УДК 517.958

М.П.ЛЕНЮК, Н.П.ОЛЕЙНИК

ОДИН КЛАСС ГИБРИДНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ-ФУРЬЕ-...-БЕССЕЛЯ- ФУРЬЕ) НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ С $2n$ ТОЧКАМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим на множестве $I^+_{2n}=\{r: r\in \bigcup_{k=0}^{2n}(R_k,R_{k+1});\ R_0=0,\ R_{2n+1}=\infty\}$ сингулярную задачу Штурма-Лиувилля: построить решение сепаратной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\omega^2_{2k+1}\right)v_{2k+1}(r)=0,\quad r\in(R_{2k},R_{2k+1}),\quad k=\overline{0,n},$$
$$(B_{\nu_k,\alpha_k}+\omega^2_{2k})v_{2k}(r)=0,\quad r\in(R_{2k-1},R_{2k}),\quad k=\overline{1,n}, \tag{1}$$

по краевым условиям

$$\left(\alpha^0_{10}\frac{d}{dr}+\beta^0_{10}\right)v_1(r)\big|_{r=0}=0,\quad v_{2n+1}\big|_{r=\infty}<\infty \tag{2}$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j1}\right)v_k-\left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j2}\right)v_{k+1}\right]\Big|_{r=R_k}=0,\quad j=1,2;\quad k=\overline{1,2n}. \tag{3}$$

Здесь

$$\omega^2_k=a_k^{-2}(\lambda^2+\gamma^2_k),\ a_k>0,\ \gamma_k\geqslant 0,\ \alpha^k_{jm}\geqslant 0,\ \beta^k_{jm}\geqslant 0,\ \lambda\in[0,\infty);$$

$$c_{i,k}=\alpha^k_{2i}\beta^k_{1i}-\alpha^k_{1i}\beta^k_{2i}\neq 0,\ (\alpha^0_{10})^2+(\beta^0_{10})^2\neq 0,\ B_{\nu,\alpha}=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2}$$

$(\nu\geqslant\alpha\geqslant -1/2)$ – оператор Бесселя [1].

Фундаментальную систему решений уравнения $\left(\frac{d^2}{dr^2}+\omega^2\right)v=0$ образуют функции $\cos\omega r$ и $\sin\omega r$ [2], а для уравнения $(B_{\nu,\alpha}+\omega^2)v=0$ – функции $J_{\nu,\alpha}(\omega r)=(\omega r)^{-\alpha}J_\nu(\omega r)$ и $N_{\nu,\alpha}(\omega r)=(\omega r)^{-\alpha}N_\nu(\omega r)$ [1].

Введем в рассмотрение величины и функции:

$$\sigma_1=\frac{a_{2n+1}}{a_1^2}\prod_{s=1}^{2n}\frac{c_{1,s}}{c_{2,s}}\prod_{s=1}^{n}\left(\frac{R_{2s-1}}{R_{2s}}\right)^{2\alpha_s+1},\quad \sigma_{2k-1}=\frac{a_{2n+1}}{a^2_{2k-1}}\prod_{s=2k-1}^{2n}\frac{c_{1,s}}{c_{2,s}}\prod_{s=k}^{n}\left(\frac{R_{2s-1}}{R_{2s}}\right)^{2\alpha_s+1},$$

$$\sigma_{2k}=\frac{a_{2n+1}}{a^2_{2k}}\prod_{s=2k}^{2n}\frac{c_{1,s}}{c_{2,s}}\prod_{s=k+1}^{n}\left(\frac{R_{2s-1}}{R_{2s}}\right)^{2\alpha_s+1}\frac{1}{(R_{2k})^{2\alpha_k+1}},\quad \sigma_{2n+1}=\frac{1}{a_{2n+1}},$$

$$v^{k1}_{ij}(\omega_sR_k)=-\alpha^k_{ij}\omega_s\sin\omega_sR_k+\beta^k_{ij}\cos\omega_sR_k, \tag{4}$$

$$v^{k2}_{ij}(\omega_sR_k)=\alpha^k_{ij}\omega_s\cos\omega_sR_k+\beta^k_{ij}\sin\omega_sR_k,$$

$$u^{k1}_{\nu,\alpha;ij}(\omega_sR_k)=\left(\alpha^k_{ij}\frac{\nu-\alpha}{R_k}+\beta^k_{ij}\right)J_{\nu,\alpha}(\omega_sR_k)-\alpha^k_{ij}\omega^2_sR_kJ_{\nu+1,\alpha+1}(\omega_sR_k),$$

$$u^{k2}_{\nu,\alpha;ij}(\omega_sR_k)=\left(\alpha^k_{ij}\frac{\nu-\alpha}{R_k}+\beta^k_{ij}\right)N_{\nu,\alpha}(\omega_sR_k)-\alpha^k_{ij}\omega^2_sR_kN_{\nu+1,\alpha+1}(\omega_sR_k),$$

$$\Phi^n_{km}(\omega_sx,\omega_sR_n)=v^{n2}_{km}(\omega_sR_n)\cos\omega_sx-v^{n1}_{km}(\omega_sR_n)\sin\omega_sx,$$

$$\Psi^n_{\nu,\alpha;km}(\omega_sx,\omega_sR_n)=u^{n1}_{\nu,\alpha;km}(\omega_sR_n)N_{\nu,\alpha}(\omega_sx)-u^{n2}_{\nu,\alpha;km}(\omega_sR_n)J_{\nu,\alpha}(\omega_sx).$$

Непосредственно проверяется, что решением спектральной задачи (1)-(3) являются функции:

$$V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\prod_{s=2}^{2n}\omega_s\prod_{s=1}^{2n}c_{2,s}\prod_{s=1}^{n}\left(\omega_{2s}R_{2s-1}\right)^{-(2\alpha_s+1)}\Phi^0_{10}(\omega_1r,\omega_1R_0),$$

$$V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-k}\prod_{s=2k+2}^{2n}\omega_s\prod_{s=2k+1}^{2n}c_{2,s}\prod_{s=k+1}^{n}\left(\omega_{2s}R_{2s-1}\right)^{-(2\alpha_s+1)}\times$$

$$\times\left[\Phi_{12}^{2k}(\omega_{2k+1}r;\omega_{2k+1}R_{2k})B_{\overline{(1,4k-1)},4k+1;\overline{(1,4k)}}-\Phi_{22}^{2k}(\omega_{2k+1}r;\omega_{2k+1}R_{2k})B_{\overline{(1,4k)};\overline{(1,4k)}}\right] \tag{5}$$

$$(1\leqslant k\leqslant n-1),$$

$$V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-k}\prod_{s=2k+1}^{2n}\omega_s\prod_{s=2k}^{2n}c_{2,s}\prod_{s=k+1}^{n}\left(\omega_{2s}R_{2s-1}\right)^{-(2\alpha_s+1)}\times$$

$$\times\left[\Psi_{\nu_k\alpha_k;22}^{2k-1}(\omega_{2k}r;\omega_{2k}R_{2k-1})B_{\overline{(1,4k-2)};\overline{(1,4k-2)}}-\right.$$

$$\left.-\Psi_{\nu_k\alpha_k;12}^{2k-1}(\omega_{2k}r;\omega_{2k}R_{2k-1})B_{\overline{(1,4k-3)},4k-1;\overline{(1,4k-2)}}\right]\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

$$V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda) = \left[\Phi_{12}^{2n}(\omega_{2n+1}r;\omega_{2n+1}R_{2n})B_{\overline{(1,4n-1)},4n+1;\overline{(1,4n)}}-\right.$$

$$\left.-\Phi_{22}^{2n}(\omega_{2n+1}r;\omega_{2n+1}R_{2n})B_{\overline{(1,4n)};\overline{(1,4n)}}\right]\equiv$$

$$\equiv\left[\omega_{2n+1}\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\lambda)\cos\omega_{2n+1}(r-R_{2n})-\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\lambda)\sin\omega_{2n+1}(r-R_{2n})\right],$$

$$(\nu,\alpha) = (\nu_1,\alpha_1;\nu_2,\alpha_2;\ldots;\nu_n,\alpha_n).$$

В формулах (5) принимают участие определители $B_{\overline{(1,j)};\overline{(1,j)}}$, $B_{\overline{(1,j-1)},j+1;\overline{(1,j)}}$ прямоугольной матрицы A_{4n+1}^{4n} размерности $(4n+1)\times(4n)$:

$$\begin{bmatrix}
v_{10}^{01} & v_{10}^{02} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0\\
v_{11}^{11} & v_{11}^{12} & -u_{\nu_1\alpha_1;12}^{11} & -u_{\nu_1\alpha_1;12}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot\\
v_{21}^{11} & v_{21}^{12} & -u_{\nu_1\alpha_1;22}^{11} & -u_{\nu_1\alpha_1;22}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & u_{\nu_1\alpha_1;11}^{21} & u_{\nu_1\alpha_1;11}^{22} & -v_{12}^{21} & -v_{12}^{22} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & u_{\nu_1\alpha_1;21}^{21} & u_{\nu_1\alpha_1;21}^{22} & -v_{22}^{21} & -v_{22}^{22} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & v_{11}^{31} & v_{11}^{32} & -u_{\nu_2\alpha_2;12}^{31} & -u_{\nu_2\alpha_2;12}^{32} & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_{21}^{31} & v_{21}^{32} & -u_{\nu_2\alpha_2;22}^{31} & -u_{\nu_2\alpha_2;22}^{32} & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & u_{\nu_2\alpha_2;11}^{41} & u_{\nu_2\alpha_2;11}^{42} & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & u_{\nu_2\alpha_2;21}^{41} & u_{\nu_2\alpha_2;21}^{42} & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -u_{\nu_n\alpha_n;12}^{2n-1,1} & -u_{\nu_n\alpha_n;12}^{2n-1,2}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -u_{\nu_n\alpha_n;22}^{2n-1,1} & -u_{\nu_n\alpha_n;22}^{2n-1,2}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & u_{\nu_n\alpha_n;11}^{2n,1} & u_{\nu_n\alpha_n;11}^{2n,2}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & u_{\nu_n\alpha_n;21}^{2n,1} & u_{\nu_n\alpha_n;21}^{2n,2}
\end{bmatrix}$$

$$v_{ij}^{2k,s}=v_{ij}^{2k,s}(\omega_{2k+1}R_{2k}),\quad v_{ij}^{2k+1,s}=v_{ij}^{2k+1,s}(\omega_{2k+1}R_{2k+1}),\quad u_{\nu_m\alpha_m;ij}^{2m,s}=u_{\nu_m\alpha_m;ij}^{2m,s}(\omega_{2m}R_{2m}),$$

$$u_{\nu_m\alpha_m;ij}^{2m-1,s}=u_{\nu_m\alpha_m;ij}^{2m-1,s}(\omega_{2m}R_{2m-1}),\quad s,i,j=1,2,\quad 0\leq k\leq n-1,\quad 1\leq m\leq n.$$

Индекс $(\overline{1,j})$ указывает, что в образовании данного определителя принимают участие строки (столбцы) матрицы с номерами от 1 до j, а индекс $(\overline{1,j-1})$, $j+1$ указывает, что j-я строка заменяется $(j+1)$-й.

С помощью единичной функции Хевисайда $\Theta(r)$ [3] построим спектральную функцию

$$V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)=\sum_{j=1}^{2n}V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda)\Theta(r-R_{j-1})\Theta(R_j-r)+V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda)\Theta(r-R_{2n}),\tag{6}$$

весовую функцию

$$\sigma(r)=\sum_{j=1}^{2n}\sigma_j\Theta(r-R_{j-1})\Theta(R_j-r)+\sigma_{2n+1}\Theta(r-R_{2n}),\tag{7}$$

характеристическую функцию

$$\chi(r)=\sum_{j=1}^{2n}a_j^2\Theta(r-R_{j-1})\Theta(R_j-r)+a_{2n+1}^2\Theta(r-R_{2n})\tag{8}$$

и функцию

$$\varphi(r)=\sum_{j=0}^{n-1}1\cdot\Theta(r-R_{2j})\Theta(R_{2j+1}-r)+\sum_{j=1}^{n}r^{2\alpha_j+1}\Theta(r-R_{2j-1})\Theta(R_{2j}-r)+1\cdot\Theta(r-R_{2n}).$$

Наличие спектральной функции $V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)$, весовой функции $\sigma(r)$ и спектральной плотности

$$\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)=[\alpha_{12}^{2n}B_{\overline{(1,4n-1)},4n+1;\overline{(1,4n)}}(\lambda)-\alpha_{22}^{2n}B_{\overline{(1,4n)};\overline{(1,4n)}}(\lambda)]^2\omega_{2n+1}^2+\tag{9}$$

$$+[\beta_{12}^{2n}B_{\overline{(1,4n-1)},4n+1;\overline{(1,4n)}}(\lambda)-\beta_{22}^{2n}B_{\overline{(1,4n)};\overline{(1,4n)}}(\lambda)]^2\equiv[\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\lambda)]^2\omega_{2n+1}^2+[\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\lambda)]^2$$

позволяет написать на множестве I_{2n}^+ интегральное представление меры Дирака [3]:

$$\frac{\delta(r-\rho)}{\varphi(r)\sigma(\rho)}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\omega_{\nu,\alpha}(\lambda)\sqrt{\lambda^2+\gamma_{2n+1}^2}}.\tag{10}$$

Последнее порождает прямое H_{2n} и обратное H_{2n}^{-1} гибридное интегральное преобразование Фурье–Бесселя–Фурье–...–Бесселя–Фурье на полярной оси с $2n$ точками сопряжения:

$$H_{2n}[f(r)]=\int_0^\infty f(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)\varphi(r)dr\equiv\tilde{f}(\lambda),\tag{11}$$

$$H_{2n}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\tilde{f}(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\sqrt{\lambda^2+\gamma_{2n+1}^2}}\equiv f(r).\tag{12}$$

Имеет место утверждение о разложимости.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция*

$$F(r)=\left[\sum_{k=0}^{n-1}1\cdot\Theta(r-R_{2k})\Theta(R_{2k+1}-r)+1\cdot\Theta(r-R_{2n})+\sum_{k=1}^{n}r^{\alpha_k+1/2}\Theta(r-R_{2k-1})\Theta(R_{2k}-r)\right]f(r)$$

определена на множестве I_{2n}^+, кусочно-непрерывная, абсолютно интегрируемая и имеет ограниченную вариацию. Тогда для $r\in I_{2n}^+$ справедливо интегральное представление

$$\frac{1}{2}[f(r-0)+f(r+0)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\gamma_{2n+1}^2}\,\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)}\int_0^\infty f(\rho)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda)\sigma(\rho)\varphi(\rho)d\rho.\tag{13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функций

$$V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda),\ V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\beta)\ (j=\overline{0,n})$$

и

$$V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda),\ V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\beta)\ \ (k=\overline{1,n})$$

имеют место соответственно равенства:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{d^2}{dr^2}+\omega^2_{2j+1}(\lambda)\right)V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda)=0; & (14)\\ \left(\dfrac{d^2}{dr^2}+\omega^2_{2j+1}(\beta)\right)V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\beta)=0,\ j=\overline{0,n}, & (15)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{d^2}{dr^2}+\dfrac{2\alpha_k+1}{r}\dfrac{d}{dr}+\omega^2_{2k}(\lambda)-\dfrac{\nu_k^2-\alpha_k^2}{r^2}\right)V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda)=0; & (16)\\ \left(\dfrac{d^2}{dr^2}+\dfrac{2\alpha_k+1}{r}\dfrac{d}{dr}+\omega^2_{2k}(\beta)-\dfrac{\nu_k^2-\alpha_k^2}{r^2}\right)V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\beta)=0,\ k=\overline{1,n}. & (17)\end{cases}$$

Умножая равенство (14) на $V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\beta)$, а равенство (15) – на $V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda)$ и вычитая из первого второе, получаем равенство

$$V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\beta)=(\omega^2_{2j+1}(\beta)-$$
$$-\omega^2_{2j+1}(\lambda))^{-1}\frac{d}{dr}[V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda)-$$
$$-V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\beta)]. \qquad (18)$$

Умножая равенство (16) на $r^{2\alpha_k+1}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\beta)$, равенство (17) – на $r^{2\alpha_k+1}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda)$ и вычитая из первого второе, получаем равенство

$$V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\beta)r^{2\alpha_k+1}=(\omega^2_{2k}(\beta)-\omega^2_{2k}(\lambda))^{-1}\frac{d}{dr}\Big[r^{2\alpha_k+1}(V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\beta)\times$$
$$\times\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda)-V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\beta))\Big]. \qquad (19)$$

Зададим некоторое достаточно большое число $A>R_{2n}$. Если умножить равенство (18) на σ_{2j+1} и проинтегрировать от R_{2j} до R_{2j+1}, а равенство (19) – на σ_{2k} и проинтегрировать от R_{2k-1} до R_{2k} и просуммировать, то получим

$$\int_{R_0}^{A}V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)\varphi(r)dr=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{R_{2j}}^{R_{2j+1}}V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\beta)\sigma_{2j+1}dr+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\beta)\sigma_{2k}r^{2\alpha_k+1}dr+$$
$$+\int_{R_{2n}}^{A}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\beta)\sigma_{2n+1}dr=$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}\Bigg[\frac{\sigma_{2j+1}}{\omega^2_{2j+1}(\beta)-\omega^2_{2j+1}(\lambda)}(V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda)-$$
$$-V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\beta))\Bigg]\Bigg|_{R_{2j}}^{R_{2j+1}}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\frac{r^{2\alpha_k+1}\sigma_{2k}}{\omega^2_{2k}(\beta)-\omega^2_{2k}(\lambda)}(V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda)-$$

$$-V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\beta))\Bigg]\Bigg|_{R_{2k-1}}^{R_{2k}}+$$

$$+\frac{\sigma_{2n+1}}{\omega_{2n+1}^2(\beta)-\omega_{2n+1}^2(\lambda)}\ (V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda)\ -$$

$$-\ V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\beta))\Big|_{R_{2n}}^{A}=$$

$$=\frac{\sigma_{2n+1}}{\omega_{2n+1}^2(\beta)-\omega_{2n+1}^2(\lambda)}\ (V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\lambda)-$$

$$-V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\beta)). \tag{20}$$

Для произвольных положительных чисел c и d $(c<d)$ и произвольной конечной функции $f(\lambda)$, заданной на сегменте $[c,d]$, найдем величину интеграла

$$\int_{R_0}^{\infty}\left(\int_c^d f(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda)d\lambda\right)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)\varphi(\rho)d\rho. \tag{21}$$

Двойной интеграл (21) в силу равенства (20) представим как

$$\lim_{A\to\infty}\int_c^d\frac{f(\lambda)\sigma_{2n+1}}{\omega_{2n+1}^2(\beta)-\omega_{2n+1}^2(\lambda)}\ [V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\beta)\frac{d}{d\rho}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\lambda)-$$

$$-V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\lambda)\frac{d}{d\rho}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\beta)]\,d\lambda. \tag{22}$$

В силу структуры функции $V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,x)$ имеем

$$[V_{(\nu,\alpha);2n+1}(x,\beta)\frac{d}{dx}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(x,\lambda)-V_{(\nu,\alpha);2n+1}(x,\lambda)\frac{d}{dx}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(x,\beta)]\Big|_{x=A}=$$

$$=\frac{1}{2}[\omega_{2n+1}(\lambda)\omega_{2n+1}(\beta)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\lambda)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\beta)+\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\lambda)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\beta)]\times$$

$$\times[\omega_{2n+1}(\beta)+\omega_{2n+1}(\lambda)]\sin[(\omega_{2n+1}(\beta)-\omega_{2n+1}(\lambda))(A-R_{2n})]+$$

$$+\frac{1}{2}[\omega_{2n+1}(\lambda)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\lambda)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\beta)-\omega_{2n+1}(\beta)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\beta)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\lambda)]\times$$

$$\times\cos[(\omega_{2n+1}(\beta)-\omega_{2n+1}(\lambda))(A-R_{2n})]\ [\omega_{2n+1}(\beta)+\omega_{2n+1}(\lambda)]+$$

$$+\frac{1}{2}[\omega_{2n+1}(\beta)-\omega_{2n+1}(\lambda)]\ [\omega_{2n+1}(\lambda)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\lambda)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\beta)+$$

$$+\omega_{2n+1}(\beta)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\beta)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\lambda)]\cos[(A-R_{2n})(\omega_{2n+1}(\beta)+\omega_{2n+1}(\lambda))]+$$

$$+\frac{1}{2}[\omega_{2n+1}(\beta)-\omega_{2n+1}(\lambda)]\ [\omega_{2n+1}(\beta)\omega_{2n+1}(\lambda)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\lambda)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\beta)-$$

$$-\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\lambda)\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\beta)]\sin[(A-R_{2n})(\omega_{2n+1}(\lambda)+\omega_{2n+1}(\beta))]. \tag{23}$$

Если функция $f(\lambda)$ непрерывная, абсолютно интегрируемая и имеет ограниченную вариацию на $[c,d]$, то подстановка (23) в (22) с использованием лемм Римана и Дирихле [4] дает равенства

$$\int_{R_0}^{\infty}d\rho\int_c^d f(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)\varphi(\rho)d\lambda=$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}f(\beta)\beta^{-1}\sqrt{\beta^2+\gamma_{2n+1}^2}\,[\omega_{2n+1}^2(\beta)(\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\beta))^2+(\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\beta))^2], & \beta\in[c,d];\\ 0, & \beta\overline{\in}[c,d].\end{cases}$$

Если функция f обладает указанными выше свойствами на множестве $[0,\infty)$, то

$$\int_{R_0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+\gamma_{2n+1}^2}}\,\frac{V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\beta)\lambda d\lambda}{[\omega_{2n+1}^{(2)}(\lambda)(\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\lambda))^2+(\omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\lambda))^2]}\right)\sigma(\rho)\varphi(\rho)d\rho=\begin{cases}f(\beta), & \beta\in[0,\infty);\\ 0, & \beta\overline{\in}[0,\infty).\end{cases}\tag{24}$$

Пусть теперь $F(r)$ – заданная при $r\in[R_0,\infty)$ непрерывная, абсолютно интегрируемая функция, имеющая там ограниченную вариацию и представимая в виде

$$F(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(\lambda)\,\frac{V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+\gamma_{2n+1}^2}\;\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)}\,\lambda d\lambda.\tag{25}$$

Умножим (25) на $\sigma(r)\varphi(r)\sigma_{2n+1}^{-1}V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta)$, где β – произвольное число, и проинтегрируем по r от R_0 до ∞. Тогда в силу (24) получим

$$\int_{R_0}^{\infty}F(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)\varphi(r)dr=\int_{R_0}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(\lambda)\,\frac{V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta)\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\gamma_{2n+1}^2}\;\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)}\,d\lambda\sigma(r)\varphi(r)dr=f(\beta).$$

Таким образом, если функция $F(r)$ определена и непрерывна в промежутке $[R_0,\infty)$, абсолютно интегрируема там и имеет ограниченную вариацию, то имеет место интегральное представление

$$F(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)}{\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\sqrt{\lambda^2+\gamma_{2n+1}^2}}\left(\int_{R_0}^{\infty}F(\rho)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda)\sigma(\rho)\varphi(\rho)d\rho\right)\lambda d\lambda.\tag{26}$$

В случае кусочной непрерывности функции $F(r)$ в точке r в правой части равенства (26) вместо $F(r)$ должно быть $\frac{1}{2}[F(r-0)+F(r+0)]$. Из формулы (26) следует, что функция $F(r)$ по своему образу

$$\tilde{F}(\lambda)=\int_{R_0}^{\infty}F(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)\varphi(r)dr$$

однозначно восстанавливается по формуле

$$F(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{F}(\lambda)\,\frac{V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\gamma_{2n+1}^2}\;\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)}\,d\lambda.$$

Замена в формуле (26) функции $F(r)$ на функцию $f(r)$ завершает доказательство теоремы.

С целью применения интегральных преобразований для решения соответствующих задач математической физики получим основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$\mathscr{L}=\sum_{j=0}^{n-1}\Theta(r-R_{2j})\Theta(R_{2j+1}-r)\frac{d^2}{dr^2}+\sum_{k=1}^{n}\Theta(r-R_{2k-1})\Theta(R_{2k}-r)B_{\nu_k,\alpha_k}+\Theta(r-R_{2n})\frac{d^2}{dr^2}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $f(r)$ дважды непрерывно дифференцируема на множестве I_{2n}^{+}, удовлетворяет краевому условию*

$$\left(\alpha_{10}^0\frac{d}{dr}+\beta_{10}^0\right)f(r)\Big|_{r=R_0}=g_0,$$

условиям сопряжения (3) *и исчезает вместе со своей первой производной на бесконечности, то имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора*

$$H_{2n}[\chi(r)\mathscr{L}[f(r)]]=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)-\alpha_1^2\sigma_1\,\frac{V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)}{\alpha_{10}^0}\,g_0-$$

$$-\sum_{j=0}^{n}\gamma_{2j+1}^2\int_{R_{2j}}^{R_{2j+1}} f(r)V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda)\sigma_{2j+1}dr-\sum_{k=1}^{n}\gamma_{2k}^2\int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f(r)V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda)\sigma_{2k}r^{2\alpha_k+1}dr \equiv$$

$$\equiv -\lambda^2\tilde{f}(\lambda)-a_1^2\sigma_1(\alpha_{10}^0)^{-1}V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)g_0-\Re_n(\lambda)\ \ (R_0=0;\ R_{2n+1}=\infty). \tag{27}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку сопряжения $r=R_m$. Обозначим $\bar{f}(R_m)=\lim\limits_{r\to R_m-0} f(r)$, $\overset{+}{f}(R_m)=\lim\limits_{r\to R_m+0} f(r)$. Из условий сопряжения в точке $r=R_m$

$$\alpha_{j1}^m\frac{d\bar{f}}{dr}+\beta_{j1}^m\bar{f}(R_m)=\alpha_{j2}^m\frac{d\overset{+}{f}}{dr}+\beta_{j2}^m\overset{+}{f}(R_m)$$

находим соотношения

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{f}}{dr}&=\frac{1}{c_{1,m}}\left[(-\alpha_{12}^m\beta_{21}^m+\alpha_{22}^m\beta_{11}^m)\frac{d\overset{+}{f}}{dr}+(\beta_{11}^m\beta_{22}^m-\beta_{12}^m\beta_{21}^m)\overset{+}{f}(R_m)\right],\\ \bar{f}(R_m)&=-\frac{1}{c_{1,m}}\left[(\alpha_{11}^m\alpha_{22}^m-\alpha_{12}^m\alpha_{21}^m)\frac{d\overset{+}{f}}{dr}+(\alpha_{11}^m\beta_{22}^m-\alpha_{21}^m\beta_{12}^m)\overset{+}{f}(R_m)\right].\end{aligned} \tag{28}$$

Такими же равенствами связаны в точке $r=R_m$ и функции $V_{(\nu,\alpha);m}(r,\lambda)$ и $V_{(\nu,\alpha);m+1}(r,\lambda)$.

Непосредственным вычислением в силу соотношений (28) получаем равенство

$$\frac{d\bar{f}}{dr}V_{(\nu,\alpha);m}(r,\lambda)-\bar{f}(R_m)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);m}(R_m,\lambda)=$$

$$=\frac{c_{2,m}}{c_{1,m}}\left[\frac{d\overset{+}{f}(R_m)}{dr}V_{(\nu,\alpha);m+1}(R_m,\lambda)-\overset{+}{f}(R_m)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);m+1}(R_m,\lambda)\right]. \tag{29}$$

Интегрируя в равенстве

$$H_{2n}[\chi(r)\mathscr{L}[f(r)]]\equiv\sum_{j=0}^{n}a_{2j+1}^2\int_{R_{2j}}^{R_{2j+1}}\frac{d^2f}{dr^2}V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\lambda)\sigma_{2j+1}dr+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}a_{2j}^2\int_{R_{2j-1}}^{R_{2j}}B_{\nu_j,\alpha_j}[f(r)]V_{(\nu,\alpha);2j}(r,\lambda)\sigma_{2j}r^{2\alpha_j+1}dr \tag{30}$$

по частям, находим

$$H_{2n}[\chi(r)\mathscr{L}[f(r)]]=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)-a_1^2\sigma_1\left[\frac{df}{dr}V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda)-f\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda)\right]\Bigg|_{r=R_0}+$$

$$+a_{2n+1}^2\sigma_{2n+1}\left[\frac{df}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda)-f(r)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda)\right]\Bigg|_{r=\infty}+$$

$$+\sum_{m=1}^{2n}\left\{a_m^2\sigma_m\left[\frac{d\bar{f}}{dr}V_{(\nu,\alpha);m}(R_m,\lambda)-\bar{f}(R_m)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);m}(R_m,\lambda)\right]-\right.$$

$$\left.-a_{m+1}^2\sigma_{m+1}R_m^{2\alpha_m+1}\left[\frac{d\overset{+}{f}}{dr}V_{(\nu,\alpha);m+1}(R_m,\lambda)-\overset{+}{f}(R_m)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);m+1}(R_m,\lambda)\right]\right\}-\Re_n(\lambda).$$

Поскольку в силу структуры σ_j

$$a_m^2\sigma_m=a_{m+1}^2\sigma_{m+1}R_m^{2\alpha_m+1}\frac{c_{1,m}}{c_{2,m}},$$

то в силу тождества (29) слагаемые под знаком суммы исчезают. Слагаемое при $r=\infty$ исчезает в силу условий на функции f и $V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda)$. В точке $r=R_0$ в силу свойств функции $V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda)$ имеем (при $\alpha_{10}^0\neq 0$)

$$\frac{d\overset{+}{f}}{dr}V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)-\overset{+}{f}(R_0)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda) = \frac{1}{\alpha_{10}^0}\Big[\frac{d\overset{+}{f}}{dr}\alpha_{10}^0 V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)+$$

$$+\beta_{10}^0\overset{+}{f}(R_0)V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)\Big]-\frac{\beta_{10}^0}{\alpha_{10}^0}\overset{+}{f}(R_0)V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)-\overset{+}{f}(R_0)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda) =$$

$$= \frac{V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)}{\alpha_{10}^0}\left(\alpha_{10}^0\frac{df}{dr}+\beta_{10}^0 f\right)\Big|_{r=R_0}-\frac{\overset{+}{f}(R_0)}{\alpha_{10}^0}\left[\left(\alpha_{10}^0\frac{d}{dr}+\beta_{10}^0\right)V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda)\Big|_{r=R_0}\right] =$$

$$= (\alpha_{10}^0)^{-1}V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)\left(\alpha_{10}^0\frac{df}{dr}+\beta_{10}^0 f\right)\Big|_{r=R_0}=(\alpha_{10}^0)^{-1}V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)g_0.$$

Последнее равенство завершает доказательство теоремы. Отметим, что при $\gamma_m^2=0$ $(m=\overline{1,2n+1})$ тождество (27) совпадает с известным тождеством в теории интегральных преобразований [5].

Наличие тождества (27) позволяет применять полученные интегральные преобразования для решения соответствующих задач математической физики по логической схеме следующего примера.

ЗАДАЧА. Построить ограниченное в области $D=\{(t,r)\colon t\in(0,\infty),\ r\in I_{2n}^+\}$ решение сепаратной системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a_{2k+1}^2}\frac{\partial}{\partial t}+\chi_{2k+1}^2-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_{2k+1}(t,r) = f_{2k+1}(t,r),\quad r\in(R_{2k},R_{2k+1}),\quad k=\overline{0,n},\\ &\left(\frac{1}{a_{2k}^2}\frac{\partial}{\partial t}+\chi_{2k}^2-B_{\nu_k,\alpha_k}\right)u_{2k}(t,r) = f_{2k}(t,r),\quad r\in(R_{2k-1},R_{2k}),\quad k=\overline{1,n},\end{aligned}\tag{31}$$

по начальным условиям

$$u_m(t,r)\Big|_{t=0} = g_m(r),\quad r\in I_{2n}^+,\quad m=\overline{1,2n+1},\tag{32}$$

краевым условиям

$$\left(\alpha_{10}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{10}^0\right)u_1(t,r)\Big|_{r=R_0} = g_0(t),\quad \frac{\partial}{\partial r}u_{2n+1}(t,r)\Big|_{r=\infty} = 0\tag{33}$$

и условиям сопряжения (3).

Запишем систему (31) и начальные условия (32) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial t}+a_1^2\chi_1^2-a_1^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_1\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+a_2^2\chi_2^2-a_2^2B_{\nu_1,\alpha_1}\right)u_2\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+a_3^2\chi_3^2-a_3^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+a_{2n}^2\chi_{2n}^2-a_{2n}^2B_{\nu_n,\alpha_n}\right)u_{2n}\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2-a_{2n+1}^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_{2n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1^2f_1(t,r)\\ a_2^2f_2(t,r)\\ a_3^2f_3(t,r)\\ \cdots\cdots\\ a_{2n}^2f_{2n}(t,r)\\ a_{2n+1}^2f_{2n+1}(t,r)\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\\ \cdots\\ u_{2n}(t,r)\\ u_{2n+1}(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\\ \cdots\\ g_{2n}(r)\\ g_{2n+1}(r)\end{bmatrix}.\tag{34}$$

Введем в рассмотрение операторную матрицу-строку

$$H_{2n}[\ldots] = \left(\int_{R_0}^{R_1} \ldots V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda)\sigma_1 dr \int_{R_1}^{R_2} \ldots V_{(\nu,\alpha);2}(r,\lambda)\sigma_2 r^{2\alpha_1+1} dr\right.$$

$$\int_{R_2}^{R_3} \ldots V_{(\nu,\alpha);3}(r,\lambda)\sigma_3 dr \ \ldots \int_{R_{2n-1}}^{R_{2n}} \ldots V_{(\nu,\alpha);2n}(r,\lambda)\sigma_{2n} r^{2\alpha_n+1} dr$$

$$\left.\int_{R_{2n}}^{\infty} \ldots V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda)\sigma_{2n+1} dr\right). \tag{35}$$

Предположим, что

$$\max\{a_1^2\chi_1^2,\ a_2^2\chi_2^2,\ldots,a_{2n}^2\chi_{2n}^2,\ a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2\} = a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2.$$

В противном случае произведем перенумерацию. Так как для $j=\overline{1,2n}$ $(a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2-a_j^2\chi_j^2)\geq 0$, то всюду положим $\gamma_{2n+1}^2=0$, $\gamma_j^2+a_j^2\chi_j^2=a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2$.

Применим к задаче (34) по правилу умножения матриц операторную матрицу-строку (35). В силу выбора γ_j^2 и тождества (27) в результате элементарных преобразований имеем задачу Коши [2]:

$$\left(\frac{d}{dt}+\lambda^2+a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2\right)\tilde{u}(t,\lambda) = \tilde{f}(t,\lambda) - \frac{a_1^2\sigma_1}{\alpha_{10}^0}V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)g_0(t),$$

$$\tilde{u}(t,\lambda)\Big|_{t=0} = \tilde{g}(\lambda);\quad \tilde{u}(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{2n+1}\int_{R_{j-1}}^{R_j} u_j(t,r)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda)\sigma_j\varphi_j dr; \tag{36}$$

$$\tilde{f}(t,\lambda)=\sum_{j=1}^{2n+1}\int_{R_{j-1}}^{R_j} a_j^2 f_j(t,r)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda)\sigma_j\varphi_j dr,\quad \tilde{g}(\lambda)=\sum_{j=1}^{2n+1}\int_{R_{j-1}}^{R_j} g(r)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda)\sigma_j\varphi_j dr.$$

Непосредственно проверяется, что решением задачи Коши (36) является функция

$$\tilde{u}(t,\lambda) = e^{-(\lambda^2+a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2)t}\tilde{g}(\lambda)+\int_0^t e^{-(\lambda^2+a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2)(t-\tau)}\tilde{f}(\tau,\lambda)d\tau-$$

$$-\frac{a_1^2\sigma_1}{\alpha_{10}^0}V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)\int_0^t e^{-(\lambda^2+a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2)(t-\tau)}g_0(\tau)d\tau. \tag{37}$$

Обратный к оператору (35) запишем в виде операторной матрицы-столбца

$$H_{2n}^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ldots V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda)\ \frac{d\lambda}{\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)} \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ldots V_{(\nu,\alpha);2}(r,\lambda)\ \frac{d\lambda}{\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ldots V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda)\ \frac{d\lambda}{\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)} \end{bmatrix} \tag{38}$$

и применим по правилу умножения матриц к матрице-элементу $(\tilde{u}(t,\lambda))$, где $\tilde{u}(t,\lambda)$ вычисляется по формуле (37). В результате элементарных преобразований получим искомое решение задачи (31)-(33),(3):

$$u_m(t,r) = \int_0^t W_{1m}(t-\tau,r)g_o(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{2n+1}\Big[\int_{R_{j-1}}^{R_j} G_{mj}(t,r,\rho)g_j(\rho)\sigma_j\varphi_j(\rho)d\rho +$$

$$+ a_j^2\int_0^t \int_{R_{j-1}}^{R_j} G_{mj}(t-\tau,r,\rho)f_j(\tau,\rho)\sigma_j\varphi_j(\rho)d\rho d\tau\Big], \quad m=\overline{1,2n+1}. \tag{39}$$

В формулах (39) принимают участие компоненты

$$G_{mj}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\lambda^2+a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2)t} V_{(\nu,\alpha);m}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha);j}(\rho,\lambda)\,\frac{d\lambda}{\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)}, \quad m,j=\overline{1,2n+1},$$

функции Коши (фундаментального решения задачи Коши) и компоненты

$$W_{1m}(t,r) = -\frac{2a_1^2\sigma_1}{\pi\alpha_{10}^0}\int_0^\infty e^{-(\lambda^2+a_{2n+1}^2\chi_{2n+1}^2)t} V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda)V_{(\nu,\alpha);m}(r,\lambda)\,\frac{d\lambda}{\omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)}, \quad m=\overline{1,2n+1},$$

функции Грина, порожденной краевым условием в точке $r=R_0$.

Отметим, что: а) параметры, принимающие участие в формулировке задачи, позволяют выделить непосредственно из общих структур любое требуемое практикой частное решение (в рамках предложенной модели); б) вышеизложенная методика дает возможность выписать в замкнутой форме решения задачи и для случая неоднородных условий сопряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ленюк М.П. *Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя* // Препринт №3. Ин-т матем. АН УССР. – Киев, 1983. – 64 с.

2. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* – 8-е изд. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

3. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс.* – М.: Наука, 1965. – 328 с.

4. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* – М.: Наука, 1969. – Т.3. – 656 с.

5. Трантер К.Дж. *Интегральные преобразования в математической физике.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 204 с.

г. Черновцы

Поступила
09.04.1990