А. О. Смирнов, Эллиптические решения интегрируемых нелинейных уравнений,
Матем. заметки, 1989, том 46, выпуск 5, 100–102

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. О. Смирнов

Общие конечнозонные решения интегрируемых нелинейных уравнений выражаются через многомерные тэта-функции Римана первого порядка [1—5] ($\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}^g;\ p \in \mathbf{C}^g$):

$$\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (p \mid B) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} \exp \{\pi i \langle B(m+\alpha), m+\alpha \rangle + 2\pi i \langle p+\beta, m+\alpha \rangle\},$$

$$\theta (p \mid B) \equiv \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (p \mid B),$$

где B — матрица периодов римановой поверхности Γ рода g, ассоциированной с данным решением; суммирование производится по целочисленной g-мерной решетке; угловые скобки обозначают евклидово скалярное произведение. Так, например, решения уравнений Кадомцева — Петвиашвили (КП) и «sine-Gordon» (СГ) имеют вид

$$u_1(x,\ y,\ t) = 2\partial_x^2 \ln \theta (U_1 x + U_2 y + U_3 t + Z \mid B) + \mathrm{const},$$

$$u_2(x, t) = -2i \ln \frac{\theta (U_4 x + U_5 t + Z_1 + \Delta \mid B)}{\theta (U_4 x + U_5 t + Z_1 \mid B)}, \qquad 2\Delta \in \mathbf{Z}^g,$$

соответственно, где $2\pi i U_j$ есть векторы b-периодов некоторых нормированных абелевых дифференциалов второго рода (см., например, [5—7]).

Предположим, что Γ_1 является n-листным накрытием над эллиптической поверхностью Γ_0 (σ: $\Gamma_1 \to \Gamma_0$). Фиксируем на Γ_j ($j = 0,\ 1$) канонические базисы гомологий $\gamma^j \in H_1$ (Γ_j, $\mathbf{Z}$) с матрицами пересечений вида $C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и дуальные к ним базисы голоморфных дифференциалов $d\mathcal{U}^j \in \mathcal{H}^1$ (Γ_j, $\mathbf{Z}$). Отображение σ порождает отображения гомологий и якобианов

$$\hat{\sigma}\gamma^1 = \begin{pmatrix} S & P \\ Q & R \end{pmatrix} \gamma^0, \qquad \sigma^* d\mathcal{U}^0 = T^t d\mathcal{U}^1,$$

удовлетворяющие следующим условиям [5]:

$$T = S + B_0 P,\ \ B_1 S - Q = B_0 (R - B_1 P), \tag{1}$$

$$\langle S,\ R \rangle - \langle Q,\ P \rangle = n, \tag{2}$$

где B_j — матрицы периодов поверхностей Γ_j.

Рассмотрим на Γ_j абелевы дифференциалы второго рода $d\Omega^j$ ($j = 0,\ 1$), нормированные в соответствующих базисах циклов, с векторами b-периодов $2\pi i U_j$, и связанные соотношением

$$\sigma^* d\Omega^0 = d\Omega^1 + 2\pi i U_0 \langle P,\ d\mathcal{U}^1 \rangle, \tag{3}$$

с точностью до дифференциалов от мероморфных функций. Из равенства

$$\int_l \sigma^* d\Omega = \int_{\hat{\sigma} l} d\Omega \tag{4}$$

вытекает, что векторы b—периодов этих дифференциалов удовлетворяют уравнению

$$U_1 = U_0 (R - B_1 P). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\Psi (U_0 x) = \exp \{-a (U_0 x + b)^2\} \theta (U_1 x + Z \mid B_1),$$

где:

а) при $P \neq 0$,

$$a = \pi i \langle P,\ R - B_1 P\rangle,\ b = \pi i \langle P,\ 2Z - R\rangle/(2a); \tag{6а}$$

б) при $P = 0$,

$$a = 0,\ b = 0. \tag{6б}$$

С помощью закона преобразования тэта-функции при сдвиге на вектор решетки [1—5] и соотношений (1), (2), (5) можно показать, что

$$\Psi\ (U_0 x + 1) = \Psi\ (U_0 x), \tag{7}$$

$$\Psi\ (U_0 x + B_0) = \exp\left(-\pi i n B_0 - 2\pi i n U_0 x - \pi i \delta\right) \Psi\ (U_0 x),$$

где

$$\delta = \langle 2Z,\ S + B_0 P\rangle - B_0 \langle R,\ P\rangle + \langle S,\ Q\rangle, \tag{8}$$

и, следовательно, $\Psi\ (U_0 x)$ есть одномерная тэта-функция порядка n [1—4], откуда непосредственно вытекает следующая

ТЕОРЕМА. *Если риманова поверхность* Γ_1 *n-листно накрывает эллиптическую поверхность* Γ_0, *и если дифференциалы* $\mathrm{d}\Omega^j$ $(j = 0,\ 1)$ *связаны соотношением* (3), *то*

$$\theta\,(U_1 x + Z \mid B) = \exp\{a\,(U_0 x + b)^2\} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \theta\begin{bmatrix} k/n \\ 0 \end{bmatrix}(nU_0 x + \delta/2 \mid nB_0), \tag{9а}$$

или

$$\theta\,(U_1 x + Z \mid B) = c \exp\{a\,(U_0 x + b)^2\} \prod_{j=1}^{n} \theta\,(U_0 x + X_j \mid B_0), \tag{9б}$$

где a, b, δ *определяются равенствами* (6), (8); c, c_k *— некоторые постоянные*; X_j *удовлетворяют условию*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j - \delta/2 \in \mathbf{Z}. \tag{10}$$

Следствие 1. *Пусть риманова поверхность* Γ, *ассоциированная с конечнозонным решением уравнения КП, и абелев дифференциал* $\mathrm{d}\Omega^1$ *удовлетворяют условиям теоремы. Тогда решение уравнения КП имеет вид*

$$u_1(x,\ y,\ t) = 2\sum_{j=1}^{n} \wp\,(x - x_j(y,\ t)) + \mathrm{const},$$

где $\wp$ *— эллиптическая функция Вейерштрасса с периодами* $1/U_0$, B_0/U_0.

В [7] приведено конкретное описание римановых поверхностей и абелевых дифференциалов $\mathrm{d}\Omega^1$, удовлетворяющих условиям следствия 1 и служащих для построения эллиптических по x решений уравнения КП. В [8] даны типы римановых поверхностей и абелевых дифференциалов, соответствующих некоторым периодическим по другим переменным решениям уравнения КП.

Следствие 2. *Пусть риманова поверхность* Γ, *ассоциированная с конечнозонным решением уравнения СГ, и абелев дифференциал* $\mathrm{d}\Omega^4$ *удовлетворяют условиям теоремы. Тогда решение уравнения СГ можно записать следующим образом*

$$u_2(x,\ t) = -2i \sum_{j=1}^{n} \left[\ln \sigma\,(x - x_j(t)) - \ln \sigma\,(x - \tilde{x}_j(t))\right],$$

где σ *— эллиптическая функция Вейерштрасса с периодами* $1/U_0$, B_0/U_0.

Детальную классификацию римановых поверхностей и абелевых дифференциалов, соответствующих периодическим по x решениям уравнения СГ, предполагается провести отдельно.

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступило 08.01.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровин Б. А. // УМН. 1981. Т. 36, вып. 2. С. 11—80. 2. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988. 3. Fay J. D. // Lect. Notes in Math. Springer, 1973. V. 352. 4. Igusa J. // Grund. Math. Wiss. Springer, 1972. V. 194. 5. Белоколос Е. Д., Бобенко А. И., Матвеев В. Б., Энольский В. З. // УМН. 1986. Т. 41, вып. 2. С. 3—42. 6. Matveev V. B. Abelian functions and solitons Preprint N 373. Univ. of Wroclaw, 1976. 7. Кричевер И. М. // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 4. С. 45—54. 8. Смирнов А. О. Накрытия римановых поверхностей и эффективизация формул конечнозонного интегрирования: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1988.