В. В. Селезнев, М. Л. Славутин, Однолистная разрешимость обратных краевых задач с граничными условиями на годографе производной, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1990, выпуск 25, 220–229 нелинейности заложены в структурную модель. При решении задачи методом ДПДВ на каждом временном шаге требовалось 5 - 6 итераций в начале процесса и 2 итерации в конце.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М., 1977. - 663 с.
2. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации. М., 1976.
3. Беляшевский Н.И., Кремез В.С. Неустановившаяся фильтрация грунтовых вод в пойменных насыпях при паводке. - В кн.: Гидравлика и гидротехника. Киев, 1980, вып.31, с.79 - 84.
4. Дружинин Н.И. Метод электрогидродинамических аналогий и его применение при исследовании фильтрации. М., 1956. - 342 с.
5. Пухов Г.Е. Справочник по аналоговой вычислительной технике. Киев, 1975. - 431 с.

Доложено на семинаре 30 января 1987 года.

УДК 517.54

Селезнев В.В., Славутин М.Л.

ОДНОЛИСТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГОДОГРАФЕ ПРОИЗВОДНОЙ

В статье получен ряд достаточных условий однолистной разрешимости обратных краевых задач (ОКЗ) с граничными условиями на годографе производной искомой аналитической функции. Эти задачи решены авторами совместно с Р.Б.Салимовым в [1].

Работа разбита на два параграфа, в которых исследуются функции, дающие решения ОКЗ соответственно для односвязной (§ 1) и бесконечносвязной (§ 2) областей.

§ 1. Односвязная область

Задача 1.(внутренняя). Требуется найти в плоскости z конечную область D_z, ограниченную неизвестным замкнутым контуром $\mathcal{L}_z$, а также функцию $w(z)$, аналитическую в D_z, если известен годограф $\mathcal{L}_u$ граничных значений производной $w'(z)$ в плоскости u, на котором задается действительная часть функции $w[F(u)]$: $Re\, w[F(u)]=\varphi(u)$, где $z=F(u)$ – функция, обратная к функции $w'(z)$ и аналитическая в D_u. Здесь D_u область, ограниченная $\mathcal{L}_u$ и остающаяся слева при обходе контура $\mathcal{L}_u$ против часовой стрелки. Причем: I) $\varphi''(u)$ удовлетворяет условию Гельдера на $\mathcal{L}_u$ ($\varphi''(u)\in H$). 2) $\mathcal{L}_u$ – простая кривая Ляпунова, заданная параметрическим уравнением $u=u(t)$ (t – вещественный параметр, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$).

Решением задачи I является функция $z(\zeta)$, отображающая круг $E=\{\zeta:|\zeta|<1\}$ в плоскости ζ на искомую область D_z, причем

$$z'(\zeta)=\frac{\tilde{w}'(\zeta)}{\omega(\zeta)}, \tag{I}$$

где $\omega(\zeta)$ – функция, конформно отображающая круг E на область D_u,

$$\tilde{w}(\zeta)=w\{F[\omega(\zeta)]\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}d\gamma+C, \tag{2}$$

здесь $\varphi_0(\gamma)=\varphi[\omega(e^{i\gamma})]$, C – произвольная действительная постоянная.

Для построения условий однолистности решения задачи I понадобится следующая

<u>Теорема I</u> [2]. Пусть $f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}d\gamma=a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\ldots,|\zeta|<1.$

Пусть, далее, $|p(\gamma_1)-p(\gamma_2)|\leqslant A|\gamma_1-\gamma_2|$ при любых γ_1 и γ_2, $0<A<\infty$, где $p(\gamma)=x'(\gamma)+\sin\gamma$, и выполнено n $(n\geqslant 0)$ условий

$$\int_{-\pi}^{\pi}x(\gamma)e^{i\gamma}d\gamma=\pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}x(\gamma)e^{-ik\gamma}d\gamma=0,\quad k=\overline{2,n}.$$

Тогда функция $f(\zeta)$ однолистна в $|\zeta|<1$ при $A\leqslant 2(n+1)/\pi$.

Отметим, что условия теоремы I обеспечивают выполнение неравенства $|f'(\zeta)-1|<1$, $|\zeta|<1$, являющегося достаточным условием однолистности функции $f(\zeta)$ в круге $|\zeta|<1$.

Теорема 2. Функция $z(\zeta)$ будет однолистной в E в случае, когда точка $u=0$ не принадлежит области D_u, если

2.1° $g(\zeta)=\int\frac{d\zeta}{\omega(\zeta)}$ – выпуклая в E функция; и

2.2° выполняются условия теоремы I $(\varphi_0(\gamma)\equiv x(\gamma))$.

Доказательство. Воспользуемся следующим условием однолистности (например, [3]): если $Re[f'(\zeta)/g'(\zeta)]\geq 0, \zeta\in d$, где $g(\zeta)$ – регулярная функция, отображающая выпуклую область d на выпуклую область, то $f(\zeta)$ – функция, регулярная в d, будет почти-выпуклой. Согласно (I) $Re[z'(\zeta)/g'(\zeta)]=Re\,\tilde{w}'(\zeta)$. Нетрудно видеть, что $z(\zeta)$ будет почти выпуклой в E, если выполняется условие 2.1° теоремы и $Re\,\tilde{w}'(\zeta)\geq 0$. Последнее же обеспечивается условием 2.2°.

Обозначим [4] через d_λ область, любые две точки ζ_1 и ζ_2 которой можно соединить гладкой кривой $\ell(\zeta_1,\zeta_2)$, длина $\rho(\zeta_1,\zeta_2)$ которой удовлетворяет условию $\rho(\zeta_1,\zeta_2)\leq\lambda|\zeta_1-\zeta_2|$. Известна

Лемма I [5]. Регулярная в d_λ функция $F(\zeta)$ будет однолистной в d_λ, если для некоторого комплексного числа a, $a\neq 0$,

$$|F'(\zeta)-a|<|a|/\lambda, \quad \zeta\in d_\lambda .$$

Лемма 2 [2]. Пусть функция $S(\zeta)$ регулярна в $|\zeta|<1$ и в точке $\zeta=0$ имеет нуль порядка не ниже n ($n\geq 1$). Если $u(\theta)=Re\,S(e^{i\theta})$ удовлетворяет при любых θ_1 и θ_2 условию Липшица $|u(\theta_1)-u(\theta_2)|\leq K|\theta_1-\theta_2|,\ 0<K<\infty$, то

$$|S(\zeta)|\leq\frac{K}{n}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad |\zeta|\leq 1. \tag{3}$$

Справедлива

Теорема 3. В случае, когда точка $u=0$ принадлежит области D_u функция $z(\zeta)$ будет однолистной в E, если одновременно

3.1° $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(\gamma)e^{-i\gamma}d\gamma=0$ (условие разрешимости задачи I),

3.2° функция $g_0(\zeta)=\int\frac{\zeta d\zeta}{\omega(\zeta)}$ отображает E на область d_λ,

3.3° $|p(\gamma_1)-p(\gamma_2)|<A|\gamma_1-\gamma_2|$ при любых $\gamma_1,\gamma_2\in[0,2\pi]$,

где $p(\gamma)=\varphi_0(\gamma)-\sin 2\gamma$, причем

3.4° $A<4/(\pi\lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Согласно лемме I условие

$$|G'(g_0)-1|<1/\lambda \tag{4}$$

обеспечит однолистность функции $G(g_0)$ ($G[g_0(\zeta)]\equiv z(\zeta)$) в области d_λ , следовательно, и функции $z(\zeta)$ в E . Перепишем условие (4) в виде $|z'(\zeta)/g_0'(\zeta)-1|<1/\lambda$, то есть $|\tilde{w}'(\zeta)/\zeta-1|<1/\lambda$. Последнее неравенство в силу принципа максимума модуля (например, [6]) будет справедливо, если

$$|\tilde{w}'(e^{i\gamma})-e^{i\gamma}|<1/\lambda. \tag{5}$$

Пусть $S(\zeta)=\tilde{w}(\zeta)-\zeta^2/2$, тогда в силу условия 3.I^0 имеет место следующее разложение в точке $\zeta=0$: $i\zeta S'(\zeta)=b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+\ldots$.

Так как $Re[ie^{i\gamma}S'(e^{i\gamma})]=\varphi'(\gamma)-\sin 2\gamma$, то используя оценку (3) леммы 2, в силу условий 3.3^0 и 3.4^0, получим

$|i\zeta S'(\zeta)|\leq\frac{A}{2}\cdot\frac{\pi}{2}<1/\lambda$, $|\zeta|\leq 1$, то есть $|i\zeta[\tilde{w}'(\zeta)-\zeta]|<1/\lambda$.

Из последнего следует неравенство (5), что и требовалось доказать.

Приведем еще одно условие однолистности для случая, когда $0\in D_u$.

<u>Теорема 4</u>. Функция $z(\zeta)$ однолистна в E , если одновременно

4.I^0 выполняются условия 3.I^0 и 3.2^0 теоремы 3,

4.2^0 $|R_j(\gamma_1)-R_j(\gamma_2)|<K_j|\gamma_1-\gamma_2|^\alpha$ для любых γ_1 , γ_2 , где

$R_1(\gamma)\equiv[\varphi_0'(\gamma)-1]\sin\gamma$, $R_2(\gamma)\equiv[\varphi_0'(\gamma)+1]\cos\gamma$, $K_j>0$, $0<\alpha\leq 1$, $j=1,2$,

4.3^0 $M(\alpha)\sqrt{K_1^2+K_2^2}<1/\lambda$, где $M(\alpha)=\frac{\pi}{2^\alpha}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\theta^\alpha}{\sin\theta}d\theta$ [7],

4.4^0 $|e^{-i\gamma}\varphi_0'(\gamma)+\ell|<\frac{1}{\lambda}-M(\alpha)\sqrt{K_1^2+K_2^2}$, где $\ell=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_0'(\gamma)e^{-i\gamma}d\gamma$.

<u>Задача 2</u> (внешняя). Требуется найти в плоскости z область D_z , содержащую бесконечно удаленную точку и ограниченную неизвестным замкнутым контуром $\mathcal{L}_z$,а также функцию $f(z)$, аналитическую в D_z , которая в окрестности бесконечно удаленной точки имела бы разложение: $f(z)=a_1+a_{-1}z^{-1}+a_{-2}z^{-2}+\ldots$. Заданы: I) a_1 и a_{-1},отличные от нуля; 2) годограф $\mathcal{L}_u$; 3) функция $\varphi(u)$, которая представляет собой граничные значения действительной части многозначной аналитической функции $\int f(z)dz$ $(z=F(u))$ на $\mathcal{L}_u$, имеющей про-

стой полюс и логарифмическую особенность в бесконечно удаленной точке. Годограф $\mathcal{L}_u$ и функция $\varphi(u)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в задаче I.

Пусть a_{-1} – действительная постоянная. Не уменьшая общности, будем считать, что $\Im a_1 = 0$, $|a_1| < 1$. Тогда решение задачи 2 – функция $z(\zeta)$ – имеет производную $z'(\zeta) = \tilde{w}'(\zeta)/\omega(\zeta)$, где

$$\tilde{w}(\zeta) = -a_{-1}\ln\frac{\zeta - a_1}{1 - \zeta a_1} + \frac{a_{-1}a_1}{1 - a_1^2}\left(\frac{1 - \zeta a_1}{\zeta - a_1} - \frac{\zeta - a_1}{1 - \zeta a_1}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{\varphi}(\gamma)\frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta}d\gamma + iC_0,\ |\zeta| < 1.$$

Функция $\omega(\zeta)$ определяется так же, как в задаче I, C_0 – произвольная действительная постоянная, $\tilde{\varphi}(\gamma) = \varphi[\omega(e^{i\gamma})]$.

Пусть функция $\omega^*(\zeta_1)$, где $\zeta_1 = \dfrac{1 - \zeta a_1}{\zeta - a_1}$, конформно отображает круг $|\zeta_1| < 1$ на область D_u, определяемую так же, как и в задаче I. Обозначим $\varphi_0(\gamma) = \varphi[\omega^*(e^{i\gamma})]$. Тогда

$$\tilde{w}[\zeta(\zeta_1)] = w_*(\zeta_1) = a_{-1}\ln\zeta_1 + \frac{a_{-1}a_1}{1 - a_1^2}\left(\zeta_1 - \frac{1}{\zeta_1}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_0(\gamma)\frac{e^{i\gamma} + \zeta_1}{e^{i\gamma} - \zeta_1}d\gamma + iC_0 .$$

Введем обозначения: $\Phi'(\zeta_1) = a_{-1}\left[\dfrac{1}{\zeta_1} + A\left(1 + \dfrac{1}{\zeta_1^2}\right)\right]$, $A = a_1/(1 - a_1^2)$,

$w_0(\zeta_1)$ – интеграл Шварца в представлении функции $w_*(\zeta_1)$. Тогда $z'(\zeta_1) = \left[\Phi'(\zeta_1) + w_0'(\zeta_1)\right]/\omega^*(\zeta_1)$. Справедлива

<u>Теорема 5</u>. Задача 2 однолистно разрешима в случае, когда $u = 0 \bar{\in} D_u$, при одновременном выполнении условий:

5.1° $g(\zeta_1) = \displaystyle\int\frac{d\zeta_1}{\omega^*(\zeta_1)}$ – функция, отображающая область $E^- = \{\zeta_1 : |\zeta| > 1\}$ на область d_λ,

5.2° $|P_j(\gamma_1) - P_j(\gamma_2)| < K_j|\gamma_1 - \gamma_2|^\alpha$ для любых γ_1, γ_2, $K_j > 0$, $0 < \alpha \le 1$, $j = 1, 2$, где $P_1(\gamma) \equiv \varphi_0'(\gamma)\cos\gamma - a_{-1}(\cos\gamma + A\cos 2\gamma)$, $P_2(\gamma) \equiv \varphi_0'(\gamma)\sin\gamma - a_{-1}(\sin\gamma + A\sin 2\gamma)$,

5.3° $M(\alpha)\sqrt{K_1^2 + K_2^2} < |a_{-1}A|/\lambda$,

5.4° $|\varphi_0'(\gamma)e^{-i\gamma} + \ell_0| < \dfrac{|a_{-1}A|}{\lambda} - M(\alpha)\sqrt{K_1^2 + K_2^2}$, где $\ell_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi_0'(\gamma)e^{-i\gamma}d\gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Запишем условие $|z'(\zeta_1)/g'(\zeta_1) - b| < |b|/\lambda$, обеспечивающее однолистность функции $z(\zeta_1)$, в следующем виде:

$$\left|\Phi'(\zeta_1)+w_0'(\zeta_1)-b\right|<|b|/\lambda, \quad |\zeta_1|<1. \qquad (6)$$

Пусть $b=a_{-1}A$, тогда будем иметь

$$\left|\frac{a_{-1}}{\zeta_1}+\frac{a_{-1}A}{\zeta_1^2}+w_0'(\zeta_1)\right|<\frac{|a_{-1}A|}{\lambda}.$$

Так как $w_0'(\zeta_1)=-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_0'(\gamma)e^{-i\gamma}\frac{e^{i\gamma}+\zeta_1}{e^{i\gamma}-\zeta_1}d\gamma-i\ell_0$ и

$$\left(\frac{1}{\zeta_1}+\frac{A}{\zeta_1^2}\right)_{\zeta_1=e^{i\gamma}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\sin\theta+A\sin2\theta]\,ctg\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta+\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\cos\theta+A\cos2\theta]\,ctg\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta,$$

а условие (6) справедливо, если оно выполняется на окружности $|\zeta_1|=1$, то

$$\left|i\varphi_0'(\gamma)e^{-i\gamma}-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P_1(\theta)\,ctg\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P_2(\theta)\,ctg\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta+i\ell_0\right|<\frac{|a_{-1}A|}{\lambda}. \qquad (7)$$

Последнее будет иметь место, если

$$|\varphi_0'(\gamma)e^{-i\gamma}+i\ell_0|<\frac{|a_{-1}A|}{\lambda}-\max_{\gamma}|iJ_1(\gamma)+J_2(\gamma)|, \qquad (8)$$

где $J_1(\gamma)$ и $J_2(\gamma)$ – интегралы Гильберта в неравенстве (7). Условие (8) обеспечивается требованиями 5.2^0 – 5.4^0 теоремы.

§ 2. Бесконечносвязная область

Задача 3. Требуется найти в плоскости z бесконечносвязную область D_z , границей которой служит совокупность конгруэнтных замкнутых контуров $\mathcal{L}_z^{(n)}$ ($n=0,\pm1,\ldots$) постоянного заданного шага $pe^{i\beta}$, а также функцию $w(z)$, аналитическую в D_z , если известна, во-первых, в плоскости u замкнутая простая кривая Ляпунова $\mathcal{L}_u$ – годограф граничных значений $w'(z)$ на $\mathcal{L}_z^{(0)}$ и, во-вторых, на $\mathcal{L}_u$: $Re\, w[F(u)]=\varphi(u)$. Здесь $z=F(u)$ – функция, обратная к $w(z)$, многозначная аналитическая в D_u – области внутри $\mathcal{L}_u$. Пусть при этом: 1) функция $w'(z)$ однозначна в D_z , 2) $w'(z)=a_j$, если $Re\,[z\exp i(\frac{\pi}{2}-\beta)]\to(-1)^j_\infty$; $a_j\neq0,\infty$, $j=1,2$,

3) $w'(z)=w'(z+np e^{i\beta})$, 4) $\varphi''(u)\in H$,

5) $Re\,\Omega(u)=\varphi(u)-Re\left\{\frac{\rho e^{i\beta}}{2\pi i}\left[a_1 \ln(u-a_1)-a_2\ln(u-a_2)\right]\right\}\in H$ при $u\in\mathcal{L}_u$,

здесь $\ln(u-a_j)$ – ветвь, однозначная и непрерывная в плоскости u с разрезом по линии, соединяющей точки $u=a_j$ и $u=\infty$, $j=1,2$.

Решением задачи является функция

$$z(\zeta)=\frac{\rho e^{i\beta}}{2\pi i}\ln\frac{\omega(\zeta)-a_1}{\omega(\zeta)-a_2}+\int\frac{\Omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)}d\zeta+C, \qquad (9)$$

где $\omega(\zeta)$ конформно отображает круг E на область D_u, причем разрезу по линии Γ_u, соединяющей точки a_1 и a_2, соответствует разрез по линии Γ_ζ, соединяющей точки ζ_1 и ζ_2. Под $\ln\frac{\omega(\zeta)-a_1}{\omega(\zeta)-a_2}$ понимается ветвь, однозначная и непрерывная в $D_\zeta^0-E_\zeta$ с разрезом по линии Γ_ζ, $\Omega(\zeta)$ – интеграл Шварца с плотностью

$$\varphi_1(\gamma)=\tilde\varphi(\gamma)-Re\left\{\frac{\rho e^{i\beta}}{2\pi}\left[a_1\ln(\omega(e^{i\gamma})-a_1)-a_2\ln(\omega(e^{i\gamma})-a_2)\right]\right\},\ \tilde\varphi(\gamma)=\varphi[\omega(e^{i\gamma})].$$

Обозначим через $\mathcal{L}_R^{(0)}$ образ окружности ∂E при отображении функцией $R(\zeta)=\frac{\rho e^{i\beta}}{2\pi}\ln\frac{\omega(\zeta)-a_1}{\omega(\zeta)-a_2}$. Пусть ℓ – длина $\mathcal{L}_R^{(0)}$, k_0 – мажоранта ее кривизны, $m_0=\min\limits_{\zeta\in D_\zeta^{(0)}\cup\partial E}|R(\zeta)|$. Пусть также $u=u(t)$ $(t_1\le t\le t_2)$ – параметрическое уравнение $\mathcal{L}_u$. Для построения условий однолистности решения задачи 3 воспользуемся следующим результатом.

<u>Лемма 3</u> [8]. Пусть Γ_0 – выпуклая кривая с непрерывно изменяющейся кривизной $k<k_0$, $k_0=const$, $\mathcal{L}$ – длина Γ_0; M, N – две произвольные точки на Γ_0, разбивающие ее на две дуги, $\breve{MN}$ та из них, длина которой $\ell(\breve{MN})<\mathcal{L}/2$. Тогда $\lambda=\ell(\breve{MN})/\overline{MN}\le\frac{1}{4k_0\mathcal{L}}$, где $\overline{MN}$ – длина хорды, стягивающей $\breve{MN}$.

Справедлива

<u>Теорема 6</u>. Функция $z(\zeta)$, определенная формулой (9), в случае, когда $u=0\,\overline{\in}\,D_u$, будет однолистной, если одновременно

6.I° $$\Im m\left\{\frac{(a_1+a_2)u'(t)}{[u(t)-a_1][u(t)-a_2]}+\frac{u''(t)}{u'(t)}\right\}\ge 0,$$

6.2° существует комплексное число b такое, что

$$K=\frac{4}{k_0 \ell}\min_t |u(t)|-\max_t |u(t)-1/b|>0,$$

6.3° $|\varphi_1(\gamma_1)-\varphi_1(\gamma_2)|<\mu|\gamma_1-\gamma_2|$, где

6.4° $\mu<4|b|m_0 K/\pi$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $R(\zeta)$. Она локально однолистна в области $D_{\zeta}^{(0)}$, так как $\omega'(\zeta)\neq 0$ и $a_1\neq a_2$, и в силу условия 6.1° отображает окружность $|\zeta|=1$ на выпуклую кривую $\mathcal{L}_R^{(0)}$. Рассмотрим теперь бесконечносвязную область D_R, границей которой служит прямая решетка конгруэнтных контуров $\mathcal{L}_R^{(n)} (n=0,\pm1,..)$ с шагом $\rho e^{i\beta}$. Функция $G(R)$, отображающая область D_R на D_{ζ}, будет однолистной, если $G'(R)\neq 0$, $R\in D_R$, и контур $\mathcal{L}_z^{(0)}$ – простой, что следует из теоремы 4 статьи [9]. Рассмотрим функцию $G[R(\zeta)]=$ $=z(\zeta)$. Условие

$$|G'(R)-b|<|b|/\lambda \tag{10}$$

обеспечивает простоту кривой $\mathcal{L}_z^{(0)}$ и локальную однолистность $z'(\zeta)$ (и $G'(R)$) в области $D_{\zeta}^{(0)}$. Заметим, что область $D_{\zeta}^{(0)}$ отображается функцией $z(\zeta)$ на область $D_z^{(0)}$, ограниченную кривой $\mathcal{L}_z^{(0)}$ и конгруэнтными кривыми ℓ_1 и ℓ_2 – образами берегов разреза по линии Γ_{ζ}. В силу леммы 3 условие (10) перепишем в виде $|G'(R)-$ $-b|<4|b|/(k_0\ell)$. Это неравенство будет выполняться, если

$$\left|1+\frac{w_0'(\zeta)}{R'(\zeta)}-b\omega(\zeta)\right|<\frac{4|b|}{k_0\ell}\min_{\gamma}|\omega(e^{i\gamma})|.$$

Последнее обеспечивается следующим неравенством:

$$\left|\frac{w_0'(\zeta)}{R'(\zeta)}\right|<\frac{4|b|}{k_0\ell}\min_{\gamma}|\omega(e^{i\gamma})|-|b|\max_{\gamma}\left|\frac{1}{b}-\omega(e^{i\gamma})\right|,$$

то есть

$$|w_0'(\zeta)/R'(\zeta)|<|b|\cdot K. \tag{11}$$

Неравенство (11) верно, если

$$|w_0'(\zeta)|<|b|\,m_0 K. \tag{12}$$

Учитывая, что $\operatorname{Re} w_0(e^{i\gamma})=\varphi_1(\gamma)$ и $\operatorname{Re}\left[ie^{i\gamma}w_0'(e^{i\gamma})\right]=\varphi_1'(\gamma)$, а функция $g(\zeta)=i\zeta w_0'(\zeta)$ имеет нуль по крайней мере первого порядка, то согласно лемме 2 и условиям 6.3° и 6.4° неравенство (I2) будет иметь место всюду в $\bar{E}$.

Если предположить, что a_1, a_2, $B=\frac{\rho e^{i\beta}}{2\pi i}$ – действительные постоянные и $|a_j|<1$ $(j=1,2)$, то решение задачи можно представить в виде

$$z(\zeta)=\int \frac{\Phi'(\zeta)+w_1'(\zeta)}{\omega(\zeta)}d\zeta+C, \tag{I3}$$

где $\Phi(\zeta)=B\left[a_1\ln\frac{\zeta-a_1}{1-\zeta a_1}-a_2\ln\frac{\zeta-a_2}{1-\zeta a_2}\right]$, $w_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{\varphi}(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}d\gamma$,

под $\ln\frac{\zeta-a_1}{1-\zeta a_1}$ понимается ветвь, однозначная и непрерывная в плоскости ζ с разрезом по линии, соединяющей точки $\zeta=a_j$ и $\zeta=1/a_j$ $(j=1,2)$. Обозначим через $E_\zeta^{(0)}$ круг E с разрезом по линии, соединяющей точки $\zeta=a_1$ и $\zeta=a_2$, $A_j=a_j(1-a_j^2)$,

$$n_0=\Big||A_1(1+a_2^2)-A_2(1+a_1^2)|-|a_1a_2(a_2^2-a_1^2)|\Big|/\left[(1+a_1^2)(1+a_2^2)\right].$$

Теорема 7. Функция $z(\zeta)$, определенная формулой (I3), будет однолистной в случае, когда $u=0\bar{\in}D_u$, если одновременно

7.I° выполняется условие 6.2°,

7.2° $\Phi(\zeta)$ локально однолистна в $E_\zeta^{(0)}$, то есть корни уравнения $\zeta^2(A_1a_2-A_2a_1)-\zeta(2+A_1a_2^2+A_2a_1^2)+(A_1a_2-A_2a_1)=0$ лежат вне $\bar{E}$,

7.3° $|\tilde{\varphi}'(\gamma_1)-\tilde{\varphi}'(\gamma_2)|<N|\gamma_1-\gamma_2|$ для любых γ_1, $\gamma_2\in[0,2\pi]$, где

7.4° $N<\frac{4}{\pi}|B|n_0K$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 6.

В заключение заметим, что достаточные условия однолистности решения ОКЗ для случая двусвязной области можно получить так же, как и выше с помощью леммы I, используя при этом полученные П.Л.Шабалиным [I0] оценки для регулярных в круговом кольце функций.

ЛИТЕРАТУРА

I. С а л и м о в Р.Б., С е л е з н е в В.В., С л а в у т и н М.Л. Обратные краевые задачи с граничными условиями на годографе производной. - В кн.: Труды семинара по краевым задачам. Казань, 1988, вып.24.

2. А в х а д и е в Ф.Г. Радиусы выпуклости и почти выпуклости некоторых интегральных представлений. - Мат.заметки, 1970, т.7, вып.5, с.581 - 592.

3. K a p l a n W. Close-to-convex schlicht functions. Michigan Math., J.I, 1952, N 2, p.169 - 185.

4. А в х а д и е в Ф.Г., А к с е н т ь е в Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций. - Успехи матем. наук, 1975, т.30, вып.4, с.3 - 60.

5. Р о г о ж и н В.С. Достаточные условия однолистности решения обратных краевых задач. - ПММ, 1958, т.22, № 6, с. 804 - 807.

6. Л а в р е н т ь е в М.А., Ш а б а т Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - 4-е изд., исп. М., 1973. - 736 с

7. А к с е н т ь е в Л.А. Точные оценки для гармонических в круге функций. - Изв. вузов. Матем., 1968, № 3, с. 3 - 8.

8. Р е ш е т н и к о в Ю.А. Достаточные условия однолистности регулярных функций в круговом кольце. - Изв. вузов. Матем., 1982, № 2, с. 73 - 75.

9. А в х а д и е в Ф.Г. О методе локально гомеоморфного продолжения в теории достаточных условий однолистности. - В кн.: Труды семинара по краевым задачам. Казань, 1983, вып.20, с. 3 - 10.

10. Ш а б а л и н П.Л. Исследование общего решения обратной краевой задачи для аналитических функций. - Автореферат канд.дисс. Казань, 1976.

Доложено на семинаре 26 января 1987 года.