A. R. Its, V. B. Matveev, Algebrogeometrical integration of the MNS equation, the finite-gap solutions and their degeneration, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 101, 64–76

А.Р.Итс, В.Б.Матвеев

АЛГЕБРОГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ МНШ, КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ ВЫРОЖДЕНИЯ

Введение

Недавно Кауп и Ньюелл [I] заметили, что коммутативность пары операторов $\partial_x - U$, $\partial_t - V$ полиномиально зависящих от λ

$$U = \lambda(\lambda a + b),\ V = 2\lambda^3(\lambda a + b) + \lambda r q(\lambda a + b) + \lambda c, \tag{0.I}$$

$$a = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix} 0 & iq_x \\ -ir_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

порождают систему нелинейных уравнений

$$iq_t = -q_{xx} + i(rq^2)_x,\quad ir_t = r_{xx} + i(r^2 q)_x . \tag{0.3}$$

При $r = \pm \bar{q}$ эта система переходит в модифицированное нелинейное уравнение Шредингера (МНШ)

$$iq_t = -q_{xx} \mp i(|q|^2 q)_x$$

Уравнение МНШ описывает распространение циклически поляризованных Альфеновских волн в плазме, поэтому вычисление его решений представляет определенный интерес. Так же, как и в случае нелинейного уравнения Шредингера, метод обратной задачи рассеяния наталкивается на определенные трудности в построении компактных формул для многосолитонных решений. Поэтому в [I] описаны лишь односолитонные решения уравнения МНШ и его комплексификации (0.3). В настоящей работе получены компактные явные формулы для конечнозонных решений системы (0.3). Эти решения просто выражаются через многомерные Θ -функции. Простейшие вырождения конечнозонных решений приводят к явным представлениям для многосолитонных решений уравнения МНШ и многосолитонных решений на постоянном фоне.

Отметим, что конечнозонным решениям уравнения МНШ посвящена также работа А.К.Прикарпатского [2], однако примененный в ней метод позволил получить лишь явные формулы для симметрических функций от условных собственных чисел, переход от которых к самим решениям представляет отдельную задачу.

В недавней работе Н.В.Чередника [3] предложена общая схема интегрирования уравнений Захарова-Михайлова, однако данный пример не вкладывается явным образом в схему работы [3] и характеризуется отсутствием естественной априорной нормировки в аксиоматике ψ -функции, принадлежащей ядру операторов $\partial_x - U$, $\partial_t - V$. Укажем еще, что в работе [4] Герджикова, Иванова и Кулиша исследовался класс нелинейных эволюционных уравнений, сохраняющих ядро оператора $\partial_x - U$ и вычислялись переменные действие-угол для уравнений этого класса. Там же показано, что в этот класс (с точностью до калибровочной эквивалентности) попадает массивная модель Тирринга и ряд других релятивистски инвариантных систем.

Построения настоящей работы легко переносятся на случай векторного варианта уравнения МНШ, недавно исследованного в рамках метода обратной задачи рассеяния Доддом и Моррисом [5]. Соответствующие результаты будут опубликованы в отдельной статье.

I. Формулы для конечнозонных и многосолитонных решений.

Конечнозонные решения. Фиксируем гиперэллиптическую кривую Γ соотношением

$$\omega^2 = P(z),\ P(z) = \Pi(z - E_j),\ E_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, 2n+2,\ E_{2n+2} = 0. \quad (I.1)$$

Риманова поверхность Γ получается склеиванием двух экземпляров плоскости $\mathbb{C}$ с разрезами по отрезкам (дугам) $(\infty, E_1][E_{2k}, E_{2k+1}]$, $[E_{2n+2}, \infty)$. Канонический базис a и b циклов на поверхности Γ устроен следующим образом. Цикл a_k обходит вокруг отрезка $[E_{2k}, E_{2k+1}]$ по часовой стрелке на верхнем листе Γ. Цикл b_k начинается с левого берега разреза $[E_{2k}, E_{2k+1}]$ на верхнем листе, пересекает в единственной точке цикл a_k, не пересекая остальных циклов выходит на левый берег разреза $[E_{2n+2}, \infty)$ и по нижнему листу возвращается в исходную точку.

По набору циклов a_k и b_k строятся базис голоморфных дифференциалов dU_j, матрица B - периодов и вектор $U(P)$:

$$dU_j = P^{-\frac{1}{2}}(z) \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j^k z^{n-k} dz, \qquad \oint_{a_k} dU_j = \delta_{kj}, \quad (I.2)$$

$$B_{mn} = \oint_{b_m} dU_n,\ U(P) = \int_{E_{2n+2}}^{P} dU,\ (dU_j) = dU_j,\ P \in \Gamma. \quad (I.3)$$

5.3

Матрица B всегда симметрична, недиагональна (если род больше единицы) и не распадается на блоки. Мнимая часть B положительно определена на $\mathbb{R}^n$.

По матрице B строится n-мерная θ-функция

$$\theta(\vec{p})=\sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^n} exp\{\pi i(B\vec{k},\vec{k})+2\pi i(\vec{p},\vec{k})\},\ \vec{p}\in\mathbb{C}^n. \tag{I.4}$$

В описании решений участвует также абелевы интегралы $\omega_{1,2,3}$ с нулевыми a-периодами, сингулярности которых лежат в точках $\infty^{\pm}$ и описываются формулами*:

$$\omega_1(p)=\pm(z-2^{-1}E_0+R_1z^{-1})+O(z^{-2}),\ p\to\infty^{\pm} \tag{I.5}$$

$$\omega_2(p)=\pm(2z^2+2^{-1}N_0+z^{-1}F_1)+O(z^{-2}),\ p\to\infty^{\pm} \tag{I.6}$$

$$\omega_3(p)=2^{-1}\ln z+\gamma z^{-1}+\gamma_1 z^{-2}+O(z^{-3}),\ p\to\infty^{+}, \tag{I.7}$$

$$\omega_3(p)=-2^{-1}\ln z+\ln\omega_0+\delta z^{-1}+\delta_1 z^{-2}+O(z^{-3}),\ p\to\infty^{-}. \tag{I.8}$$

Решения системы (0.3), соответствующие кривой Γ и неособому дивизору $D=\sum_{j=1}^{n}P_j$ *), $P_j\in\Gamma$ имеют вид

$$q=i\theta(q+r)\theta(q-r)\theta^{-2}(q)exp\{i\alpha x-i\beta t\}, \tag{I.9}$$

$$r=4i\omega_0\theta(q)\theta(q+2r)\theta^{-2}(q+r)exp\{-i\alpha x+i\beta t\}, \tag{I.10}$$

$$rq=2i\partial_x \ln\{\theta(q)\theta^{-1}(q+r)\}-4\delta+2E_0,\ \alpha=E_0-4\delta, \tag{I.11}$$

$$\beta=N_0-16\gamma_1,\ q_j=-2i\Gamma_j^1x-4i(\Gamma_j^2+2^{-1}\Gamma_j^1\sum E_i)t+q_j(0,0),$$

$$q_j(0,0)=-\sum_{m=1}^{n}\int_0^{P_m}dU_j+\frac{j}{2}-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}B_{mj},\ r=\int_0^{\infty^+}dU, \tag{I.12}$$

последний интеграл берется по левому берегу разреза на верхнем

---

* Чтобы дивизор был неособым, необходимо и достаточно, чтобы проекции $\pi(P_m)$ точек P_m на комплексную плоскость были различны. ∞^+ и ∞^- служат обозначением бесконечноудаленных точек на верхнем и нижнем листе поверхности Γ соотвественно.

листе.

Многосолитонные решения. Эти решения представляют собой результат предельного $E_1 \to 0$, $E_{2\nu}$, $E_{2\nu+1} \to \lambda_\nu$, $\nu = 1,\dots,n$, в формулах (I.9) – (I.II) при дополнительном условии $n = 2m$. Мы считаем кроме того, что $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$, $j = 1,\dots,m$, $\lambda_{m+j} = \bar\lambda_j$. Это необходимо для выполнения равенства $q = \pm\bar\tau$. При этом предельный переход в формулах (I.9) – (I.II) приводит к следующему переопределению входящих в них объектов:

I. $$q_j = 2i\lambda_j x + 4i\lambda_j^2 t - 2^{-1}\ln(-4\lambda_j) + \eta_j, \quad j = 1,\dots,m,$$
$$2\pi i q_{m+j} = -2i\bar\lambda_j x - 4i\bar\lambda_j^2 t + 2^{-1}\ln(-4\bar\lambda_j) + \eta_{m+j}, \qquad (I.13)$$

2. $$2\pi i \tau_j = \ln(-4\lambda_j), \quad \tau_{m+j} = -\bar\tau_j, \qquad (I.14)$$

3. $$\alpha = \beta = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{4},$$

4. $$B_{\nu\nu} = 0; \quad B_{\nu\mu} = \ln\frac{(\lambda_\nu - \lambda_\mu)^2}{16\lambda_\mu^2\lambda_\nu^2}, \quad \mu \neq \nu, \quad \mu,\nu \geq m+1$$

или $\mu,\nu \leq m$;

$$2\pi i B_{\nu\mu} = \ln\frac{16\lambda_\mu^2\lambda_\nu^2}{(\lambda_\nu - \lambda_\mu)^2}, \quad \nu \leq m, \ \mu \geq n+1, \ \mu \neq \nu. \qquad (I.15)$$

5. Суммирование по решетке Z^n в (I.4) следует заменить на суммирование по векторам $\vec{k}$, таким что $k_\nu = 0, 1$ и удовлетворяющим следующим дополнительным условиям:

а) в переопределении $\theta(q+\tau)$ и $\theta(q)$

$$\sum k_j = \sum k_{m+j}, \quad j = 1,\dots,m \qquad (I.16)$$

б) в переопределении $\theta(q-\tau)$

$$\sum k_j = \sum k_{m+j} - 1, \qquad (I.17)$$

с) в переопределении $\theta(q+2\tau)$

$$\sum k_j = \sum k_{m+j} + 1. \qquad (I.18)$$

Построенные решения параметризуются $3m$ комплексными параметрами λ_j, η_ν. Подчинив η_j условию

$$\eta_j = \bar\eta_{m+j} - \frac{\pi i}{2}(1 \pm 1)$$

мы получаем многосолитонные решения уравнения МНШ. Еще проще описываются многосолитонные решения на постоянном фоне. Они параметризуются $2n+1$ числами $\alpha; \lambda_1,\ldots,\lambda_n; \eta_1,\ldots,\eta_n$, а θ-функции, входящие в формулы (I.9) – (I.II) переопределяются единым образом

$$\theta(q+\ell r)=\sum_{k\in Z^n_{0,1}} \exp\Big\{\sum_{\nu>\mu} \ln\Big(\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu+\gamma_\mu}\Big)^2 k_\nu k_\mu +$$

$$+\sum k_\nu(-2\varkappa_\nu x+4\varkappa_\nu(\alpha-\lambda_\nu)t+\ell\cdot\ln\frac{\gamma_\nu+1}{\gamma_\nu-1}+\eta_\nu)\Big\},$$

$$\gamma_\nu=\sqrt{\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu+\alpha}},\quad \varkappa_\nu=\sqrt{\lambda_\nu(\lambda_\nu+\alpha)},\quad \ell=1,2,-1. \tag{I.19}$$

Предельные значения параметров $E_0, N_0, \gamma, \delta, \omega_0$ даются формулами

$$E_0=0,\ N_0=-2\alpha^2,\ \gamma=\delta=0,\quad \omega_0=\frac{\alpha}{4},$$

$Z^n_{0,1}$ обозначает решетку n-мерных векторов, составляющие которых могут принимать лишь значения 0 или 1. Многосолитонные решения на постоянном фоне соответствуют предельному переходу $E_1\to-\alpha, E_{2k}, E_{2k+1}\to\lambda_k, k=1,2,\ldots,n$. Следуя работе одного из авторов [6] можно свернуть полученные многосолитонные (и многосолитонные на постоянном фоне) решения в детерминантные формулы. Из полученных формул легко извлекается асимптотика многосолитонных решений при $t\to\pm\infty$. При этом фазовые сдвиги, описывающие столкновения между солитонами стандартно выражаются через предельные значения недиагональных элементов матрицы B.

II. Ψ – функция для вспомогательной линейной системы.

В этом разделе мы опишем совместное решение (функцию Бейкера-Ахиезера) системы линейных уравнений

$$\partial_x\Psi=U\Psi, \tag{2.1}$$

$$\partial_t\Psi=V\Psi,\quad \Psi=\Psi(x,t,P),\ P\in\Gamma \tag{2.2}$$

параметризованное кривой Γ и неспециальным дивизором D.

Функция Ψ строится по следующим условиям:

1 $\Psi=\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{z}\end{pmatrix}\Psi,\ \lambda=\sqrt{z}$, однозначна на Γ и мероморфна на $\Gamma/\{\infty^\pm\}$. Ее дивизор полюсов $D=\sum_{i=1}^{k} P_i$ неспециален и не зависит от x и t.

2 Асимптотика Ψ_i при $P\to\infty^\pm, P\in\Gamma$ имеет вид:

$$\Psi_i^{\pm}=u_i(x,t)\left\{\sum_{j=-1}^{\infty}\xi_{ij}^{\pm}z^{-\frac{j}{2}}\right\}e^{\pm i(zx+2z^2t)}, \tag{2.3}$$

$$\xi_{1,2k-1}^{\pm}=0,\quad \xi_{1,0}^{-}=1,\quad k=0,1,\ldots \tag{2.4}$$

$$\xi_{2,2k}^{\pm}=0,\quad \xi_{2,-1}^{+}=1,\ k=0,1,\ldots,\ \xi_{2,-1}^{-}=0. \tag{2.5}$$

Функции $u_i(x,t)$ при этом априори не фиксируются и функция Ψ восстанавливается лишь с точностью до этих неопределенных множителей.

Можно, конечно, совершить зависящее от z калибровочное преобразование, при котором уравнение (2.I) превратится в систему Захарова-Шабата, однако явное вычисление коэффициентов исходной системы в терминах получившейся калибровочно эквивалентной системы оказывается труднее непосредственного использования Ψ - функции с неопределенной нормировкой, которой мы пользуемся.

Для первой компоненты функции Ψ на основании аксиом I, 2, 3 получаем:

$$\Psi_1=\frac{\theta(U(p)-q(x,t))\cdot\theta(q(0,0)+r)}{\theta(U(p)-q(0,0))\cdot\theta(q(x,t)+r)}\times$$

$$\times\exp\left\{i\omega_1(p)x+i\omega_2(p)t-\frac{ixE_0}{2}+\frac{iN_0t}{2}\right\}, \tag{2.6}$$

где векторы $U(p), q, r$ описываются формулами (I.3). Отметим попутно, что разность $q(x,t)-q(0,0)$ можно описать эквивалентным образом в терминах векторов b -периодов $\vec{B}^1, \vec{B}^2$ интегралов ω_1 и ω_2

$$q(x,t)-q(0,0)=-\frac{1}{2\pi}(\vec{B}^1x+\vec{B}^2),$$

а вектор r явно выражается через b -периоды интеграла ω_3 :

$$2\pi i r=-\pi i\vec{1}-\vec{B}^3,\quad \vec{1}_j\equiv 1.$$

Формула для Ψ_2 имеет вид

$$\Psi_2=\frac{\theta(U(p)-q(x,t)-r)}{\theta(U(p)-q(0,0))}\cdot\frac{\theta(q(0,0)-r)}{\theta(q(x,t))}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{i\omega_1x+i\omega_2t+\omega_3+ix\frac{E_0}{2}-\frac{iN_0}{2}t\right\}, \tag{2.9}$$

Заметим, что периоды интеграла $\ln\Psi_2$ совпадают, в силу отмеченной выше связи между векторами r и $\vec{B}^3$, с периодами абелева интеграла $\omega_4 = \frac{1}{2}\ln z$.

Явные формулы для коэффициентов разложения Ψ -функции в бесконечноудаленных точках.

Введем обозначения

$$\varkappa_0^+ = \ln\theta(g(x,t)-r),\quad \varkappa_1^+ = \frac{\partial}{\partial x}\varkappa_0^+,\quad \varkappa_2^+ = \frac{1}{8}\Big(-\frac{\partial}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial t}\Big)\varkappa_0^+ .$$

ЛЕММА I. При $\rho\to\infty^+$ справедлива асимптотика

$$\ln\theta(g-U(\rho)) = \varkappa_0^+ + \frac{\varkappa_1^+}{z} + \frac{\varkappa_2^+}{z^2} + O\Big(\frac{1}{z^3}\Big).$$

Доказательство этой леммы дано в приложении I.

Обозначая

$$\varkappa_0^- = \ln\theta(g+r),\quad \varkappa_1^- = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\varkappa_0^-,\quad \varkappa_2^- = -\frac{1}{8}\Big(\frac{\partial}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial t}\Big)\varkappa_0^-,$$

можно доказать аналогичное утверждение, описывающее асимптотику $\ln\theta(g-U(\rho))$ при $\rho\to\infty^-$:

ЛЕММА 2. При $\rho\to\infty^-$,

$$\ln\theta(g-U(\rho)) = \varkappa_0^- + \frac{\varkappa_1^-}{z} + \frac{\varkappa_2^-}{z^2} + O\Big(\frac{1}{z^3}\Big).$$

Заменой $g\to g+r$ мы получаем аналогичные асимптотические формулы для $\ln\theta(g+r-U(\rho))$ при $\rho\to\infty^{\pm}$:

$$\ln\theta(g+r-U(\rho)) = \eta_0^{\pm} + \frac{\eta_1^{\pm}}{z} + \frac{\eta_2^{\pm}}{z^2} + O\Big(\frac{1}{z^3}\Big),$$

а явный вид функций $\eta_0^{\pm}, \eta_1^{\pm}, \eta_2^{\pm}$ тривиально определяется из лемм I, 2.

Потенцируя эти асимптотические разложения и подставляя асимптотику абелевых интегралов $\omega_{1,2,3}$, мы найдем для коэффициентов $\xi_i^{\pm}$ в (2.3) следующие явные представления:

$$\xi_{12}^- = \varkappa_1^- - \varkappa_{10}^- - iR_1x - iF_1t,\quad \varkappa_{10}^- \equiv \varkappa_1(0,0),$$

$$\xi_{14}^- = \varkappa_2^- - \varkappa_{20}^- - iR_2x - iF_2t - \frac{1}{2}(\varkappa_1^- - \varkappa_{10}^- - iR_1x - iF_1t)^2,$$

$$\xi_{10}^+ = \frac{\theta(g(0,0)+r)\theta(g(x,t))-r)}{\theta(g(0,0)-r)\theta(g(x,t)+r)}\exp(-iEx+iN_0t),$$

$$\xi_{12}^+ = \xi_{10}^+(\varkappa_1^+ - \varkappa_{10}^+ - ixR_1 + iF_1t),\quad \varkappa_{10}^+ = \varkappa_1^+(0,0),$$

$$\xi_{14}^{+}=\xi_{10}^{+}\left[\varkappa_2^{+}-\varkappa_{20}^{+}+iR_2x+iF_2t+\frac{1}{2}(\varkappa_1^{+}-\varkappa_{10}^{+}+ixR_1+itF_1)^2\right],$$

$$\xi_{21}^{+}=\eta_1^{+}-\varkappa_{10}^{+}+iR_1x+iF_1t+\gamma,$$

$$\xi_{23}^{+}=\eta_2^{+}-\varkappa_{20}^{+}+iR_2x+iF_2t+\gamma_1+\frac{1}{2}(\eta_1^{+}-\varkappa_{10}^{+}+iR_1x+iF_1t+\gamma)^2,$$

$$\xi_{21}^{-}=\omega_0\frac{\theta(g(0,0)-r)\,\theta(g(x,t)+2r)}{\theta(g(0,0)+r)\,\theta(g(x,t))}\exp(iE_0x-iN_0t),$$

$$\xi_{23}^{-}=\xi_{21}^{-}(\eta_1^{-}-\varkappa_{10}^{-}-iR_1x-iF_1t+\delta),$$

$$\xi_{25}^{-}=\xi_{21}^{-}\left[\eta_2^{-}-\varkappa_{20}^{-}-iR_2x-iF_2t+\delta_1+\frac{1}{2}(\eta_1^{-}-\varkappa_{10}^{-}-\right.$$
$$\left.-iR_1x-iF_1t+\delta)^2\right].$$

Ш. Подстановка асимптотического разложения Ψ -функции в точках $\infty^{\pm}$ в уравнения (2.I) - (2.2)

Подставляя асимптотику Ψ (2.3) в уравнение (2.I), мы потребуем

I) чтобы при $P\to\infty^{+}$ первое уравнение соответствующей системы удовлетворялось с точностью до $O(1)$ (по модулю соответствующего экспоненциального множителя),

2) при $P\to\infty^{+}$ второе уравнение и при $P\to\infty^{-}$ первое уравнение удовлетворялись с точностью до $O(1)$ по модулю соответствующих экспоненциальных множителей.

Эти требования эквивалентны следующим уравнениям на нормировочные функции $u_{1,2}$ и коэффициенты матрицы U :

$$ru_1=-2iu_2\xi_{21}^{-},\quad qu_2=2iu_1\xi_{10}^{+}, \tag{3.I}$$

$$u_{1x}=2iu_1\xi_{10}^{+}\xi_{21}^{-},\ u_{2x}=-2iu_2\xi_{10}^{+}\xi_{21}^{-}. \tag{3.2}$$

Стандартные алгебраические аргументы [7, 8] показывают, что выполнение условий (3.I-2) необходимо и достаточно для того, чтобы функция Ψ точно удовлетворяла уравнению (2.I). Аналогично устанавливается, что для того, чтобы функция Ψ удовлетворяла уравнению вида

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left[2\lambda^4\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\lambda^3\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}+\lambda^2\begin{pmatrix}C&0\\0&D\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0&M\\N&0\end{pmatrix}\right]\Psi, \qquad (3.3)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$A=-4\frac{u_1}{u_2}\xi^+_{10},\quad B=4\frac{u_2}{u_1}\xi^-_{21},\quad C=4\xi^+_{10}\xi^-_{21},$$

$$D=-4\xi^+_{10}\xi^-_{21},\quad M=-2i\frac{u_1}{u_2}(\xi^+_{10})_x,\quad N=-2i\frac{u_2}{u_1}(\xi^-_{21})_x,$$

$$u_{1t}=u_1\left(2\xi^+_{10}\xi^-_{21x}-2\xi^+_{10x}\xi^-_{21}-4i(\xi^+_{10})^2\cdot(\xi^-_{21})^2\right),$$

$$u_{2t}=-u_2\left[2\xi^+_{10}\xi^-_{21x}-2\xi^+_{10x}\xi^-_{21}-4i(\xi^+_{10})^2(\xi^-_{21})^2\right].$$

Таким образом, для того, чтобы функция Ψ была совместным решением уравнений (2.I) и (3.3), необходимо и достаточно потребовать, чтобы нормирующие функции $u_{1,2}$ удовлетворяли системе

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln u_1=\frac{\partial}{\partial x}\ln u_2=2i\xi^+_{10}\xi^-_{21},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln u_1=-\frac{\partial}{\partial t}\ln u_2=2\xi^+_{10}\xi^-_{21x}-2\xi^+_{10}\xi^-_{21}-4i(\xi^+_{10})^2\cdot(\xi^-_{21})^2 \qquad (3.4)$$

Если это условие выполняется, то тогда очевидно, что

$$A=2iq,\ B=2ir,\ C=rq,\ D=-rq,$$

$$M=irq^2-q_x,\ N=ir^2q+r_x$$

то-есть, уравнение (3.3) превращается в уравнение (2.2).

IУ. Проверка совместности и явное интегрирование системы (3.4).

Пусть u_1 и u_2 выбраны так, чтобы удовлетворялось первое уравнение системы (3.4). Построенная по этим $u_{1,2}$ функция Ψ будет тогда удовлетворять уравнению (2.I). Разлагая левую и правую части этого уравнения в окрестности ∞^+ и приравнивая коэффициенты в разложении первого уравнения соответствующей системы при z^0 получим, что

$$\xi^+_{21}=\xi^+_{10}\xi^-_{21}+\frac{\xi^+_{12}}{\xi^+_{10}}-\frac{i}{2}\frac{\xi^+_{10x}}{\xi^+_{10}}.$$

Откуда, учитывая явные выражения для ξ^{+}_{ij}, получаем следующее тождество:

$$\xi^{+}_{21}\xi^{-}_{21}=\gamma+\frac{E_0}{2}+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\theta(q)}{\theta(q+\tau)}\,. \tag{3.5}$$

Очевидно, что аналогичным приемом можно получить бесконечную серию тождеств на θ -функции. Для дальнейшего, однако, нам понадобятся, наряду с (3.5), лишь еще два тождества:

$$\xi^{+}_{23}=\frac{\xi^{+}_{14}}{\xi^{+}_{10}}+\xi^{-}_{21}\xi^{+}_{12}-\frac{i}{2}\frac{\xi^{+}_{12x}}{\xi^{+}_{10}} \tag{3.6}$$

и

$$\xi^{+}_{21x}=2i\xi^{+}_{10}\xi^{-}_{21}\xi^{+}_{21}-2i\xi^{-}_{21}\xi^{+}_{12}\,. \tag{3.7}$$

Пусть теперь u_1 и u_2 выбраны так, чтобы удовлетворялись второе уравнение в системе (3.4). Построенная по этим $u_{1,2}$ функция Ψ будет удовлетворять уже уравнению (3.3). Рассматривая члены нулевого порядка по z в разложении первого уравнения соответствующей системы в окрестности точки ∞^{+}, получаем, что

$$i(u_1\xi^{+}_{10})_t=4u_1\xi^{+}_{14}-4u_1\xi^{+}_{23}+4u_1\xi^{+}_{10}\xi^{-}_{21}\xi^{+}_{12}-2iu_1\xi^{+}_{21}$$

или

$$i\left(2\xi^{+}_{10}\xi^{-}_{21}-2\xi^{+}_{10}\xi^{-}_{21}-4i(\xi^{+}_{10})^2(\xi^{-}_{21})^2\right)=$$

$$=-i\frac{\xi^{+}_{10t}}{\xi^{+}_{10}}+4\frac{\xi^{+}_{14}}{\xi^{+}_{10}}-4\xi^{+}_{23}+4\xi^{-}_{21}\xi^{+}_{12}-2i\frac{\xi^{+}_{10x}}{\xi^{+}_{10}}\xi^{+}_{21}\,. \tag{3.8}$$

Подставляя в правую часть этого соотношения выражение для $\xi^{\pm}_{ij}$ через θ -функции и учитывая тождества (3.5), (3.6) и (3.7), можно прийти в результате вычислений, детали которых приведены в приложении 2, к равенству

$$\left(2\xi^{+}_{10}\xi^{-}_{21x}-2\xi^{+}_{10x}\xi^{-}_{21}-4i(\xi^{+}_{10})^2(\xi^{-}_{21})^2\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\theta(q+\tau)}{\theta(q)}-iN_0+8i\gamma_1\,. \tag{3.9}$$

Формулы (3.9) и (3.5) доказывают совместность системы (3.4) Более того, они позволяют явно интегрировать эту систему:

$$u_1(x,t)=u_2^{-1}(x,t)=\frac{\theta(q+\tau)}{\theta(q)}\exp\{(iE_0-2i\delta)x-$$

$$-(iN_0-8i\gamma_1)t\}. \tag{3.10}$$

Собирая вместе формулы (3.I) и (3.I0), получим формулы описывающие конечнозонное решение комплексифицированной системы МНШ.

Приложение I. Доказательство леммы I.

Используя в качестве локального параметра в окрестности ∞^+ переменную $\tau=\frac{1}{z}$ мы имеем при $z\to\infty$

$$\ln\theta(q-U(p))=\ln\theta(q-r)+\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\theta(q-U(p))\Big|_{p=\infty^+}+ \\ +\frac{1}{2z^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\ln\theta(q-U(p))\Big|_{p=\infty^+}+\ \dots \tag{П1.1}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=-\frac{1}{\tau^2}\frac{\partial}{\partial z}=-z^2\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}U_\nu(p)=p^{-\frac{1}{2}}(z)\cdot\sum\Gamma_\nu^k z^{n-k}\sim\frac{1}{z^2}\Big(\Gamma_\nu^1-\frac{1}{z}(\Gamma_\nu^2+2^{-1}\Gamma_\nu^1\sum E_j)+\dots\Big)$$

то, в окрестности ∞^+ ,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\theta(q-U(p))=\sum\partial q_\nu\ln\theta(q-U(p))\cdot \\ \cdot\Big(\Gamma_\nu^1+\tau(\Gamma_\nu^2+2^{-1}\Gamma_\nu^1\sum E_j)+O(\tau^2)\Big).$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\ln\theta(q-U(p))=\sum\partial q_\nu\partial q_\mu\ln\theta(q-U(p))\cdot \\ \cdot\big(\Gamma_\nu^1+o(1)\big)\cdot\big(\Gamma_\mu^1+o(1)\big)+\sum\partial q_\nu\ln\theta(q-U(p))\cdot \\ \cdot\big(\Gamma_\nu^2+2^{-1}\Gamma_\nu^1\sum E_j+o(1)\big).$$

Таким образом

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\theta(q-U(p))\Big|_{p=\infty^+}=\sum\Gamma_\nu^1\partial q_\nu\ln\theta(q-r)= \\ =\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(q-r) \tag{П1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\Theta(g-U(p))\Big|_{p=\infty^+}=\sum\Gamma_\nu^1\Gamma_\mu^1\partial g_\nu\partial g_\mu\ln\Theta(g-\tau)+$$

$$+\sum(\Gamma_\nu^2+2^{-1}\Gamma_\nu^1\sum E_j)\partial g_\nu\ln\Theta(g-\tau)= \qquad (\text{П1.3})$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\Theta(g-\tau)+\frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial t}\ln\Theta(g-\tau).$$

Подставляя (П1.2) и (П1.3) в (П1.1) получаем утверждение леммы 1.

Приложение 2. Вывод формулы (3.9)

Подставляя в правую часть (3.8) явные выражения для $\xi_{ij}^{\pm}$, имеем:

$$i(2\xi_{10}^+\xi_{21x}^- - 2\xi_{10x}^+\xi_{21}^- - 4i(\xi_{10}^+)^2(\xi_{21}^-)^2)=$$

$$=N_0-i\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\Theta(g-\tau)}{\Theta(g+\tau)}+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\Theta(g-\tau)}{\Theta(g)}+I, \qquad (\text{П2.1})$$

где

$$I=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\Theta(g-\tau)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\Theta(g)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\Theta(g-\tau)\right)^2+$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\Theta(g)\right)^2+(2E_0+4\gamma)\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\Theta(g-\tau)}{\Theta(g)}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\ln\Theta(g-\tau)\frac{\partial}{\partial x}\ln\Theta(g+\tau)-\frac{\partial}{\partial x}\ln\Theta(g+\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ln\Theta(g)+$$

$$-2i\gamma\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\Theta(g-\tau)}{\Theta(g+\tau)}-4\gamma_1-2\gamma^2-2E_0\gamma.$$

Докажем, что

$$\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\Theta(g-\tau)}{\Theta(g)}=I+8\gamma_1. \qquad (\text{П2.2})$$

В самом деле, из (3.6) имеем, что

$$\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\Theta(g-\tau)}{\Theta(g)}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\Theta(g)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\Theta(g)\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\Theta(g-\tau)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\Theta(g-\tau)\right)^2+\frac{\partial}{\partial x}\ln\Theta(g)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ln\Theta(g-\tau)-$$

$$-2i\gamma\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\Theta(g-\tau)}{\Theta(g)}-2R_1+2\gamma^2+4\gamma_1. \qquad (\text{П2.3})$$

Вычитая из равенства (П2.2) равенство (П2.3), приходим к тождеству

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(q)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(q)\right)^2-2i\gamma\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\theta(q)}{\theta(q+\tau)}+$$

$$+(2E_0+4\gamma)\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\theta(q-\tau)}{\theta(q)}-\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(q-\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(q+\tau)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(q+\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(q)-\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(q)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(q-\tau)-$$

$$-4\gamma^2-2E_0\gamma+2R_1=0,$$

которое, если учесть, что в силу (3.7) и (3.5)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(q)=-2R_1+4\left(\gamma+\frac{E_0}{2}+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\theta(q)}{\theta(q+\tau)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\gamma+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\theta(q)}{\theta(q-\tau)}\right),$$

верно.

Выражая теперь I из (П2.2) и подставляя его в (П2.I), приходим к формуле (3.9).

Литература

I. Kaup D.J., Newell A.C., J.Math.Phys.,1978,19(4), p.798-801.

2. Прикарпатский А.К. Теор. и мат.физ., 1980, 45, № 2, с.171-181.

3. Чередник И.В. ДАН СССР, 1979, 246, с.575-578.

4. Gerdjikov V.S., Ivanov M.I., Kulish P.P. preprint,JINR,№ E2-12590,1979,p.3-23.

5. Dodd R.K., Morris H.S., Physica Scripta,1979,20, № 3,4, p.151-161.

6. Итс А.Р. Теор. и мат.физ., 1981, 46, № 2, с.61-81.

7. Кричевер И.М. УМН, 1977, 32, вып.6., с.71-101.

8. Матвеев В.Б. Абелевы функции и солитоны. Препринт Вроцловского университета (ПНР) № 373, 1976, с.1-98.