c_2\left(\|X\|^{\eta}\|\dot X\|+\|X\|^{\zeta}\right),\qquad c_2>0,\ \eta>0,\ \zeta>0.$$

Переходя от уравнения (11) к соответствующей системе

$$\dot X=Y,\qquad \dot Y=-\frac{\partial F}{\partial X}Y-\frac{\partial G}{\partial X}+\Psi(t,X,Y)$$

и дифференцируя функцию Ляпунова $V_1(X,Y)$ в силу этой системы, получаем, что при выполнении условий

$$\eta>\nu,\qquad \zeta>\max\left\{\mu;\ \nu+\frac{\mu+1}{2}\right\}$$

нулевое решение возмущенного уравнения также будет асимптотически устойчивым.

4. Условия асимптотической устойчивости относительно части переменных. Рассмотрим теперь сложную систему (1). Будем считать, что для функций $R(t,X,\dot X,Z)$ и $D(t,X,\dot X,Z)$, характеризующих взаимодействие между подсистемами, в области (2) справедливы оценки

$$\|R(t,X,\dot X,Z)\|\leqslant c_3(X,\dot X,Z)\left(\|X\|^{\eta}\|\dot X\|+\|X\|^{\zeta}\right),\qquad \|D(t,X,\dot X,Z)\|\leqslant c_4\,\|X\|^{\lambda},$$

где $c_3(X,\dot X,Z)\to 0$ при $\|X\|+\|\dot X\|+\|Z\|\to 0$; η,ζ,λ,c_4 – положительные постоянные.

Предположим также, что нулевое решение изолированной подсистемы (4) устойчиво, причем для нее в области $t\geqslant 0$, $\|Z\|<h$ существует функция Ляпунова $V_2(t,Z)$, обладающая следующими свойствами:

1) $V_2(t,Z)$ непрерывно дифференцируема и ее частные производные $\partial V_2/\partial z_i$, $i=1,\ldots,k$, ограничены;

2) $V_2(t,Z)$ – положительно-определенная функция;

3) $\dot V_2\big|_{(4)}\leqslant 0$.

З а м е ч а н и е 2. При выполнении данных условий устойчивость нулевого решения подсистемы (4) является равномерной [8, с. 58].

Если подсистема (3) – линейная ($\nu=0$, $\mu=1$), то для нахождения условий устойчивости нулевого решения исследуемой сложной системы можно использовать теорему Ляпунова–Малкина об устойчивости в критическом случае нескольких нулевых корней [5, с. 108–113] и ее обобщения, полученные в [15–18]. Согласно результатам указанных работ, для устойчивости нулевого решения системы (1) по всем переменным и асимптотической устойчивости относительно X и $\dot X$ достаточно, чтобы имели место неравенства $\eta\geqslant 0$, $\zeta\geqslant 1$, $\lambda>0$.

Цель п. 4 статьи – распространить теорему Ляпунова–Малкина на случай, когда подсистема (3) существенно нелинейна.

Теорема 1. *При выполнении неравенств*

$$\eta\geqslant\nu,\qquad \zeta\geqslant\max\left\{\mu;\ \nu+\frac{\mu+1}{2}\right\},\qquad \lambda>\max\left\{\mu-\nu-1;\ \nu\right\}$$

нулевое решение системы (1) *равномерно устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво относительно* X *и* $\dot X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся способом агрегирования, основанном на построении векторной функции Ляпунова и нелинейной системы сравнения.

Перейдем от системы (1) к эквивалентной ей системе

$$\begin{aligned} \dot X &= Y,\\ \dot Y &= -\frac{\partial F}{\partial X}Y - \frac{\partial G}{\partial X} + R(t,X,Y,Z),\\ \dot Z &= Q(t,Z) + D(t,X,Y,Z). \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим вектор-функцию Ляпунова $V(t,X,Y,Z) = (V_1(X,Y), V_2(t,Z))^*$. Здесь $V_1(X,Y)$ – функция Ляпунова, построенная по формуле (7), а $V_2(t,Z)$ – функция Ляпунова, соответствующая изолированной подсистеме (4). Дифференцируя эти функции в силу уравнений (12), получаем, что если для параметров r и s функции $V_1(X,Y)$ справедливы равенства (8), а значения γ_1 и γ_2 достаточно малы по абсолютной величине, то в некоторой окрестности точки $(X^*, Y^*, Z^*)^* = (0^*, 0^*, 0^*)^*$ и при всех $t \geqslant 0$ имеют место соотношения

$$\dot V_1\big|_{(12)} \leqslant (-b_1 + b_2 c_3(X,Y,Z))\left(\|X\|^{r+\mu} + \|Y\|^{s+1}\right), \qquad \dot V_2\big|_{(12)} \leqslant b_3\|X\|^{\lambda},$$

где $b_1, b_2, b_3 > 0$. Следовательно, существует число $\delta > 0$ такое, что при $t \geqslant 0$, $\|X\| < \delta$, $\|Y\| < \delta$, $\|Z\| < \delta$ выполняются неравенства

$$\dot V_1\big|_{(12)} \leqslant -b_4 V_1^{\frac{r+\mu}{\mu+1}}, \qquad \dot V_2\big|_{(12)} \leqslant b_5 V_1^{\frac{\lambda}{\mu+1}}.$$

Здесь b_4, b_5 – положительные постоянные. Таким образом, система

$$\begin{aligned} \dot u_1 &= -b_4 u_1^{\frac{r+\mu}{\mu+1}},\\ \dot u_2 &= b_5 u_1^{\frac{\lambda}{\mu+1}} \end{aligned} \tag{13}$$

представляет собой систему сравнения для уравнений (12).

Нетрудно проверить, что если $\lambda > r - 1$, то нулевое решение системы (13) равномерно устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво относительно u_1. Используя свойства функций $V_1(X,Y)$ и $V_2(t,Z)$, получаем [3, с. 46–50], что тогда нулевое решение системы (12) является равномерно устойчивым по всем переменным и асимптотически устойчивым относительно X и Y. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть задана система

$$\begin{aligned} &\ddot x + (a + \varphi(z))x^2\dot x + b\,x = 0,\\ &\ddot z + q(z) = \psi(x), \end{aligned} \tag{14}$$

описывающая взаимодействие двух нелинейных осцилляторов. Здесь $x \in E^1$, $z \in E^1$; a и b – положительные постоянные; функции $\varphi(z)$ и $q(z)$ определены и непрерывны при $|z| < h$ ($h = \text{const} > 0$), причем $\varphi(0) = q(0) = 0$, $zq(z) > 0$ при $z \neq 0$; функция $\psi(x)$ определена и непрерывна при $|x| < h$ и удовлетворяет условию $|\psi(x)| \leqslant c|x|^{\lambda}$, $c > 0$, $\lambda > 0$.

Рассмотрим соответствующие изолированные подсистемы

$$\ddot{x} + a\,x^2\dot{x} + b\,x = 0, \tag{15}$$
$$\ddot{z} + q(z) = 0. \tag{16}$$

Подсистема (15) представляет собой скалярное уравнение Льенара и имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. Нулевое решение подсистемы (16) устойчиво, а функцию Ляпунова для нее можно выбрать в виде

$$V_2(z, \dot{z}) = \int\limits_0^z q(\tau)d\tau + \frac{\dot{z}^2}{2}.$$

Применяя теорему 1, получаем, что если выполнено неравенство $\lambda > 2$, то положение равновесия $x = \dot{x} = z = \dot{z} = 0$ системы (14) устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво относительно x и $\dot{x}$.

5. Условия асимптотической устойчивости по всем переменным. Далее будем считать, что элементы вектора $Q(t, Z)$ заданы и непрерывны при $t \geqslant 0$, $Z \in E^k$ и для каждого фиксированного t являются однородными функциями порядка $\sigma \geqslant 1$ переменных $z_1, \ldots, z_k$. Кроме того, предположим, что нулевое решение изолированной подсистемы (4) асимптотически устойчиво, причем для нее существует функция Ляпунова $V_2(t, Z)$, которая определена и непрерывно дифференцируема в области $t \geqslant 0$, $\|Z\| < h$ и удовлетворяет неравенствам

$$\beta_1\|Z\|^{\xi+1} \leqslant V_2(t, Z) \leqslant \beta_2\|Z\|^{\xi+1}, \quad \left\|\frac{\partial V_2}{\partial Z}\right\| \leqslant \beta_3\|Z\|^{\xi}, \quad \dot{V}_2\big|_{(4)} \leqslant -\beta_4\|Z\|^{\xi+\sigma}. \tag{17}$$

Здесь $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \xi$ – положительные постоянные.

З а м е ч а н и е 3. Условия существования такой функции Ляпунова были получены в работах [7, 8, 19]. В частности, известно [7], что если подсистема (4) – автономная $(Q(t, Z) \equiv Q(Z))$ и ее правые части непрерывно дифференцируемы при всех $Z \in E^k$, то для любого положительного рационального числа ξ с нечетными числителем и знаменателем можно построить непрерывно дифференцируемую однородную порядка $\xi + 1$ функцию $V_2(Z)$, для которой справедливы оценки (17).

З а м е ч а н и е 4. В [19] доказано, что если выполнены неравенства (17), то при $\sigma = 1$ нулевое решение подсистемы (4) экспоненциально устойчиво, а при $\sigma > 1$ можно указать числа $\delta > 0$ и $\Delta > 0$ такие, что для любого решения $Z(t)$ этой подсистемы, начальные данные которого удовлетворяют условиям $t_0 \geqslant 0$, $\|Z(t_0)\| < \delta$, имеем

$$\|Z(t)\| < \Delta(t - t_0 + 1)^{-\frac{1}{\sigma-1}}$$

при всех $t \geqslant t_0$.

Рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{Z} = Q(t, Z) + \Phi(t, Z),$$

в которой $\Phi(t, Z)$ – непрерывная при $t \geqslant 0$, $\|Z\| < h$ векторная функция, такая, что $\|\Phi(t, Z)\| \leqslant c_5\|Z\|^{\alpha}$, $c_5 > 0$, $\alpha > 0$. Известно [19], что при $\alpha > \sigma$ возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения.

Определим условия, при выполнении которых из асимптотической устойчивости нулевых решений изолированных подсистем (3), (4) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнений (1).

В данном случае будем считать, что для функций $R(t, X, \dot{X}, Z)$ и $D(t, X, \dot{X}, Z)$ в области (2) справедливы оценки

$$\|R(t,X,\dot X,Z)\|\leqslant c_6\|Z\|^{\alpha},\quad \|D(t,X,\dot X,Z)\|\leqslant c_7\,\|X\|^{\lambda},$$

где c_6,c_7,α,λ – положительные постоянные.

Для получения требуемых условий используем способ агрегирования существенно нелинейных сложных систем, предложенный в работах [20–22].

Теорема 2. *При выполнении неравенства*

$$\alpha\lambda>\sigma\max\left\{\mu;\,\nu+\frac{\mu+1}{2}\right\}\tag{18}$$

нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функции

$$\widetilde V_1(X,Y)=\left(G(X)+\frac12\,Y^*Y\right)^{m_1+1}+\gamma_1\,\|Y\|^{s-1}Y^*X+\gamma_2\,\|X\|^{r-1}X^*Y,$$

$$\widetilde V_2(t,Z)=V_2^{m_2+1}(t,Z).$$

Здесь $\gamma_1<0$, $\gamma_2>0$, $s\geqslant1$, $r\geqslant1$, $m_1\geqslant1$, $m_2\geqslant1$, а $V_2(t,Z)$ – функция Ляпунова, построенная для подсистемы (4) и удовлетворяющая оценкам (17).

Для системы (12) функцию Ляпунова выбираем в виде

$$\widetilde V(t,X,Y,Z)=\widetilde V_1(X,Y)+\widetilde V_2(t,Z).\tag{19}$$

Пусть

$$r=m_1(\mu+1)+\max\left\{\mu-\nu;\,\nu+1\right\},\quad s=2m_1+\max\left\{\frac{2\mu}{\mu+1};\,1+\frac{2\nu}{\mu+1}\right\}.\tag{20}$$

Тогда при достаточно малых по абсолютной величине значениях γ_1 и γ_2 в некоторой окрестности точки $(X^*,Y^*,Z^*)^*=(0^*,0^*,0^*)^*$ и при всех $t\geqslant0$ будут выполнены соотношения

$$b_1\Big(\|X\|^{(m_1+1)(\mu+1)}+\|Y\|^{2(m_1+1)}+\|Z\|^{(m_2+1)(\xi+1)}\Big)\leqslant\widetilde V\leqslant$$
$$\leqslant b_2\Big(\|X\|^{(m_1+1)(\mu+1)}+\|Y\|^{2(m_1+1)}+\|Z\|^{(m_2+1)(\xi+1)}\Big),$$

$$\dot{\widetilde V}\big|_{(12)}\leqslant-b_3\Big(\|X\|^{r+\mu}+\|Y\|^{s+1}+\|X\|^{\nu+(\mu+1)(m_1+1)}\|Y\|^2+$$
$$+\|X\|^{\nu}\|Y\|^{2(m_1+1)}+\|Z\|^{m_2(\xi+1)+\xi+\sigma}\Big)+b_4\|X\|^{\lambda}\|Z\|^{m_2(\xi+1)+\xi}+$$
$$+b_5\|Z\|^{\alpha}\left(\|X\|^{r}+\|Y\|^{2m_1+1}+\|X\|^{(\mu+1)m_1}\|Y\|+\|X\|\|Y\|^{s-1}\right).$$

Здесь $b_i>0$, $i=1,\ldots,5$.

Используя свойства обобщенно-однородных функций [14, с. 187–191], нетрудно показать, что если

$$\frac{\lambda}{\sigma}>\frac{r+\mu}{m_2(\xi+1)+\xi+\sigma},\qquad \alpha>\frac{(s-2m_1)(m_2(\xi+1)+\xi+\sigma)}{s+1},\tag{21}$$

то существует число $\delta > 0$ такое, что при $t \geqslant 0$, $\|X\| < \delta$, $\|Y\| < \delta$, $\|Z\| < \delta$ имеем

$$\dot{\widetilde{V}}\Big|_{(12)} \leqslant -\frac{b_3}{2}\Big(\|X\|^{r+\mu} + \|Y\|^{s+1} + \|Z\|^{m_2(\xi+1)+\xi+\sigma}\Big).$$

Таким образом, функция (19) удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Учитывая формулы (20), по которым определяются параметры r и s, получаем, что если справедливо неравенство (18), то числа m_1 и m_2 можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения (21). Теорема доказана.

6. Оценки решений. Пусть правые части системы (1) обладают свойствами, указанными в п. 5. В частности, по-прежнему предполагаем, что для изолированной подсистемы (4) существует функция Ляпунова $V_2(t, Z)$, для которой справедливы оценки (17). Кроме того, будем считать, что выполнено неравенство (18). Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Значит, найдется такая окрестность положения равновесия $(X^*, \dot{X}^*, Z^*)^* = (0^*, 0^*, 0^*)^*$, что для любого решения $(X^*(t), Z^*(t))^*$ с начальными данными $(X^*(t_0), \dot{X}^*(t_0), Z^*(t_0))^*$, принадлежащими этой окрестности, имеет место предельное соотношение

$$\|X(t)\| + \|\dot{X}(t)\| + \|Z(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Цель п. 6 статьи – оценить время переходных процессов в исследуемой сложной системе.

Пусть параметры r и s функции Ляпунова $\widetilde{V}_1(X, Y)$, построенной при доказательстве теоремы 2, определяются по формулам (20). При фиксированных значениях α и λ неравенства (21) можно рассматривать как ограничения на параметры m_1 и m_2.

З а м е ч а н и е 5. Если функцию Ляпунова для системы (12) строить в виде

$$\widetilde{V}(t, X, Y, Z) = \varepsilon \widetilde{V}_1(X, Y) + \widetilde{V}_2(t, Z), \tag{22}$$

где $\varepsilon > 0$, то при соответствующем выборе числа ε одно из неравенств (21) (любое) может обращаться в равенство.

При достаточно малых по абсолютной величине значениях γ_1 и γ_2 для функции (22) в некоторой окрестности точки $(X^*, Y^*, Z^*)^* = (0^*, 0^*, 0^*)^*$ и при всех $t \geqslant 0$ имеем

$$\dot{\widetilde{V}}\Big|_{(12)} \leqslant -\tilde{b}_1\Big(\|X\|^{r+\mu} + \|Y\|^{s+1} + \|Z\|^{m_2(\xi+1)+\xi+\sigma}\Big) \leqslant -\tilde{b}_2 \widetilde{V}^{\rho+1}.$$

Здесь

$$\rho = \max\left\{\frac{\omega}{(m_1+1)(\mu+1)};\ \frac{\sigma-1}{(m_2+1)(\xi+1)}\right\}, \qquad \omega = \max\{\mu - \nu - 1;\ \nu\},$$

а $\tilde{b}_1$ и $\tilde{b}_2$ – положительные постоянные.

С помощью метода оценок [7, с. 70–75] получаем, что существуют числа $\tilde{\delta} > 0$ и $\tilde{\Delta} > 0$, зависящие, вообще говоря, от m_1 и m_2, такие, что если начальные данные решения $(X^*(t), Z^*(t))^*$ системы (1) удовлетворяют условиям $t_0 \geqslant 0$, $\|X(t_0)\| < \tilde{\delta}$, $\|\dot{X}(t_0)\| < \tilde{\delta}$, $\|Z(t_0)\| < \tilde{\delta}$, то

$$\|X(t)\|^{\mu+1} + \|\dot{X}(t)\|^2 < \tilde{\Delta}(t - t_0 + 1)^{-\frac{1}{(m_1+1)\rho}}, \tag{23}$$

$$\|Z(t)\|^{\xi+1} < \tilde{\Delta}(t - t_0 + 1)^{-\frac{1}{(m_2+1)\rho}} \tag{24}$$

для любых $t \geqslant t_0$.

Рассмотрим теперь задачу нахождения допустимых значений параметров m_1 и m_2, при которых неравенства (23) и (24) будут давать наиболее точные (в смысле наименьших показателей степеней) оценки решений.

Исследуем сначала неравенство (23). Пусть

$$g(m_1, m_2) = (m_1 + 1)\rho = \max\left\{\frac{\omega}{\mu+1};\ \frac{(\sigma-1)(m_1+1)}{(\xi+1)(m_2+1)}\right\}.$$

Требуется выбрать m_1 и m_2 так, чтобы величина функции $g(m_1, m_2)$ была наименьшей. При этом параметры m_1 и m_2 должны удовлетворять ограничениям (21). С учетом замечания 5 данные ограничения можно записать в виде

$$\frac{m_2+1}{m_1+1} \geqslant \frac{\sigma(\mu+1)(m_2+1)}{\lambda(\xi+1)(m_2+1) + \lambda(\sigma-1) - \sigma\omega},$$

$$\frac{m_1+1}{m_2+1} > \frac{(\mu+\nu+1+\omega)(\xi+1)(m_1+1)}{2\alpha(\mu+1)(m_1+1) + \alpha(\omega+\nu) - (\mu+\nu+1+\omega)(\sigma-1)}.$$

Если $(\mu+\nu+1+\omega)(\sigma-1) \geqslant 2\alpha\omega$, то значение функции $g(m_1, m_2)$ будет тем меньше, чем больше выбрано m_1 и чем ближе выражение $(m_1+1)/(m_2+1)$ к величине $(\mu+\nu+1+\omega)(\xi+1)/(2\alpha(\mu+1))$.

Если же $(\mu+\nu+1+\omega)(\sigma-1) < 2\alpha\omega$, то для нахождения наименьшего значения функции $g(m_1, m_2)$ сначала нужно выбрать m_1 настолько большим, чтобы

$$\frac{(\mu+\nu+1+\omega)(m_1+1)(\sigma-1)}{2\alpha(\mu+1)(m_1+1) + \alpha(\omega+\nu) - (\mu+\nu+1+\omega)(\sigma-1)} \leqslant \frac{\omega}{\mu+1},$$

а затем выбрать m_2 так, чтобы выполнялось равенство $(m_1+1)/(m_2+1) = \omega(\xi+1)/((\sigma-1)(\mu+1))$.

Неравенство (24) исследуется аналогичным образом.

В результате получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Существуют постоянные $\hat{\delta}, \hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2 > 0$ такие, что для решений $(X^*(t), Z^*(t))^*$ системы (1) с начальными данными, удовлетворяющими условиям $t_0 \geqslant 0$, $\|X(t_0)\| < \hat{\delta}$, $\|\dot{X}(t_0)\| < \hat{\delta}$, $\|Z(t_0)\| < \hat{\delta}$, при всех $t \geqslant t_0$ имеют место оценки*

$$\|X(t)\|^{\mu+1} + \|\dot{X}(t)\|^2 < \hat{\Delta}_1(t - t_0 + 1)^{-\theta_1}, \tag{25}$$

$$\|Z(t)\| < \hat{\Delta}_2(t - t_0 + 1)^{-\theta_2}. \tag{26}$$

Здесь

$$\theta_1 = \begin{cases} \frac{\mu+1}{\omega}, & \text{если } \alpha > \frac{(\mu+\nu+1+\omega)(\sigma-1)}{2\omega}, \\ \frac{2\alpha(\mu+1)p_1}{(\mu+\nu+1+\omega)(\sigma-1)}, & \text{если } \alpha \leqslant \frac{(\mu+\nu+1+\omega)(\sigma-1)}{2\omega}, \end{cases} \qquad \theta_2 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma-1}, & \text{если } \lambda(\sigma-1) \geqslant \sigma\omega, \\ \frac{\lambda p_2}{\omega\sigma}, & \text{если } \lambda(\sigma-1) < \sigma\omega, \end{cases}$$

а p_1 и p_2 – любые числа из интервала $(0, 1)$.

З а м е ч а н и е 6. Оценки (25) и (26) будут тем точнее, чем ближе значения p_1 и p_2 к единице. При этом постоянные $\hat{\delta}, \hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$, вообще говоря, зависят от выбора величин p_1 и p_2.

З а м е ч а н и е 7. Если выполнены неравенства

$$\alpha > \frac{(\mu+\nu+1+\omega)(\sigma-1)}{2\omega}, \qquad \lambda(\sigma-1) \geqslant \sigma\omega,$$

то показатели степеней в оценках, полученных для решений сложной системы (1), совпадают с показателями степеней в известных оценках для решений изолированных подсистем (3), (4).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = -ax^2y - bx^3 + c_1 z^6, \\ &\dot{z} = -dz^3 + c_2 x^\lambda, \end{aligned} \tag{27}$$

где $x, y, z \in E^1$; a, b, d, c_1, c_2 – постоянные коэффициенты, причем $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$; λ – положительное рациональное число с нечетным знаменателем.

В соответствии с теоремой 2, для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (27) достаточно выполнения неравенства $\lambda > 2$. Применяя теорему 3, получаем, что существуют числа $\hat{\delta}, \hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2 > 0$ такие, что для решений $(x(t), y(t), z(t))^*$ системы (27) с начальными данными, удовлетворяющими условиям $t_0 \geqslant 0$, $|x(t_0)| < \hat{\delta}$, $|y(t_0)| < \hat{\delta}$, $|z(t_0)| < \hat{\delta}$, при всех $t \geqslant t_0$ справедливы оценки

$$|x(t)| \leqslant \hat{\Delta}_1 (t - t_0 + 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad |y(t)| \leqslant \hat{\Delta}_1 (t - t_0 + 1)^{-1}, \quad |z(t)| < \hat{\Delta}_2 (t - t_0 + 1)^{-\theta}.$$

Здесь $\theta = 1/2$, если $\lambda \geqslant 3$, и $\theta = \lambda p/6$, если $2 < \lambda < 3$, а в качестве p можно выбирать любое число из интервала $(0, 1)$.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 386 с.
2. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Киев: Наукова думка, 1984. 308 с.
3. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / под ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312 с.
4. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963. 116 с.
5. *Каменков Г. В.* Избранные труды: в 2 т. М.: Наука, 1971. Т. 1. 260 с.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 432 с.
7. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973. 272 с.
8. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
9. *Rouche N., Mawhin J.* Ordinary differential equations: stability and periodic solutions. Boston etc.: Pitman, 1980. 260 p.
10. *Bellman R.* Vector Lyapunov functions // SIAM J. Contr. Ser. A. 1962. N 1. P. 32–34.
11. *Шильяк Д.* Децентрализованное управление сложными системами / пер. с англ.; под ред. В. М. Матросова, С. В. Савастюка. М.: Мир, 1994. 576 с. (*Siljak D. D.* Decentralized Control of Complex Systems. Cambridge, MA: Academic Press, 1991.)
12. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
14. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судостроение, 1959. 324 с.
15. *Озиранер А. С.* Об устойчивости движения в критических случаях // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 415–421.
16. *Матросова Н. И.* Вектор-функции Ляпунова в изучении критических случаев // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений: сб. науч. трудов: [материалы Всесоюз. конференции. Иркутск, 1–3 июля 1986 г.] / отв. ред. В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский. Новосибирск: Наука, 1988. С. 195–203.

17. *Воротников В. И.* К задачам устойчивости по отношению к части переменных // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 5. С. 736–745.

18. *Александров А. Ю.* Об устойчивости одного класса нелинейных систем // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 545–550.

19. *Красовский Н. Н.* Об устойчивости по первому приближению // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 5. С. 516–530.

20. *Косов А. А.* Об устойчивости сложных систем по нелинейному приближению // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 10. С. 1432–1434.

21. *Александров А. Ю.* Об устойчивости сложных систем в критических случаях // Автоматика и телемеханика. 2001. № 9. С. 3–13.

22. *Aleksandrov A. Yu., Platonov A. V.* Construction of Lyapunov's functions for a class of nonlinear systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2006. Vol. 6, N 1. P. 17–29.

Статья рекомендована к печати проф. А. П. Жабко.

Статья принята к печати 19 мая 2011 г.