УДК 514.764.25

# ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

*А. В. Аминова*

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящем обзоре рассмотрены работы по группам преобразований римановых многообразий и их приложениям, представленные в реферативном журнале «Математика», начиная с января 1971 г. по август 1989 г. Дальнейшие ссылки можно найти в обзорах и монографиях [54], [56], [88], [95], [115], [264], [266], [275], [388]. Работы, рассмотренные в этих публикациях, как правило, не включались в настоящий обзор.

Учитывая большое число и разнообразие приложений, мы поставили своей целью перечислить в этом обзоре основные направления и методы прикладных исследований. Их содержательное описание требует более широких рамок.

За рамками обзора остались многочисленные работы по группам автоморфизмов комплексной, келеровой и контактной структур, а также работы по группам преобразований финслеровых многообразий, которые должны стать предметом специального рассмотрения.

## § 1. ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ

**1.1. Размерность группы изометрий.** Пусть $M$ — (псевдо)риманово многообразие с (псевдо)римановой метрикой $g$ и римановой связностью $\nabla$. Диффеоморфизм многообразия $M$ на себя называется изометрией, если он сохраняет метрический тензор $g$. Каждая изометрия в $M$ есть аффинное преобразование относительно $\nabla$ (см. § 3).

Группа $I(M)$ изометрий риманова многообразия $M$ есть группа Ли преобразований относительно компактно открытой топологии. Для каждой точки $x \in M$ подгруппа изотропи $I_x(M)$ (т. е. подгруппа преобразований, оставляющих на месте точку $x$) компактна. Если $M$ компактно, то $I(M)$ также компактна (Майерс, Стинрод, 1939 г.).

Размерность группы $I(M)$ изометрий $n$-мерного риманова многообразия не превосходит $n(n+1)/2$. Если $\dim I(M) = n(n+1)/2$, то $M$ изометрично одному из следующих пространств постоянной кривизны: (a) $n$-мерному евклидову пространству $\mathbf{R}^n$; (b) $n$-мерной сфере $S^n$; (c) $n$-мерному проективному пространству $P_n(\mathbf{R})$; (d) $n$-мерному односвязному гиперболическому пространству [264, гл. 2, § 3].

Векторное поле $X$ на $M$ называется инфинитезимальной изометрией, или киллинговым векторным полем, или также (изометрическим) движением (и. д.), если локальная 1-параметрическая группа локальных преобразований, порожденная полем $X$ в окрестности каждой точки $x \in M$, состоит из локальных изометрий. $X$ есть инфинитезимальная изометрия, если и только если $L_X g = 0$, или, в локальных координатах, $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0$, где запятая означает ковариантную производную, а $L_X$ — производную Ли вдоль $X = \xi^i(\partial/\partial x^i)$.

Множество $i(M)$ всех инфинитезимальных изометрий в $M$ образует алгебру Ли, размерность которой для связного риманова многообразия $M$ не превосходит $n(n+1)/2$. Если $\dim i(M) = n(n+1)/2$, то $M$ есть пространство постоянной кривизны.

Если поле $X$ порождает (глобальную) 1-параметрическую группу изометрий, то оно называется полным. Множество всех полных киллинговых векторных полей образует алгебру Ли группы $I(M)$ изометрий в $M$.

В полном римановом многообразии $M$ (т. е. в римановом многообразии с полной римановой связностью, для которой каждая геодезическая в $M$ может быть продолжена до сколь угодно больших значений ее канонического параметра) каждое киллингово векторное поле полно. Поэтому если $M$ полно, то алгебра Ли $i(M)$ всех и. д. в $M$ изоморфна алгебре Ли группы $I(M)$ изометрий в $M$.

Если $G$ есть полная $C^1$-замкнутая псевдогруппа [266, т. 1, гл. 1, § 1] локальных изометрий риманова многообразия $M$, то $G$ есть псевдогруппа Ли в следующем смысле: существует локально постоянный пучок $g$ конечномерных алгебр Ли киллинговых векторных полей на $M$ такой, что всякий достаточно близкий к id элемент из $G$ имеет вид $\exp \xi$, где $\xi$ — близкое к 0 сечение пучка $g$ [333].

Манн [291] нашел лакуны (пропуски) в распределении порядков групп изометрий римановых многообразий.

Н. С. Синюков и С. М. Покась [96] определили лакуны в распределении порядков групп Лч движений второй степени в ассоциированных римановых пространствах. О свойствах киллинговых векторных полей в таких пространствах см. [89]. В. И. Паньженский [87] исследовал три типа движений в касательном расслоении с метрикой Сасаки и установил максимальные размерности групп движений для каждого типа.

О представлении групп изометрий в собственных подпространствах лапласиана см. [151]. О группах изометрий левоинвариантных метрик на группах Ли см. [320], [337].

**1.2. Изометрии и секционная кривизна.** Группа $I(M)$ изометрий компактного риманова многообразия $M$ с отрицательно определенным тензорным полем Риччи конечна (Бохнер, 1946 г.). Хубер [240], Им Хоф [245], Кацуда [254] и Маеда [289] установили верхние оценки для порядков этой группы, зависящие от диаметра ($d$) и радиуса инъективности ($\delta$) многообразия $M$, а также от чисел, ограничивающих секционную кривизну $k_\sigma$ и кривизну Риччи. Приведем оценку Маеды [289] для $n$-мерного компактного связного риманова многообразия неположительной секционной кривизны ($-\varepsilon^2 \leqslant k_\sigma \leqslant 0$, $\varepsilon > 0$) с отрицательно определённым тензором Риччи в некоторой точке $x \in M$: $\dim I(M) < k^k$, где $k = (1 + [4d/\delta])(1 + [2R/\alpha])^n + 1$, a $R$ и $\alpha$ удовлетворяют условиям

$$\operatorname{ch} b\beta = \operatorname{ch}\frac{b\delta}{4} \Big/ \operatorname{ch}\frac{b\delta}{8}, \quad a = \operatorname{th}\frac{bd}{2} \Big/ b,$$

$$R = 2a/(1 - a^2b^2), \quad \alpha = \left\{\frac{2R^2}{n}\left(1 - \cos\frac{\beta}{R}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Для конечной группы $G$ $k+1$-го порядка существует риманова метрика на сфере $S^{k-1}$, группа изометрий которой изоморфна $G$ [131].

Для $n$-мерного односвязного полного 0,93-защемленного ($0{,}93 < k_\sigma \leqslant 1$) риманова многообразия $M$ и компактной группы Ли $G$, действующей на $M$ изометриями, существуют диффеоморфизм $F: M \to S^n$ и гомоморфизм $\varphi: G \to O(n+1)$ такие, что $F$ эквивариантно относительно $\varphi$ [246].

Если трехмерное полное односвязное многообразие $M$, секционная кривизна которого заключена между двумя отрицательными постоянными, допускает дискретную группу $\Gamma$ изометрий такую, что факторпространство $M/\Gamma$ имеет конечный объем, то либо $M$ имеет постоянную кривизну, либо полная группа $I(M)$ изометрий в $M$ дискретна [208].

Если диаметр компактного риманова многообразия с секционной кривизной $k$, $0 < k \leqslant 1$, меньше $\pi/2$, то ранг его группы изометрий меньше двух. Отсюда следует, что диаметр однородного риманова пространства не меньше $\pi/2$, если его размерность больше трех [354].

**1.3. Структура группы изометрий.** Д. В. Алексеевский [7] изучил структуру просто транзитивных групп изометрий римановых пространств неположительной кривизны и использовал полученные результаты для классификации однородных пространств Эйнштейна размерности $n \leqslant 5$.

Байерс [155] исследовал разрешимые подгруппы изометрий односвязного многообразия отрицательной кривизны и с помощью полученных результатов доказал, что группа изометрий универсального риманова накрывающего пространства контактного многообразия отрицательной кривизны является дискретной или полупростой.

В. Е. Мельников [74] установил, что приводимая группа $H$ вращений в $n$-мерном евклидовом пространстве $E$ размерности

$$m > \left[\frac{n-1}{2}\right]^2 + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

является «распавшейся»: $H = K_0 \times K_1$, $E = E_0 + E_1$, где $E_0 \perp E_1$.

«Нильмногообразия», т. е. однородные связные римановы многообразия $M$, на которых транзитивно действует нильпотентная подгруппа $H$ полной группы изометрий $G$, исследовал Вилсон [377]. Он доказал, что связная компонента $N$ единицы группы $H$ действует просто транзитивно на $M$ и является нормальным делителем в $G$. Алгебра Ли группы N является нильрадикалом в алгебре Ли группы $G$. Для любой точки $x \in M$ группа $G$ является полупрямым произведением $N$ и стационарной подгруппы точки $x$.

О «разрешимых» римановых многообразиях, на которых транзитивно действует разрешимая подгруппа $R$ полной группы изометрий, см. [206].

Пусть $H$ — полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны, $D$ — подгруппа группы изометрий этого многообразия. Говорят, что $D$ удовлетворяет условию двойственности, если для любой геодезической $\gamma$ в $H$ существует последовательность $\{\Phi_n\}$ элементов из $D$ такая, что для каждой точки $p \in H$ последовательности $\{\Phi_n(p)\}$ и $\{\Phi_n^{-1}(p)\}$ сходятся соответственно к $\gamma(+\infty)$ и $\gamma(-\infty)$. Чен и Эберлейн [164] исследовали связь между алгебраической структурой группы $D$ и геометрией многообразия $H$ (см. также [189]).

Если псевдориманово пространство $(M, g)$ допускает двухпараметрическую группу изометрий $G$, которая имеет 1-параметрическую циклическую подгруппу $H^c$: $SO(2) \times M \to M$, с ненулевыми орбитами во всех точках $x \in M$, то подгруппа $H^c$ перестановочна с любой однопараметрической подгруппой $H \subset G$ [193].

Н. А. Громов [51] нашел закон преобразования образующих и структурных постоянных при предельных переходах между группами движений и их алгебрами Ли для $n$-мерных пространств постоянной кривизны и привел явные выражения для образующих и структурных постоянных этих групп.

Г. Г. Михайличенко [78] определил с точностью до подобия все трехмерные алгебры Ли движений плоскости. К. Рийвес [92] перечислила все связные подгруппы Ли группы движений пятимерного евклидова пространства с трехмерными орбитами максимальной размерности.

В. А. Попов [91] доказал существование и единственность канонического продолжения для ростка риманова многообразия, алгебра Ли киллинговых векторных полей которого не имеет центра, и установил, что любая локальная изометрия $\varphi: U\simeq V$ многообразия $M$ продолжается до глобальной изометрии $\varphi: M\simeq M$ при каноническом продолжении.

В работе Шмидта [335] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы алгебра Ли могла быть реализована как кратно транзитивная алгебра Ли киллинговых векторных полей на однородном римановом пространстве.

**1.4. Изометрии специальных римановых многообразий.** Пусть $S^2$, $S^3$ — сферы, стандартным образом вложенные в $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{R}^4$ сосоответствено. Сёлер и Сегуин [351] определили киллинговы векторные поля для многообразий $S^2$, $S^2\times\mathrm{R}$ с метрикой $ds^2=-c^2dt^2+a^2du^2+a^2\sin^2u dv^2$ и $S^3\times\mathrm{R}$ с метрикой, которая является прямым произведением стандартных метрик на $S^3$ и $\mathbf{R}$.

Киерес [261] нашел алгебру Ли полных киллинговых векторных полей и соответствующую ей псевдогруппу изометрий в пространстве $\mathbf{R}_+{}^3=\{(x^1, x^2, x^3)\,|\,x^3>0\}$ с метрикой $ds^2=$

$$=(x^3)^{-2}(dx^{3^2}-dx^{2^2}-dx^{1^2}).$$

Вещественная функция $f$, определенная в римановом пространстве $V_n$, называется строго выпуклой, если она является строго выпуклой на каждом геодезическом отрезке как функция естественного параметра геодезической. Пусть $V_n$ допускает строго выпуклую функцию $f$ и $H$ — группа изометрий в $V_n$. Если $f$ достигает минимума в $V_n$, то каждая компактная подгруппа $G\subset H$ имеет неподвижную точку. Если $f$ не достигает минимума в $V_n$ и прообразы $f^{-1}(t)$ компактны, то группа $H$ изометрий компактна [380].

Если группа изометрий полного риманова многообразия $M$ со строго выпуклой функцией $\varphi$ некомпактна, а прообраз $\varphi^{-1}(\alpha)$ компактен при любом вещественном $\alpha$ и $\varphi$ не достигает минимума в $M$, то $M$ изометрично прямому произведению $N\times\mathbf{R}$ компактного риманова многообразия $N$ и вещественной прямой $\mathbf{R}$ [210].

Полные односвязные аналитические псевдоримановы субпроективные пространства $V_n$, $n\geqslant 3$, с нетранзитивными группами движений $G$ размерности $n(n-1)/2$ исследовал Н. Р. Камышанский [66]. Вблизи неизотропной орбиты метрика пространства $V^n$ приводится к виду $ds^2=e(d\rho^2-f(\rho)ds_\nu{}^2(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}))$, где $e=\mp 1$, $f(\rho)$ — положительная вещественная аналитическая функция, $ds_\nu{}^2$ — метрика постоянной кривизны $\nu=1, -1, 0$ (см. также [65]).

А. Е. Тралле [98] построил контрпример для гипотезы Ковальского о включении $I(M, \langle\ \rangle)\subset(M, \tilde{\nabla})$ между связной компонентой полной группы изометрий неприводимого обобщенного симметрического риманова пространства и группой всех аффинных преобразований относительно канонической связности $\tilde{\nabla}$. Об обобщенных симметрических римановых пространствах с разрешимой группой изометрий см. [145].

Р. Б. Чинак [109] доказал, что всякая конечная группа Г сохраняющих ориентацию изометрий шара $B^3$ с полной метрикой $g$ неположительной секционной кривизны сопряжена с подгруппой группы $E_v^3$ евклидовых вращений шара.

Стеней и Миллман [353] установили ряд свойств киллинговых векторных полей и их алгебр Ли для пространств Киллинга, т. е. римановых многообразий, допускающих параллелизацию киллинговыми векторными полями.

О несимметрических однородных римановых пространствах с унитарной группой движений и неприводимой стационарной подгруппой см. [67].

О клиффордовых изометриях $(d(x, g(x)) = \mathrm{const})$ компактных однородных римановых многообразий см. [160].

**1.5. Изометрии лоренцевых многообразий.** Лоренцевым многообразием называется риманово многообразие сигнатуры $(- + \dots +)$ (или $(+ - \dots -)$).

Группа изометрий компактного односвязного аналитического лоренцева многообразия $V_n$ компактна [177].

Если связное лоренцево многообразие $M$ размерности $n \geqslant 5$ допускает связную группу $G$ изометрий размерности $n(n-1)/2+1$ такую, что для каждой точки $x \in M^n$ подгруппа изотропии $G_x$ компактна, то оно принадлежит к одному из следующих типов: 1) $M = \mathbf{R} \times N$ с метрикой $-dt^2 + ds_N^2$,

$G = \mathbf{R} + I^0(N)$; 2) $M = S^1 \times N$ с метрикой $-d\theta^2 + ds_N^2$,

$G = S^1 + I^0(N)$; 3) $M = \mathbf{R} \times P$ с метрикой $-dt^2 + ds_P^2$,

$G = \mathbf{R} \times I^0(P)$; 4) $M = S^1 \times P$ с метрикой $-d\theta^2 + ds_P^2$,

$G = S^1 + I^0(P)$; 5) $M = U_n^+ = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_n > 0\}$

с метрикой $ds_+^2 = (du_1^2 + \dots + du_{n-1}^2 - du_n^2)/cu_n^2$, $c > 0$, $G = I^0(U_n^+)$, где $N$ есть $(n-1)$-мерное риманово многообразие с метрикой $ds_N^2$ постоянной кривизны, $P$ есть $(n-1)$-мерное вещественное проективное пространство со стандартной метрикой $ds_P^2$, $\mathbf{R}$ — вещественная прямая, $S^1$ — окружность, $I^0(\cdot)$ — связная компонента единицы группы изометрий пространства $(\cdot)$ [300], [301].

Если полное односвязное лоренцево многообразие $(M, g)$ с неотрицательными кривизнами времениподобных сечений допускает времениподобное киллингово векторное поле, то оно является прямым произведением пространства $(\mathbf{R}, -dt^2)$ и риманова многообразия $(H, h)$ ([139], [140]).

О четырехмерных лоренцевых пространствах, допускающих однопараметрическую группу движений с изолированной особой точкой, см. [80], [103] и [107].

Об инвариантах групп движений трехмерных лоренцевых пространств см. [69].

**1.6. Специальные киллинговы векторные поля.** Пусть $M$ — полное связное $n$-мерное риманово многообразие неположительной кривизны, $X$ — киллингово векторное поле на $M$, $\{\varphi_t,\ t\in\mathbf{R}\}$ — порожденная этим полем 1-параметрическая группа изометрий и $D$ — распределение, ортогональное к $X$. Если длина поля $X$ ограничена, то оно параллельно, а распределение $D$ интегрируемо. Листы $S(x)$ соответствующего слоения являся вполне геодезическими подмногообразиями в $M$. Если $S(x_0)$ компактно для некоторой точки $x_0\in M$, а $M$ некомпактно, то $M$ изометрично $S(x_0)\times\mathbf{R}$. Если орбита $\Gamma=\{\varphi_t(x_0),\ t\in\mathbf{R}\}$ является периодической и $\Gamma\cap S(x_0)=x_0$ для некоторой точки $x_0\in M$, то $M$ является расслоенным пространством со слоем $S(x_0)$ и базой $S^1$ [242].

Если кривизна Риччи полного риманова многообразия $M$ неположительна и на $M$ существует киллингово векторное поле $X=\xi^i\partial/\partial x^i$ с конечной глобальной нормой ($\int_M\xi_i\xi^i dv<\infty$), то объем $M$ конечен. Если кривизна Риччи отрицательна, то на $M$ не существует (нетривиальных) киллинговых векторных полей с конечной глобальной нормой [395], [396].

Векторное поле $v=x^i v_i$, где $v_i$ — базисные векторы, на ориентированном римановом многообразии $M$ называется финитным киллинговым векторным полем, если $\partial_{ij}\,(\partial^i k+x^i{}_{,h})(\partial_e{}^j+{}+x^j{}_{,e})=\partial_{he}$. Если кривизна Риччи многообразия $M$ отрицательна и $v=0$ на $\partial M$, то $v\equiv0$ на $M$ [358].

Если алгебра Ли киллинговых векторных полей на римановом многообразии $M$ транзитивна и ковариантная производная любого киллингова векторного поля является конформным киллинговым тензорным полем, то кривизна многообразия $M$ постоянна [165].

И. А. Ундалова [100], [101], И. А. Ундалова и В. Н. Маркова [105], И. А. Ундалова и Л. Ю. Осипова [106] детально исследовали псевдоримановы пространства, допускающие однопараметрические группы движений (статические, с изотропными траекториями и т. д.).

О римановых многообразиях с несколькими единичными взаимно ортогональными киллинговыми векторными полями см. [247], [364]. См. также [207], [284], [285], [356].

**1.7. Действие группы $I(M)$ изометрий на $M$.** Пусть $M$ — компактное риманово многообразие строго положительной кривизны, $G$ — компактная группа изометрий размерности $r\geqslant1$, действующая на $M$ с одним орбитным типом $G/H$. Если линейное представление $H$ на $T(G/H)$ не имеет неподвижных векторов, то действие $G$ на $M$ транзитивно [283].

Пусть $M$ — четномерное компактное ориентируемое риманово многообразие положительной кривизны, $G$ — компактная связная группа Ли его изометрий и $\alpha: G \times M \to M$ — ее действие на $M$. Если коразмерность объединения главных орбит действия $\alpha$ не больше единицы, то все подгруппы изотропии действия $\alpha$ имеют максимальный ранг (см. [361], [362]).

М. А. Малахальцев [72] исследовал свободные действия группы изометрий на компактных римановых пространствах знакопостоянной кривизны и на римановых пространствах с различными собственными значениями тензора Риччи.

О действии группы изометрий на односвязном симметрическом римановом многообразии неположительной кривизны с присоединенным к нему множеством бесконечно удаленных точек см. [336].

Литературное обозрение к § 1.

Алексеевский Д. В. [7]; Аминова А. В. [19], [34]; Богоявленский О. И., Новиков С. П. [44]; Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И. [45]; Волков Н. В. [46]; Громов Н. А. [51]; Даишев Р. А. [52], [53]; Егоров А. И., Егорова Л. И. [55]; Иванов Г. Г. [61], [62]; Камышанский Н. Р. [65], [66]; Колесова Т. И. [67]; Кондауров М. Т. [68]; Копп В. Г. [69]; Малахальцев М. А. [72]; Мельников В. Е. [73], [74]; Михайличенко Г. Г. [78]; Мицкевич Н. В., Сенин Ю. Е. [79]; Мицнефес И. М., Ундалова И. А. [80]; Новиков С. П. [84]; Осиновский М. Е., Тесленко О. А. [86]; Паньженский В. И. [87]; Покась С. М. [89]; Попов В. А. [91]; Рийвес К. [92]; Сибгатуллин Н. Р. [93]; Синюков Н. С., Покась С. М. [96]; Тралле А. Е. [98]; Ундалова И. А. [100], [101]; Ундалова И. А., Арясова С. Н. [103]; Ундалова И. А., Маркова В. Н. [105]; Ундалова И. А., Осипова Л. Ю. [106]; Ундалова И. А., Томарова И. В. [107]; Ферзалиев А. С. [108]; Чинак Р. Б. [109]; Шушпанов П. И. [116]; Arcidiacono G. [127]; Ashtekar A., Magnon-Ashtekar A. [128]; Ashtekar A., Schmitd B. G. [129]; Ashtekar A., Xanthopoulos B. C. [130]; Asimov D. [131]; Beem J. K., Ehrlich P. E., Markvorsen S. [139], [140]; Bona C. [143]; Bokhari Ashfaque H., Qadir A. [144]; Božek M. [145]; Boyer C. P., Finley J. D. III [146]; Briginshaw A. J. [149]; Brüning J., Heintze E. [151]; Byers W. [155]; Campoli O. A. [160]; Chen Su-Shing, Eberlein P. [164]; Chep-Cheng-Hsien [165]; Chinea F. J. [166]; Collinson C. D., Smith P. N. [173]; Curras-Bosch C. [174]—[176]; D'Ambra G. [177]; Debney G. [179]; Duggal K. L. [183], [184]; Eberlein P. [189]; Ehrlich P. E. [190]; Enghis P. [192]; Ernotte P. [193]; Ernst F. J., Plebanski J. F. [194]; Finley J. D. III, Plebanski J. F. [197]—[199]; Flaherty F. J. [200]; Gordon C. S., Wilson E. N. [206]; Goto M. S. [207]; Goto Midori S., Goto Morikuni [208]; Greene R. E., Shiohama Katsuhiro [210]; Harris R. A., Zund J. D. [223]—[227]; Held A. [230], [231]; Henneaux M. [232]; Huber H. [240]; Ichida R. [242]; Ihrig E., Sen D. K. [244]; Im Hof H.-C. [245]; Im Hof H.-C., Ruh E. A. [246]; Inshihara Shigeru, Konishi Mariko [247]; Israelit M. [248]; Iwai Toshihiro [251]; Karger A. [253]; Katsuda Atsushi [254]; Kerr R. P., Debney G. C., Jr. [259]; Kersten P., Martini R. [260]; Kieres A. [261]; Kitamura Shin-ichi [263]; Kolassis C. [268]; Kowalski O. [270]; Krish J. P. [272]; Lord E. A. [278]; Lord E. A., Goswami P. [280]; Lukach B., Perjes Z., Sebestyen A. [281]; Lukesh G. W. [282], [283]; Lynge W. C. [284], [285]; Mac Callum M. [288]; Maeda Masao [289]; Maia M. D. [290]; Mann L. N. [291]; Mansouri F., Witten L. [292]; Martin J. [298]; Martinez E., Sanz J. L. [299]; Matsuda Hiroo [300], [301]; Mensky M. B. [309]; Mok Kam-Ping [310]; Moncrief V. [311]; Navez J. [315]; Nedita N. [316]; Ochisi Takushiro, Takahashi Tsunero [320]; Pascua M. [322]; Qadir A., Ziad M. [327]; Salem E. [333]; Schmidt B. G. [335]; Schröeder V. [336]; Schubert M. [337]; Siklos T. C. [343]; Smaranda D. [347]; Sobczyk G. E. [350]; Söler F., Seguin G. [351]; Stehney A. K., Millman R. S. [353]; Sugahara Kunio [354]; Suyama Yoshihiko [356]; Svec A. [358]; Szabados L. B. [359]; Szafron D. A. [360]; Szenthe J. [361], [362]; Tachibana Shunichi [364]; Takagi Hitoshi [366]; Torres del Castillo [369]; Wainwright J., Yaremovicz P. E. A. [375], [376]; Wilson E. N. [377]; Wooley M. L. [378]; Yamaguchi Takao [380], [381]; Yano Kentaro [389]; Yorozu Shinsuke [395], [396], [398], [399].

## § 2. ГРУППЫ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. ГОМОТЕТИИ

**2.1. Размерности группы конформных преобразований и группы гомотетий.** Диффеоморфизм $f$ риманова многообразия $(M, g)$ на себя называется конформным преобразованием, если $f^*g=\rho g$, где $\rho$ есть положительная функция на $M$. Если $\rho$ постоянна, то $f$ называется гомотетией. При $\rho\equiv 1$ гомотетия есть изометрия.

Векторное поле $X$ на $M$ называется инфинитезимальным конформным преобразованием, или конформным (киллинговым) векторным полем, или также конформным движением (к. д.) (соответственно инфинитезимальной гомотетией, или гомотетическим движением (г.д.)), если оно порождает в окрестности каждой точки $x\in M$ локальную 1-параметрическую группу конформных преобразований (соответственно гомотетий). $X$ есть к.д. на $M$, если и только если $L_X g=\sigma g$, где $\sigma$ постоянно для г.д.

Группа $C(M)$ конформных преобразований (соответственно группа $H(M)$ гомотетий) связного $n$-мерного риманова многообразия $M$ есть группа Ли преобразований размерности $\dim C(M)\leqslant(n+1)(n+2)/2$ при условии $n\geqslant 3$ (соответственно $\dim H(M)\geqslant n(n+1)/2+1$).

Доказательство этого утверждения основывается на следующей теореме Пале [266, т. 1, прим. 9]. Пусть $G$ — группа дифференцируемых преобразований дифференцируемого многообразия $M$, $g'$ — множество всех векторных полей $X$ на $M$, которые порождают (глобальную) 1-параметрическую группу преобразований, принадлежащих $G$, $g$ — подалгебра Ли, порожденная множеством $g'$ в алгебре Ли векторных полей на $M$. Если $g$ конечномерна, то $G$ допускает структуру группы Ли (такую, что отображение $G\times M\to M$ дифференцируемо) и $g=g'$. Алгебра Ли для $G$ естественно изоморфна $g$.

Из условий интегрируемости уравнения $L_X g=\sigma g$ следует, что размерность алгебры Ли к.д. не превосходит $(n+1)(n+2)/2$. Так как любая $r$-мерная алгебра Ли г.д. содержит подалгебру Ли и.д. размерности $r_i\geqslant r-1$ [201] и $r_i\leqslant n(n+1)/2$ (см. п. 1.1), то $r\leqslant r_i+1\leqslant n(n+1)/2+1$. По теореме Пале, группа конформных преобразований и группа гомотетий есть группы Ли преобразований.

Лакуны в распределении размерностей групп конформных преобразований римановых пространств исследовал Д. Молдобаев [81]. И. Микеш и С. М. Покась [77] определили лакуны в распределении размерностей групп конформных преобразований ассоциированных римановых пространств.

**2.2. Признаки изометричности и конформности сфере.** Пусть $M$ — связное $n$-мерное риманово многообразие, $I^0(M)$ и $C^0(M)$ — максимальные связные группы изометрий и конформных преобразований в $M$ соответственно. Пусть $C^0(M)\neq I^0(M)$. Тогда если $M$ — полное риманово многообразие размерности $n\geqslant 3$ с параллельным тензорным полем Риччи, то $M$ изометрично сфере (Нагано, 1959 г.). Если $M$ компактно и однородно, то $M$ изометрично сфере при условии $n>3$ (Гольдберг и Кобаяси, 1962 г.). Для $n$-мерной сферы $M$ $\dim C^0(M)=(n+1)(n+2)/2$ [266, т. 1, прим. 11].

Если $M$ компактно, $\dim M\geq 3$, а группа $C^0(M)$ некомпактна, то $M$ глобально конформно сфере [136].

Эйири [191] привел пример компактного $n$-мерного риманова многообразия $M$ постоянной скалярной кривизны, не изометричного сфере $S^n$ $(n>2)$ при условии $I^0(M)\neq C^0(M)$.

Если компактное риманово многообразие $M$ размерности $n>2$ допускает негомотетическое к. д. $v^h$ такое, что $L_v g_{ij}=2\rho g_{ij}$, $\nabla_i\nabla_j F=(1/2)(2K\rho+L_v K)g_{ij}$ для некоторой функции $F$ на $M$, то $M$ изометрично сфере [390]; о признаках изометричности и конформности сфере см. также [236], [391], [392], [118].

Необходимый и достаточный признак конформности сфере компактного риманова многообразия, допускающего конформное векторное поле $v$, которое оставляет инвариантным скалярную кривизну $K(L_v K=0)$, нашел Сюн [239]. О достаточном признаке изометричности сфере компактного риманова многообразия при условиях $L_v K\neq 0$, $L_{D\rho}K\neq 0$, $L_v g=2\rho g\neq 0$ см. [117] ($D\rho$ — векторное поле, соответствующее 1-форме $d\rho$).

Пусть $M$ — ориентируемое риманово многообразие, $X$ — конформное векторное поле на $M$, $L_X g = 2\rho g$. Интегральные неравенства $\int\limits_M (L_X L_X (W_{hljk} W^{hljk}) - c\,[X, D\rho]\,K)\,dv \geqslant 0$, $(c > 0)$ [126] и

$$4\pi \int\limits_M \rho^2 Z_{ljkl} Z^{ljkl} dv \leqslant \int\limits_M L_X L_X (Z_{ljkl} Z^{ljkl})\,dv - c \int\limits_M [X, D\rho]\,K dv, \quad (c =$$

$= \mathrm{const}$, $\rho \neq \mathrm{const}$), [249] переходят в равенства, если и только если $M$ изометрично сфере ($W_{hljk}$ и $Z_{ljkl}$ выражаются через компоненты метрического тензора и тензора кривизны). См. также [357] и обзор [388].

**2.3. Существенные группы конформных преобразований.** В 1963 г. Р. Ф. Билялов [43] доказал теорему: группа конформных преобразований, действующая в неконформно плоском поле тяготения (четырехмерное лоренцево пространство), является группой движений или гомотетий пространства, конформного данному.

Группа $G$ конформных преобразований риманова многообразия $(M, g)$ называется тривиальной, или несущественной, или также по существу изометрической, если существует положительная функция $f$ на $M$ такая, что $G$ есть группа изометрий риманова многообразия $(M, fg)$. В противном случае группа $G$ называется нетривиальной, или существенной.

Непосредственным обобщением теоремы Р. Ф. Билялова [43] явилась следующая теорема А. П. Чупахина [111].

Риманово пространство $V_n$ нормального гиперболического типа допускает нетривиальную конформную группу $G$ тогда и только тогда, когда его метрика приводится к виду

$$ds^2 = 2dx^1 dx^n + g_{\alpha\beta}(x^n)\,dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 2, \ldots, n-1),$$
$$\det(g_{\alpha\beta}) > 0.$$

Группа $G$ является группой гомотетий $H_{2n-2}$ или $H_{2n-1}$, если пространство $V_n$ не является конформно плоским, и собственно конформной группой размерности $(n+1)(n+2)/2$ в противном случае.

Можно ли обобщить теорему Билялова на римановы пространства произвольной сигнатуры и размерности (гипотеза Билялова—Морозова)? Этот вопрос остается пока открытым.

Связная компонента группы конформных преобразований связного компактного риманова многообразия $M$ размерности $n > 2$ является собственно конформной, т. е. не сводящейся к подгруппе изометрий или гомотетий, если и только если $M$ конформно евклидовой $n$-сфере [319].

Если группа $G$ конформных преобразований компактного риманова многообразия несущественна, то она изоморфна прямому произведению векторной группы и компактной группы Ли. Если транзитивная группа $G$ конформных преобразований риманова многообразия изоморфна прямому произведению векторной группы и компактной группы Ли, то она несущественна [235], см. также [355].

Всякое связное риманово пространство $M$ класса $C^\infty$, допускающее существенную группу конформных преобразований, конформно либо евклидову пространству $E^n$, либо сфере $S^n$ (теорема Д. В. Алексеевского [4], [5]). О теореме Алексеевского см. [400] и [196]. См. также [180].

**2.4. Конформные преобразования специальных римановых многообразий.** Д. В. Алексеевский и Б. Н. Кимельфельд [8] определили с точностью до конформной эквивалентности все конформно плоские римановы многообразия, допускающие транзитивную группу конформных преобразований. Если такое многообразие односвязно, то оно имеет постоянную кривизну либо является произведением $n$-мерного пространства Лобачевского и прямой (или $m$-мерной сферы).

О конформных преобразованиях римановых пространств, ассоциированных с конформно плоскими римановыми пространствами $V_n$ $(n>3)$, см. [90].

Всякое конформно-симметрическое псевдориманово многообразие (т. е. многообразие с параллельным тензорным полем конформной кривизны Вейля), допускающее негомотетическое конформное движение, является конформно плоским [331].

Каэн и Кербрат [157], [159] исследовали связные псевдоримановы симметрические пространства размерности $n\geq 3$, допускающие негомотетические конформные движения. Определены все лоренцевы симметрические пространства, допускающие неизометрические конформные движения [158]. См. также [134], [258].

Об однородных лоренцевых паракомпактных связных многообразиях $V$, у которых связная компонента $H_0(V)$ группы гомотетий нормальна в группе конформных преобразований, см. [133].

Если конформное преобразование метрики изотропно полного лоренцева многообразия $V_n$ $(n\geq 3)$ не увеличивает значение формы Риччи на каждом изотропном векторе, то это преобразование есть гомотетия [99].

Пусть $X$, $Y$, $Z$ — абелевы группы Ли. Закон умножения $(x, y, z)(x', y', z')=(x+x', y+y', z+z'+B(x, y))$, где $B$: $X\times Y\to Z$ — непрерывное ненулевое $\mathbf{Z}$ — билинейное отображение, задает на произведении $G=X\times Y\times Z$ структуру группы $G_B$. Пусть $\Gamma$ — произвольная дискретная подгруппа группы $G_B$, а $\bar{g}_{ij}$ — риманова метрика, индуцированная на $M=G_B\setminus\Gamma$ левоинвариантной метрикой на группе $G_B$. Многообразие $(M, \bar{g}_{ij})$ не является конформно плоским, и любое конформное преобразование в нем есть изометрия [277].

Примеры групп конформных преобразований римановых пространств привел Г. Б. Абакиров [2]. О. С. Германов [48] перечислил все типы трехмерных римановых пространств, допускающих группу $G$ конформных преобразований размерности $\dim G \leqslant 3$.

Г. Б. Абакирова [3] доказала, что в четырехмерном псевдоримановом пространстве не существует негомотетических групп конформных преобразований, действующих на двумерных вырожденных поверхностях. См. также [9].

Э. И. Галярский [47] указал типы конформных преобразований проколотых евклидовых пространства и плоскости.

Пусть $M^n$ — замкнутое подмногообразие риманова пространства $N^m$ постоянной секционной кривизны $k$, $\{e_x\}$, $x=1,\ldots$ $\ldots, m-n$ — ортобазис нормального пучка к $M^n$, $k_{x_1},\ldots,k_{x_n}$ — главные кривизны $M^n$, соответствующие направлению $e_x$. Если $k^2_{x_i} > k(n-1)/m$ для всех $x=1,\ldots,m-n$; $i=1,\ldots,n$, то на $M^n$ не существует ненулевых конформно киллинговых и проективно киллинговых (см. § 4) векторных полей. Если неравенства нестрогие, то каждое конформное векторное поле на $M^n$ параллельно [341].

Об инфинитезимальных конформных преобразованиях в касательном расслоении и в расслоении реперов см. [385], [386], [310]. См. также [293], [332], [334] и [372].

**2.5. Специальные конформные векторные поля. Конциркулярные преобразования.** Если кривизна Риччи некомпактного полного риманова многообразия $V_n$ неположительна и на $V_n$ существует конформное векторное поле $\xi$ с конечной глобальной нормой (см. п. 1.6), то $V_n$ имеет конечный объем [398].

Векторное поле $X$ на связном $n$-мерном псевдоримановом многообразии $M$ называется замкнутым конформным векторным полем, если $\nabla X = f\cdot \mathrm{id}$, где $f=\frac{1}{n}\operatorname{div} X$. Пусть $F$ — пространство таких полей, $H$ — пространство инфинитезимальных гомотетий. Если $\dim F \geq n$ и $F\cap H=\{0\}$, то многообразие $M$ эйнштейново [373].

Пусть $V_n(g)$ — риманово многообразие класса $C^p$ $(p\geq 3)$ размерности $n\geq 2$. Конформное векторное поле $\xi$ на $V_n(g)$ называется инфинитезимальной трансляцией, если глобальные траектории 1-параметрической группы $\exp t\xi$ являются геодезическими. Необходимым и достаточным условием замкнутости 1-формы, ассоциированной с собственной инфинитезимальной трансляцией (т. е. с трансляцией, которая не сводится к изометрии в какой-либо области многообразия $V_n(g)$), является отсутствие в $V_n(g)$ нулей второго рода (в смысле А. Лихнеровича) скалярного квадрата $g(\xi, \xi)$ [324].

Татибана [365] исследовал конформные преобразования, сохраняющие точку $O$ и проходящие через нее геодезические, в римановых пространствах постоянной кривизны и постоянной скалярной кривизны, а также в гармонических римановых пространствах.

Д. Молдобаев [82] показал, что группа конформных преобразований сохраняет тензор Эйнштейна $R_{ij}-(R/2)g_{ij}$, если и только если она сохраняет тензор Риччи $R_{ij}$. Конформно плоские пространства непостоянной кривизны, допускающие такую группу преобразований, являются субпроективными пространствами особого типа.

В 1940 г. появилась серия статей Яно, объединенных общим названием «Конциркулярная геометрия» [387]. В них изучались специальные конформные отображения римановых пространств, сохраняющие геодезические окружности, т. е. кривые с постоянной первой и нулевой второй кривизной (траектории равноускоренного движения в общей теории относительности), уравнения которых имеют вид

$$\frac{\delta^3 u^k}{\delta s^3}+g_{ij}\frac{\delta^2 u^i}{\delta s^2}\frac{\delta^2 u^j}{\delta s^2}\frac{\delta u^k}{\delta s}=0.$$

Конформное отображение $\varphi$: $g\to\bar{g}=\rho^2 g$ риманова пространства $(V_n, g)$ на $(\bar{V}_n, \bar{g})$, которое переводит каждую геодезическую окружность пространства $V_n$ в геодезическую окружность пространства $\bar{V}_n$, было названо Яно конциркулярным преобразованием. Для того чтобы $\varphi$ было конциркулярным преобразованием, необходимо и достаточно выполнение следующего условия [387, 1]:

$$\rho_{ij}\equiv\rho_{i,j}-\rho_i\rho_j+\frac{1}{2}g^{kl}\rho_k\rho_l g_{ij}=\Phi g_{ij},\quad (\rho_i\equiv\partial_i\ln\rho).$$

Конциркулярные преобразования оставляют неизменным тензор

$$Z^i_{jkl}:=R^i_{jkl}-\frac{R}{n(n-1)}(g_{jl}\delta^i_k-g_{jk}\delta^i_l),\quad (R=R^l_l,\ R_{ij}=R^k_{ikj}),$$

названный Яно тензором конциркулярной кривизны. Наоборот, всякое конформное преобразование в $V_n$, которое сохраняет тензор конциркулярной кривизны: $\bar{Z}^i_{jkl}=Z^i_{jkl}$, является конциркулярным.

Пусть $M$ — многообразие с римановой метрикой, $X$ — векторное поле на $M$. Назовем $X$ инфинитезимальным конциркулярным преобразованием, или конциркулярным движением, если локальная 1-параметрическая группа локальных преобразований, порожденная полем $X$ в окрестности каждой точки из $M$, состоит из (локальных) конциркулярных преобразований. Для этого необходимо и достаточно выполнение условий:

$$L_X g=\psi g,\quad \nabla^2\psi=\varphi g,$$

где $\varphi$ и $\psi$ — скаляры [17]. Инфинитезимальное конформное преобразование в $M$ является конциркулярным движением, если и только если оно сохраняет тензор конциркулярной кривизны $Z: L_X Z=0$.

Множество всех инфинитезимальных конциркулярных преобразований в $M$ образует алгебру Ли. Действительно, если $L_{X_a}g=\psi_a g$, $\nabla^2\psi_a=\varphi_a g$ при $a=1, 2$, то $L_{[X_1,X_2]}g=\psi g$, $\nabla^2\psi=\varphi g$, где $\psi=2X_{[1}\psi_{2]}$, $\varphi=2\psi_{[1}\varphi_{2]}+2X_{[1}\varphi_{2]}$, т. е. $[X_1, X_2]$ есть конциркулярное движение.

Так как конциркулярная алгебра Ли является подалгеброй конформной алгебры Ли, то ее размерность не превосходит число $(n+1)(n+2)/2$. Это число достигается в пространстве постоянной кривизны, ибо конформная группа в пространстве Эйнштейна $G_n$ $(n>2)$ и, следовательно, в пространстве постоянной кривизны $S_n(n>2)$ является группой конциркулярных преобразований.

Если $M$ допускает $r>1$ функционально независимых решений уравнения $\nabla^2\Phi=\varphi g$ $(g(D\Phi, D\Phi)\neq 0)$, то все конформные движения в нем являются конциркулярными. Отсюда следует, что конформная группа в пространстве $V_0(K)$ [97] с главной частью размерности $r>1$ есть конциркулярная группа.

Пространства постоянной кривизны $K$, пространства Эйнштейна и пространства $V_0(K)$ $(r>1)$ обладают общим свойством: каждое конформное движение $X$ в этих пространствах удовлетворяет условиям: $L_X g=\psi g$; $\nabla^2\psi+K\psi g=0$, где $K=\mathrm{const}$. Обозначим такие пространства символом $C_n(K)$.

Если пространство $C_n(K\neq 0)$, в котором существуют $\tau$ функционально независимых решений $\psi_a$ $(a=1, \ldots, \tau)$ уравнения $\nabla^2\psi+K\psi g=0$, допускает $r$-мерную максимальную конформную (т. е. конциркулярную) алгебру Ли $G$, то эта алгебра содержит подалгебру Ли размерности $r-\tau$, совпадающую с алгеброй Ли инфинитезимальных изометрий. $G$ натянута на базисные инфинитезимальные изометрии и $\tau$ конциркулярных движений $D\psi_a$ $(a=1, \ldots, \tau)$ [17]. ($D\psi_a$ — векторное поле, сопряженное дифференциальной форме $d\psi_a$ относительно метрики $g$).

Векторное поле $X$ на римановом многообразии $M$ с метрикой $g$ и римановой связностью $\nabla$ называется конциркулярным (соответственно рекуррентным) векторным полем, если $\nabla X=\rho\cdot\mathrm{id}+Xd\Phi$ (соответственно $\nabla X=X\cdot d\Phi$), где $\rho$ и $\Phi$ — скалярные поля.

*Всякое лоренцево пространство Эйнштейна $G_4$ первого типа* Петрова, допускающее конциркулярное векторное поле, является пространством постоянной кривизны. Если пространство Эйнштейна $G_4$ второго типа Петрова допускает конциркулярное векторное поле, то его скалярная кривизна равна нулю, а конциркулярное векторное поле является рекуррентным. Пространства Эйнштейна третьего типа Петрова не допускают ненулевых конциркулярных векторных полей [40].

Дезж [182] *нашел условия для кривизны*, при которых связное аналитическое риманово многообразие $V_n$ $(n>2)$, допускающее ненулевое конциркулярное векторное поле, является пространством Эйнштейна.

Скалярное поле $\Phi$ на $M$ называется специальным конциркулярным скалярным полем, если $\nabla^2\Phi=\rho\Phi g$, где $\rho=\mathrm{const}\neq 0$. Если тензор кривизны (соответственно тензор Риччи) риманова пространства $M$, допускающего специальное конциркулярное скалярное поле, удовлетворяет условию $R_{hijk,\,[em]}=0$ (соответственно условию $R_{ij,\,[ke]}=0$), то $M$ есть пространство постоянной кривизны (соответственно пространство Эйнштейна) [271].

Связное $n$-мерное риманово $C^\infty$-многообразие $M$ допускает $n+1$ независимых решений уравнения $\nabla^2\rho+c^2\rho g=0$, если и только если $M$ изометрично сфере $S^n(1/c)$ в $E^{n+1}$ ([367], см. также [202]).

Векторное поле $V$ на $n$-мерном римановом многообразии $(M, g)$ класса $C^\infty$ называется специальным конциркулярным векторным полем, если для всех векторных полей $X$ выполнено $\nabla_X V=\varphi X$, где $\varphi$ — функция на $M$. Если на многообразии $M$ существует более двух линейно независимых конциркулярных векторных полей $V_{(i)}$, то $\nabla_X\varphi_{(i)}=-Kg(X, V_{(i)})$ для всех $X$ и $\varphi_{(i)}=-K\rho_{(i)}+b_{(i)}$, где $b_{(i)}$ и $K$ — постоянные [262].

В пространстве $S_n$ постоянной ненулевой кривизны $K$ $n+1$ конциркулярных векторных полей порождают максимальные изометрическую $(i_{n(n+1)/2}, \{Z\})$, конформную (конциркулярную) $(c_{(n+1)(n+2)/2}, \{X; Z\})$ и проективную (см. § 4) $(p_{n^2+2n}, \{Y; Z\})$ алгебры Ли. Генераторы этих алгебр Ли полностью определяются заданием $(n+1)$ специальных конциркулярных скалярных полей $\psi_a$:

$$\nabla^2\psi_a+K\psi_a g=0 \qquad (a=1, \ldots, n+1) \tag{1}$$

и могут быть получены простым дифференцированием функций $\psi_a$ по координатам в $S_n$:

$$X_a=D\Psi_a;\ Y_{ab}=2\Psi_{(a}D\Psi_{b)};\ Z_{ab}=2\Psi_{[a}D\Psi_{b]}. \tag{2}$$

В качестве функций $\Psi_a$, определяемых с точностью до линейных преобразований, могут быть взяты координаты Вейерштрасса $Z^a$, в которых основная форма пространства $S_n$ принимает вид

$$ds^2=\sum_{a=1}^{n+1} e_a dZ^{a^2}, \quad (e_a=\pm 1;\ e_{n+1}=\operatorname{sgn} K).$$

$Z^a$ можно рассматривать также как декартовы координаты плоского пространства $E_{n+1}$, в которое вложено $S_n$, определенное уравнением

$$\sum_{a=1}^{n+1} e_a Z^{a^2}=1/K.$$

Структуры изометрической, конформной и проективной алгебр Ли в $S_n$ определяются следующими коммутационными соотношениями

$$[Z_{ab}, Z_{bd}]=e_b Z_{ad},\ [Y_{ab}, Z_{bd}]=e_b Y_{ad},\ [X_a, Z_{ab}]=e_a X_b,$$

$$[X_a, X_b]=KZ_{ab},\ [Y_{aa}, Z_{ab}]=2e_a Y_{ab},$$

$$[Y_{ab}, Z_{ab}]=e_a Y_{bb}-e_b Y_{aa},\ [Y_{ab}, Y_{bd}]=e_b Z_{ad},$$

$$[Y_{bb}, Y_{bd}]=2e_b Z_{bd}\ (a\neq b\neq d\neq a)$$

(остальные коммутаторы равны нулю).

Изометрии в $S_n$ проождаются инфинитезимальными вращениями $X_a=e_b Z^a(\partial/\partial Z^b)-e_a Z^b(\partial/\partial Z^a)$ в $E_{n+1}$, а концирк улярные преобразования — проективными движениями $X_a=-KZ^aZ^c(\partial/\partial Z^c)+e_a(\partial/\partial Z^a)$ в $E_{n+1}$ (см. п. 2.6). Следовательно, конформная группа в $S_n$ порождается подгруппой проективной группы в $E_{n+1}$ [19].

Если $n$-мерное риманово многообразие $M$ допускает $r$ функционально независимых решений $\Psi_a$ ($a=1, \ldots, r$) уравнения (1), то в нем действуют:

1) изометрическая алгебра Ли $i_{r(r-1)/2}$, имеющая $r$ подалгебр размерности $(r-1)(r-2)/2$, каждая из которых обладает $(r-1)$ подалгебрами размерности $(r-2)(r-3)/2$, и так далее:

$$i_{r(r-1)/2}\supset i_{(r-1)(r-2)/2}\supset\ldots\supset i_1; \qquad (\alpha)$$

$i_{r(r-1)/2}$ содержит всего $C_r^{r-s}$ различных подалгебр размерностей $(r-s)(r-s-1)/2$ ($s=1, \ldots, r-2$);

2) конформная (концирк улярная) алгебра Ли $c_{r(r+1)/2}$ с изометрической подалгеброй $i_{r(r-1)/2}$, имеющая $r$ подалгебр размерности $(r-1)r/2$, каждая из которых обладает $(r-1)$ подалгебрами размерности $(r-2)(r-1)/2$, и так далее:

$$c_{r(r+1)/2}\supset c_{(r-1)r/2}\supset\ldots\supset c_1; \qquad (\beta)$$

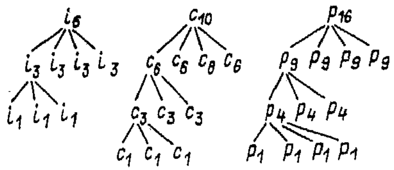
$c_{r(r+1)/2}$ содержит всего $C_r^{r-s}$ различных (негомотетических) подалгебр размерностей $(r-s)(r-s+1)/2$, ($s=1, \ldots, r-2$). Она интранзитивна, если $r<n$, и транзитивна в противном случае;

3) проективная (неаффинная) алгебра Ли $p_{r^2}$ с изометрической подалгеброй $i_{r(r-1)/2}$, имеющая $r$ подалгебр размерности $(r-1)^2$, каждая из которых содержит $(r-1)$ подалгебр размерности $(r-2)^2$, и так далее:

$$p_{r^2}\supset p_{(r-1)^2}\supset\ldots\supset p_1; \qquad (\gamma)$$

$P_{r^2}$ имеет всего $C_r^{r-s}$ различных (неаффинных проективных) подалгебр размерностей $(r-s)^2$, ($s=1, \ldots, r-2$). При $r<n$ алгебра Ли $p_{r^2}$ интранзитивна, а при $r=n$ — транзитивна.

Характерное «цепное» строение перечисленных алгебр Ли иллюстрирует следующая диаграмма, где представлены цепочки ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$) в случае $r=4$.




В каждой точке $x \in M$ возникают $r(r-1)/2$ параллелограммов, построенных на концциркулярных векторах $\Psi_a D\Psi_b$ ($a$, $b=1, \ldots, r$). Стороны каждого из параллелограммов и одна из его диагоналей ($\Psi_a D\Psi_b + \Psi_b D\Psi_a$) задают неаффинные проективные движения, вторая диагональ ($\Psi_a D\Psi_b - \Psi_b D\Psi_a$) — инфинитезимальную изометрию. Каждая из геодезических конгруэнций — траекторий $r$ 1-параметрических концциркулярных групп $D\Psi_b$ — служит также конгруэнцией траекторий $r$ 1-параметрических проективных групп $\Psi_a D\Psi_b$ ($a=1, \ldots, r$) и является главной конгруэнцией тензора Риччи с постоянным главным инвариантом, равным $(n-1)K$ [19], [123].

О концциркулярных преобразованиях и концциркулярных векторных полях см. также [75], [213] и [379].

**2.6. Группы гомотетий.** А. И. Егоров и Л. И. Егорова [55] доказали, что существует одно и только одно четырехмерное риманово пространство с максимальной алгеброй Ли гомотетических движений размерности 9.

А. А. Ловков [71] определил римановы пространства $V_4$, допускающие просто транзитивную группу гомотетий, которая является прямым произведением двух двумерных неабелевых групп.

И. А. Ундалова и Г. Р. Еранова [104] исследовали 1-параметрические группы гомотетий в римановых пространствах размерности $n>3$.

Н. С. Липатов [70] доказал, что пространство Гёделя с метрикой

$$ds^2 = a dx^2 + 2b dx dy + c e^{2th} dy^2 + dz^2 + dt^2,$$

где $a$, $b$, $c$, $k$ — постоянные и $ac-b^2 \neq 0$, не допускает преобразований, изменяющих расстояния между точками в одном и том же постоянном отношении, не равном единице.

Б. Абакиров [1] исследовал группы гомотетий в псевдоримановых пространствах с вырожденными гиперповерхностями.

С. Я. Нусь [85] рассматривал изометрии синектической метрики (см. [115]) в касательных расслоениях гомотетически подвижных трех- и четырехмерных римановых пространств. Х. Шадыев [112], [113] исследовал инфинитезимальные гомотетии синектической метрики в касательном расслоении $n$-мерного риманова многообразия.

Инфинитезимальные гомотетии в кокасательном расслоении изучал И. Г. Шандра [114].

Векторное поле $X$ на римановом многообразии $M$ с метрикой $g$ и римановой связностью $\nabla$ называется конкуррентным, если $\nabla_Y X = Y$ для всех векторных полей $Y$ на $M$. Конкуррентное векторное поле является, очевидно, инфинитезимальной гомотетией.

Если полное связное риманово многообразие $M$ допускает конкуррентное векторное поле $X$, то оно изоморфно евклидову пространству, причем изоморфизм переводит $X$ в «радиальное» векторное поле $x^i(\partial/\partial x^i)$ [148].

Подобно концикулярным векторным полям, конкуррентные и параллельные векторные поля играют особую роль в возникновении групповых симметрий римановых пространств.

Риманово пространство $(M, g)$ размерности $n$, в котором существуют конкуррентное векторное поле $D\Psi : \nabla^2\Psi = g$, и $\tau < n$ линейно независимых параллельных векторных полей $D\varphi_a : \nabla^2\varphi_a = 0$, $a = 1, \ldots, \tau$, допускает проективную алгебру Ли $p$ размерности $(\tau+1)^2$ с максимальными изометрической ($i$), гомотетической ($h$) и аффинной ($a$) подалгебрами размерностей $\tau(\tau+1)/2$, $\tau(\tau+1)/2+1$ и $\tau^2+\tau+1$ соответственно:

$$p_{(\tau+1)^2} \supset a_{\tau^2+\tau+1} \supset h_{\tau(\tau+1)/2+1} \supset i_{\tau(\tau+1)/2};$$

$p$ натянута на базисные векторные поля

$$Z = D\Psi,\ X_a = D\varphi_a,\ X^{\pm}_{ab} = \varphi_a X_b \pm \varphi_b X_a,\ Z_a = \varphi_a Z, \tag{3}$$

удовлетворяющие структурным соотношениям

$$[X_a, X_b] = 0; \quad [X_a, X^{\pm}_{cd}] = \alpha_{ac} X_d \pm \alpha_{ad} X_c;$$
$$[X_a, Z] = X_a; \quad [Z_a, Z_b] = \alpha_b Z_a - \alpha_a Z_b;$$
$$[X^{\pm}_{ab}, X^{\pm}_{cd}] = \alpha_{bc} X^{-}_{ad} \pm \alpha_{ac} X^{-}_{bd} + \alpha_{ad} X^{-}_{bc} \pm \alpha_{bd} X^{-}_{ac};$$
$$[X^{+}_{ab}, X^{-}_{cd}] = \alpha_{ac} X^{+}_{bd} + \alpha_{bc} X^{+}_{ad} - \alpha_{ad} X^{+}_{bc} = -\alpha_{bd} X^{+}_{ac};$$
$$[X_b, Z_a] = \alpha_{ab} Z + (X^{+}_{ab} + X^{-}_{ab})/2;$$
$$[Z, Z_a] = Z_a + \alpha_a Z; \quad [Z, X^{\pm}_{ab}] = \alpha_a X_b \pm \alpha_b X_a;$$
$$[Z_a, X^{\pm}_{bc} = \alpha_b (X^{+}_{ac} + X^{-}_{ac})/2 \pm \alpha_c (X^{+}_{ab} + X^{-}_{ab})/2 -$$
$$- \alpha_{ac} Z_b \mp \alpha_{ab} Z_c,$$

где $[X, Y] \equiv L_X Y$ — скобка Ли векторных полей $X$, $Y$; $\alpha_{ab} \equiv X_a \varphi_b \equiv \alpha_{ba}$ и $\alpha \equiv Z\varphi_a - \varphi_a$ — постоянные,

$i = \{X_a; X_{ab}^-\}$, $a < b$; $h = \{i; Z\}$; $a = \{h; X_{ab}^+\}$, $a \leqslant b$; $p = \{a; Z_a\}$ $(a, b, c, d = 1, \ldots, \tau)$. В случае $\tau = n$, т. е. в случае плоского пространства $E_n$, векторные поля (3) порождают $n^2+2n$-мерную максимальную проективную алгебру Ли в $E_n$:

$$p_{n^2+2n} \supset a_{n^2+n} \supset h_{n(n+1)/2+1} \supset i_{n(n+1)/2}.$$

В декартовых координатах $ds^2=e_1dx^{1^2}+\ldots+e_ndx^{n^2}$; $2\psi=$ $=e_1x^{1^2}+\ldots+e_nx^{n^2}$; $\varphi_a=x^a$, $\alpha_{aa}=e_a$, $\alpha_a=\alpha_{ab}=0$ при $a\neq b$ $a, b=1, \ldots, n)$.

Справедливость приведенных результатов для любого числа $r\leqslant\tau$ параллельных векторных полей, существующих в $M$, обусловливает «цепное» строение алгебр Ли $i$, $h$, $a$ и $p$, имеющих $\tau$ различных подалгебр размерностей $\tau(\tau-1)/2$, $\tau(\tau-1)/2+1$, $\tau^2-\tau+1$ и $\tau^2$ соответственно, каждая из которых обладает $\tau-1$ подалгебрами размерностей $(\tau-1)(\tau-2)/2$, $(\tau-1)(\tau-2)/2+1$, $\tau^2-3\tau+3$ и $(\tau-1)^2$ соответственно, и так далее:

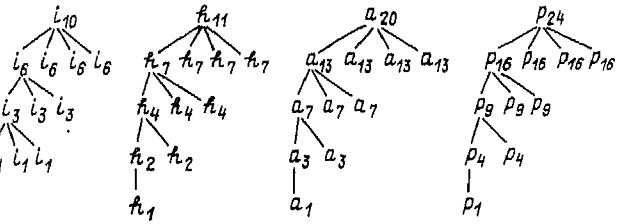
$$i\supset i_{\tau(\tau-1)/2}\supset i_{(\tau-1)(\tau-2)/2}\supset\ldots\supset i_1; \tag{4}$$

$$h\supset h_{\tau(\tau-1)/2+1}\supset h_{(\tau-1)(\tau-2)/2+1}\supset\ldots\supset h_1; \tag{5}$$

$$a\supset a_{\tau^2-\tau+1}\supset a_{\tau^2-3\tau+3}\supset\ldots\supset a_1; \tag{6}$$

$$p\supset p_{\tau^2}\supset p_{(\tau-1)^2}\supset\ldots\supset p_1. \tag{7}$$

Каждая из алгебр Ли $i$, $h$, $a$ и $p$ содержит всего $C_\tau^s$ различных (нетривиальных) подалгебр размерностей $(\tau-s)(\tau-$ $-s+1)/2$, $(\tau-s)(\tau-s+1)/2+1$, $(\tau-s)^2+(\tau-s)+1$ и $(\tau-s+1)^2$ соответственно $(s=1, \ldots, \tau-1)$. На следующей диаграмме представлены цепочки (4)—(7) в случае $\tau=4=n$.




В каждой точке $x\in M$ возникают $\tau(\tau-1)/2$ параллелограммов, построенных на рекуррентных векторах $\varphi_aD\varphi_b(x)$. Стороны каждого из параллелограммов и одна из его диагоналей задают негомотетические аффинные движения, вторая диагональ — инфинитезимальную изометрию. Геодезические каждой из конгруэнций траекторий $\tau$ 1-параметрических групп параллельных переносов служат также траекториями $\tau$ 1-параметрических аффинных групп, а геодезические траектории 1-параметрической группы гомотетий являются траекториями $\tau$ 1-параметрических проективных групп.

Литературное обозрение к § 2.

Абакиров Б., Молдобаев Д. [2]; Абакирова Г. Б. [3]; Алексеевский Д. В. [4], [5]; Алексеевский Д. В., Кимельфельд Б. Н. [8];

Алыбакова Г. Б. [9]; Аминова А. В. [17], [19], [34]; Билялов Р. Ф. [43], Галярский Э. И. [47]; Терманов О. С. [48]; Голубятников В. П., Пестов Л. Н. [49]; Иванов Г. Г. [62]; Микеш Й. [75]; Микеш Й., Покась С. М. [77]; Молдобаев Д. [81], [82]; Покась С. М. [90]; Улановский М. А. [99]; Чупахин А. П. [110], [111]; Ackerman N. H., Hsiung C. C. [117]; Ackler L. L., Hsiung Chuan-Chin [118]; Aminova A. V. [123]; Amur K., Pujar S. S. [126]; Ashtekar A., Magnon-Ashtekar A. [128]; Barbance C. [133]; Barbance C., Kerbrat Y. [134]; Barut A. O. [135]; Batbedat A. [136]; Beckers J., Harnad J., Perroud M., Winternitz P. [137]; Berger B. K. [141]; Blair D. E. [142]; Bona C. [143]; Branson T. P. [147]; Burdet G., Patera J, Perrin M., Winternitz P. [154]; Cahen M. [156]; Cahen M., Kerbrat Y. [157]—[159]; Cao R. [161]; Carot J., Mas Li [162]; Defrise-Carter L. [180]; Deszcz R. [182]; Duggal K. L., Sharma R. [185]; Eardley D., Isenberg J., Marsden J., Moncrief V. [188]; Ejiri N. [191]; Faridi A. M. [195]; Ferrand J. [196]; Fujii M. [202]; Garfinkle D., Tian Q. [203]; Gebarowski A. [204]; Guo Xiaoying [213]; Havas P., Plebtnski J. [229]; Herrera L., Jimenez J., Leal L., Ponce de Lton J., Esculpi M., Galina V. [233]; Herrera L., Ponce de Leon [234]; Hiramatu H. [235]; [236]; Hsiung Chuan-Chih, Stern L. W. [239]; Hussin Z., Zinzinkayo S. [241]; Isu Minoru [249]; Iwai Toshihiro [250]; Katzin G. H., Levine J. [255]; Kerbrat Y. [258]; Kim In-Bae [262]; Kojyo Hidemaro [267]; Konopka C. [269]; Koyanagi Tsunehira [271]; Legare M. [273]; Lopera J. F. Torres [277]; Lord E. A. [279]; Lord E. A., Goswami P. [280]; Maartens R., Mason D. P. [287]; Maralabhavi Y. B. [293]; Margulescu G. [296], [297]; Mason D. P., Maartens R. [303]; Mason D. P., Tsamparlis M. [304]; Mok Kam-Ping [310]; Moreshi O. M., Sparling G. A. [312]; Obata M. [319]; Pigeaud P., Sakoto Moussa [324]; Roter W. [331]; Sakoto Moussa [332]; Sanno B. [334]; Sharma R. [339]; Shetty D. J. [341]; Sinzinkayo S., Demaret J. [346]; Suguri T., Ueno S. [355]; Suyama Yoshihiko, Tsukamoto Yotaro [357]; Tachibana Shun-ichi [365]; Tandai Kwoichi [367]; Udriste C. [372]; Vignon B. [373]; Yamada Toshikiyo [379]; Yamauchi Kazunari [385], [386]; Yano Kentaro [387]—[389]; Yano Kentaro, Hiramatu Hitosi [390]—[392]; Yorozu Shinsuke [398], [399]; Yoshimatsu Yashiro [400].

Литература по гомотетиям к § 2.

Абакиров Б. [1]; Егоров А. И., Егорова Л. И. [55]; Липатов Н. С. [70]; Ловков А. А. [71]; Нусь С. Я. [85]; Ундалова И. А., Еранова Г. Р. [104]; Шадыев Х. [112], [113]; Шандра И. Г. [114]; Barbance Christiane [133]; Berger B. K. [141]; Brickell F., Yano Kentaro [148]; Collinson C. D. [171]; Dyer C. C., Honig E. [186]; Eardley D. M. [187]; Eardley D., Isenberg J., Marsden J., Moncrief V. [188]; Halford W. D. [214]; Halford W. D., Kerr R. P. [215]; Hall G. S. [218]; Kerbrat Y. [257]; McIntosh C. B. G. [305]—[307]; Mok Kam-Ping [310]; Moshetti G. [313]; Sigal R. [342]; Vignon B. [373].

## § 3. ГРУППЫ АФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пусть $M$ — (псевдо)риманово многообразие с римановой связностью $\nabla$. Дифференцируемое отображение $f$ многообразия $M$ на себя называется аффинным преобразованием, если оно преобразует каждое параллельное векторное поле вдоль любой кривой $\tau$ из $M$ в параллельное векторное поле вдоль кривой $f(\tau)$ (т. е. если индуцированное отображение $T(M) \to T(M)$ преобразует каждую горизонтальную кривую в горизонтальную кривую). Ясно, что аффинное преобразование в $M$ сохраняет связность $\nabla$. Группа $A(M)$ аффинных преобразований риманова многообразия $M$ с конечным числом связных компонент есть группа Ли.

Векторное поле $X$ на $M$ называется инфинитезимальным аффинным преобразованием, или аффинным (киллинговым) векторным полем, или также аффинным движением (а. д.), если порождаемая этим полем в окрестности $U$ каждой точки $X \in M$ 1-параметрическая группа локальных преобразований $\varphi_t$ сохраняет связность $\nabla$, т. е. если $\varphi_t : U \to M$ есть аффинное преобразование при условии, что $U$ наделено связностью $\nabla/_U$ — сужением $\nabla$ на $U$. $X$ есть а. д. в $M$, если и только если $\nabla_Y(L_X - \nabla_X) = R(X, Y)$ для всех векторных полей $Y$ на $M$ (в локальных координатах $L_\xi \Gamma^l_{jl} \equiv \xi^l_{;jl} + R^l_{jkl}\xi^k = 0$), что равносильно условию $\nabla(L_X g) = 0$ (в локальных координатах $(\xi_{i,j} + \xi_{j,i})_{,k} = 0$, здесь $\xi^i$, $\Gamma^i_{jl}$ и $R^l_{jkl}$ — компоненты векторного поля $X$, связности $\nabla$ и тензорного поля кривизны соответственно).

Если $M$ — связное риманово многообразие, то алгебра Ли $a(M)$ инфинитезимальных аффинных преобразований в $M$ имеет размерность самое большое $n^2+n$, где $n = \dim M$. Если $\dim a(M) = n^2+n$, то $M$ — плоское, т. е. кривизна многообразия $M$ тождественно равна нулю.

Множество всех полных аффинных векторных полей в $M$ образует алгебру Ли группы $A(M)$ аффинных преобразований в $M$. Если $M$ полно, то алгебра Ли $a(M)$ всех инфинитезимальных аффинных преобразований в $M$ изоморфна алгебре Ли группы $A(M)$ аффинных преобразований в $M$.

Обобщением теоремы Бохнера [266, т. 1, с. 235[1]] для инфинитезимальных изометрий является следующая теорема Удристе [371]. Пусть $V_n$ — связное риманово многообразие с отрицательной секционной кривизной. Если длина аффинного векторного поля $X$ имеет максимум в точке $x_0 \in V_n$, то $X$ равно нулю в окрестности этой точки.

Если инфинитезимальное аффинное преобразование $X$ полного некомпактного риманова многообразия имеет конечную

[1] Номера страниц здесь и далее указаны для русского перевода, если он имеется.

глобальную норму (см. п. 1.6), то $X$ есть инфинитезимальная изометрия [397].

Лоренцево многообразие $n$ измерений допускает инфинитезимальное негомотетическое аффинное преобразование, если и только если оно локально приводимо и (или) допускает параллельные векторные поля [24], [124].

Иваи [251] указал максимальные размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований, сохраняющих векторные поля.

Грицак установил существование негомотетического аффинного движения в конформно рекуррентном многообразии с метрикой специального вида [212] и доказал, что коллинеации изотропных геодезических в нерекуррентных конформно рекуррентных многообразиях являются инфинитезимальными аффинными преобразованиями [211].

Об аффинных преобразованиях в симметрических конформно евклидовых пространствах см. [68]. Относительно аффинного конформного векторного поля см. [340].

Эндоморфизм (тензорное поле типа (1, 1)) $F$ и векторное поле $Y$ на римановом многообразии $M$ индуцируют векторные поля $(FY)^V$ и $(FY)^H$ на его касательном расслоении $T(M)$. Явата [393] исследовал условия, при которых $(FY)^V$ и $(FY)^H$ являются аффинными векторными полями на расслоении $T(M)$.

Ёкоте [394] сформулировал необходимые и достаточные условия для того, чтобы горизонтальный $(X^H)$, вертикаль $(X^V)$ и полный $(X^C)$ лифты векторного поля $X$ в касательное расслоение $T(M)$ компактного риманова многообразия $M$ определяли аффинное или проективное движение.

Яно [389] исследовал конечные деформации $g \to g^* = g + b$ и инфинитезимальные деформации $g \to g^*(x, t)$ с тензором деформации $a = \left.\frac{dg^*}{dt}\right|_{t=0}$, $g^*(x, 0) = g(x)$, риманова пространства $V_n$ с метрикой $g$, сохраняющие метрику (изометрии), риманову связность (аффинные преобразования) или объем. Если конечная деформация неприводимого риманова пространства $V_n$ является аффинным преобразованием, сохраняющим объем, то эта деформация есть изометрия. См. также [150], [338] и п. 4.3.

Литературное обозрение к § 3.

Аминова А. В. [15], [19], [24]; Аминова А. В., Тогулева Т. П. [40]; Кондауров М. Т. [68]; Aminova A. V. [124]; Bedran M. L., Lesche B. [138]; Brodzki M., Sonelski W. [150]; Collinson C. D. [172]; Grycak W. [211], [212]; Hall G. S., Costa J. da [219]; Iwai Toshihiro [251]; Maartens R. [286]; Ne'eman Y., Sherry T. N. [317]; Papuc Dan I., Popescu Ion P. [321]; Sharma Ramesh [338]; Sharma Ramesh, Duggal K. L. [340]; Smrz P. K. [348]; Tucker R. W. [370]; Udriste C. [371]; Yamauchi Kazunari [386]; Yano Kentaro [389]; Yawata Makoto [393]; Yokote Ichiro [394]; Yorozu Shinsuke [397].

## § 4. ГРУППЫ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

**4.1. Размерность группы проективных преобразований.** Пусть $M$ — $n$-мерное многообразие, $U$ и $V$ — окрестности начала $O$ в $\mathbf{R}^n$, $f: U \to M$ и $g: V \to M$. Говорят, что $f$ и $g$ определяют одну и ту же $k$-струю в $O$, если они имеют одинаковые частные производные порядков $l \leqslant k$ в $O$; $k$-струя, задаваемая отображением $f$, обозначается $J_0^k(f)$. Если $f$ есть диффеоморфизм окрестности начала $O$ на открытое подмножество из $M$, то $k$-струя $J_0^k(f)$ в $O$ называется $k$-репером, или репером $k$-го порядка в точке $x = f(O)$.

Если $g$ — диффеоморфизм окрестности точки $O$ в $\mathbf{R}^n$ на окрестность точки $O$ в $\mathbf{R}^n$, то множество $k$-реперов $J_0^k(g)$ в точке $O \in \mathbf{R}^n$ образует группу $G^k(n)$ с операцией умножения $J_0^k(g) \cdot J_0^k(g') = J_0^k(g \circ g')$.

Множество $P^k(M)$ $k$-реперов многообразия $M$ является главным расслоением над $M$ с естественной проекцией $\pi : \pi(J_0^k(f)) = f(O)$, и со структурной группой $G^k(n)$, действующей на $P^k(M)$ справа: $J_0^k(f) \cdot J_0^k(g) = J_0^k(f \circ g)$ для $J_0^k(f) \in P^k(M)$ и $J_0^k(g) \in G^k(n)$. Репер первого порядка есть обычный линейный репер, поэтому $G^1(n) = GL(n; \mathbf{R})$, а $P^1(M)$ есть расслоение линейных реперов над $M$.

Расслоение $P^1(\mathbf{R}^n)$ линейных реперов над $\mathbf{R}^n$ изоморфно группе $A(n, \mathbf{R})$ аффинных преобразований пространства $\mathbf{R}^n$, рассматриваемой как главное расслоение над $\mathbf{R}^n = A(n; \mathbf{R}) / GL(n, \mathbf{R})$, при этом касательное пространство к $P^1(\mathbf{R}^n)$ в $e = J_0^1(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})$ отождествляется с касательным пространством к $A(n; \mathbf{R})$ в единице $e$, т. е. с алгеброй Ли $a(n; \mathbf{R}) = \mathbf{R}^n + gl(n, \mathbf{R})$ группы $A(n; \mathbf{R})$.

Диффеоморфизм $f$ окрестности начала $O$ в $\mathbf{R}^n$ на окрестность точки $f(O) \in M$ индуцирует диффеоморфизм окрестности точки $e \in P^1(\mathbf{R}^n)$ на окрестность точки $J_0^1(f) \in P^1(M)$ и изоморфизм $\bar{f}$ касательного пространства $a(n, \mathbf{R}) = T_e(P^1(\mathbf{R}^n))$ на касательное пространство к $P^1(M)$ в $J_0^1(f)$. Каноническая $a(n, \mathbf{R})$-значная 1-форма $\theta$ на $P^2(M)$ определяется условием $\theta(X) = \bar{f}^{-1}(X')$, где $X$ — вектор, касательный к $P^2(M)$ в $J_0^2(f)$, а $X'$ — его образ при морфизме $P^2(M) \to P^1(M)$, задаваемом соответствием $J_0^2(f) \to J_0^1(f)$.

Каждый 2-репер $u$ в $\mathbf{R}^n$ однозначно представляется в виде полинома

$$f(x) = \left(u^i + \Sigma u^i_j x^j + \frac{1}{2} \Sigma u^i_{jk} x^j x^k\right) e_i,$$

где $x = x^i e_i \in \mathbf{R}^n$ и $u^i_{jk} = u^i_{kj}$. Набор $(u^i;\ u^i_j;\ u^i_{jk})$ определяет естественную систему координат в $P^2(\mathbf{R}^n)$, а его сужение $(u^j_i;\ u^j_k) = (s^i_j,\ s^i_{jk})$ на $G^2(n)$ — естественную систему координат в $G^2(n)$. Аналогично вводятся естественные системы координат: $(u^i;\ u^i_j)$ в $P^1(\mathbf{R}^n)$ и $(s^i_j)$ в $G^1(n)$. Пусть $(E_i,\ E^j_i)$ — базис в $a(n, \mathbf{R})$: $E_i=(\partial/\partial u^i)_e$, $E_i^j=(\partial/\partial u_j^i)_e$. Каноническая форма $\theta$ на $P^2(\mathbf{R}^n)$ в локальных координатах имеет вид:

$$\theta=\Sigma\theta^i E_i+\Sigma\theta_j^i E_i^j.$$

Если $\theta=(\theta^i, \theta_j^i)$ — каноническая форма на $P^2(M)$, то

$$d\theta^i=-\Sigma\theta_k^i\wedge\theta^k.$$

[264, с. 183].

Пусть $L/L_0$ — вещественное проективное пространство размерности $n$, где $L=SL(n+1;\ \mathbf{R})$/центр; а $L_0$ — факторизованная по центру группа матриц из $SL(n+1;\ \mathbf{R})$ вида $\binom{A\ 0}{\xi\ a}$, $A\in GL(n, \mathbf{R})$, $\xi$ — $n$-мерный вектор-строка. $L_0$ можно рассматривать как подгруппу группы $G^2(n)=\{(a_j^i;\ a^i_{jk})\}$.

Главное подрасслоение $\Pi$ расслоения $P^2(M)$ со структурной группой $L_0\subset G^2(n)$ называется проективной структурой на $M$. Сужение $(\omega^i;\ \omega_j^i)$ на $\Pi$ канонической формы $(\theta^i;\ \theta_j^i)$ расслоения $P^2(M)$ называется канонической формой расслоения $\Pi$. Имеется единственная связность Картана $(\omega^i;\ \omega_j^i;\ \omega_j)$, кривизна которой $\Omega=(0;\ \Omega_j^i;\ \Omega_j)$ удовлетворяет условию $K^l_{jle}=0$, где $\Omega_j^i=\frac{1}{2}K^i_{jkl}\ \omega^k\wedge\omega^l$. Эта связность называется нормальной проективной связностью.

Пусть $\Pi$ и $\Pi'$ — проективные структуры на многообразиях $M$ и $M'$ соответственно. Диффеоморфизм (локальный) $f$ из $M$ в $M'$ индуцирует локальный изоморфизм $f_*: P^2(M)\to P^2(M')$. Если $f_*$ переводит $\Pi$ в $\Pi'$, то $f$ называется (локальным) проективным изоморфизмом из $M$ в $M'$. Если $M=M'$ и $\Pi=\Pi'$, то изоморфизм $f$ называется проективным преобразованием в $M$, или автоморфизмом проективной структуры $\Pi$.

Векторное поле $X$ на многообразии $M$ с проективной структурой $\Pi$ называется инфинитезимальным проективным преобразованием, если порожденная этим полем в окрестности каждой точки $x\in M$ локальная 1-параметрическая группа состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов структуры $\Pi$.

Инфинитезимальное проективное преобразование называется также проективным (киллинговым) векторным полем, или проективным движением (п. д.).

Для каждого проективного преобразования $f$ расслоения $\Pi$ суженное на $\Pi$ отображение $f_*$ сохраняет нормальную проективную связность.

Группа $P$ проективных преобразований $n$-мерного многообразия $M$ с проективной структурой $\Pi$ есть группа Ли преобразований размерности $r\leqslant\dim\Pi=n^2+2n$. Если $\dim P=\dim\Pi$, то $\Pi$ есть естественная проективная структура либо на проективном пространстве $P_n(\mathbf{R})$, либо на его универсальном накрывающем пространстве $S^n$ [264, с. 186].

Рассмотрим $G^1(n)=GL(n; \mathbf{R})$ как подгруппу в $G^2(n)$, состоящую из элементов $(s^i_j; s^i_{jk})$ с $s^i_{jk}=0$, а $L_0$ — как подгруппу в $G^2(n): G^1(n)\subset L_0\subset G^2(n)$. Тогда сечения $M\to P^2(M)/G^1(n)$ находятся в биективном соответствии с аффинными связностями нулевого кручения на многообразии $M$, а сечения $M\to P^2(M)/L_0$ — в биективном соответствии с проективными структурами на $M$.

Каждая аффинная связность без кручения $\Gamma$: $M\to P^2(M)/G^1(n)$ в композиции с естественным отображением $P^2(M)/G^1(n)\to P^2(M)/L_0$ задает проективную структуру $\Pi$: $M\to P^2(M)/L_0$. Говорят, что связность без кручения $\Gamma$ принадлежит проективной структуре $\Pi$, если она индуцирует $\Pi$ указанным выше образом.

Две аффинные связности без кручения $\Gamma$ и $\Gamma'$, определенные формами связности $\omega$ и $\omega'$ на расслоении $P^1(M)$ линейных реперов над $M$, называются проективно эквивалентными, если существует 1-форма $p$ на $M$ такая, что

$$\omega'-\omega=\theta p+p(\theta)\cdot \mathrm{id},$$

где $\theta$ — каноническая форма на $P^1(M)$, или

$$\Gamma'^i_{jk}-\Gamma^i_{jk}=\delta^i_j p_k+\delta^i_k p_j, \qquad (4.1)$$

где $\Gamma^i_{jk}$ и $\Gamma_{kj}$ — компоненты связности $\omega$ и $\omega'$ в локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$.

Связности $\Gamma$ и $\Gamma'$ на $M$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одной и той же проективной структуре [264, с. 191].

Пусть $\Gamma$ — аффинная связность без кручения на $M$, $A(M)$ — группа аффинных преобразований многообразия $M$ и $P(M)$ — группа его проективных преобразований, т. е. автоморфизмов индуцированной проективной структуры (соответствующая проективная связность может быть задана в локальных координатах проективными параметрами Т. Томаса (1925 г.): $\Pi^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\frac{2}{n+1}\delta^i_{(j}\Gamma^l_{k)l}$. Из предыдущего следует, что преобразование $\varphi$ многообразия $M$ является проективным преобразованием тогда и только тогда, когда оно преобразует связность $\Gamma$ в проективно эквивалентную связность. Ясно, что каждое аффинное преобразование в $M$ является проективным, поэтому $A(M)\subset P(M)$.

Пусть $M$ и $M'$ — два римановых многообразия с римановыми метриками и связностями $g$, $\nabla$ и $g'$, $\nabla'$ соответственно. Диффеоморфизм $f$ из $M$ в $M'$ называется геодезическим отображением, если образ $f(\gamma)$ каждой геодезической $\gamma$ в $M$ есть геодезическая в $M'$, т. е. если $f$ «сохраняет геодезические».

Для этого необходимо и достаточно, чтобы в соответственных (локальных) системах координат $x^i|_{x\in M}=x^i|_{f(x)\in M'}$ выполнялось условие

$$\Gamma'^l_{jk}-\Gamma^l_{jk}=\delta^l_j p_k+\delta^l_k p_j, \tag{4.2}$$

где 1-форма $p=p_i dx^i\equiv d\varphi$. Если $\varphi=\mathrm{const}$, то $f$ есть аффинное отображение. Из (4.1) и (4.2) следует, что диффеоморфизм $f$ риманова многообразия $M$ на себя является проективным преобразованием относительно проективной структуры, индуцированной на $M$ римановой связностью $\nabla$, тогда и только тогда, когда он преобразует метрику $g$ в проективно эквивалентную метрику, т. е. в метрику $g'$ с соответствующими геодезическими. Очевидно, что имеет место включение $I(M)\subset H(M)\subset\subset A(M)\subset P(M)$, где $I(M)$, $H(M)$, $A(M)$ и $P(M)$ — группы изометрий, гомотетий, аффинных и проективных преобразований риманова многообразия $M$ соответственно.

Векторное поле $X$ на римановом многообразии $M$ с римановой связностью $\nabla$ есть инфинитезимальное проективное преобразование (п. д.), если и только если

$$\nabla_Y(L_X-\nabla_X)\equiv\nabla_Y A_X=R(X, Y)-d\varphi(Y)\cdot\mathrm{id}-Yd\varphi \tag{4.3}$$

для всех векторных полей $Y$ на $M$, где $R$ — тензор кривизны. В локальных координатах:

$$L_\xi\Gamma^l_{jk}=\delta^l_j\varphi_{,k}+\delta^l_k\varphi_{,j} \qquad (X=\xi^i\partial/\partial x^i),$$

что равносильно

$$\xi^i{}_{,jk}+R^i_{jek}\,\xi^l=\delta^i_j\varphi_{,k}+\delta^i_k\varphi_{,j}.$$

Условие (4.3) эквивалентно двум уравнениям:

$$L_X g=h, \tag{4.4}$$

$$\nabla h(Y, Z, W)=2g(Y, Z)W\varphi+g(Y, W)Z\varphi+g(Z, W)Y\varphi. \tag{4.5}$$

Первое из них называется обобщенным уравнением Киллинга, а второе — уравнением Эйзенхарта. Если $\varphi=\mathrm{const}$, то $X$ есть аффинное движение.

Выполнив симметризацию $S$ обеих частей равенства (4.5), получим уравнение $S(\nabla q)=0$, где $q\equiv h-4\varphi g$. Если $\gamma$ — геодезическая в $M$, то поле ее касательных векторов $\dot\gamma$ параллельно вдоль $\gamma$. Используя это свойство, легко убедиться в том, что величина $q(\dot\gamma, \dot\gamma)$ остается постоянной вдоль каждой геодезической $\gamma$ $M$, т. е. является первым интегралом уравнений геодезических. Следовательно, каждому решению $h$ уравнения (4.5) в $M$ соответствует квадратичный первый интеграл уравнений геодезических.

*Множество всех полных проективных векторных полей в $M$ образует алгебру Ли группы $P(M)$ проективных преобразований в $M$.* $\mathrm{Dim}\,p(M)=n^2+2n$, *если и только если $M$ есть пространство постоянной кривизны.*

Задача определения геодезически соответствующих (проективно эквивалентных) римановых пространств возникла в связи с проблемой преобразований динамических систем и была решена Леви-Чивитой в 1896 г. для положительно определенных римановых метрик. Подобная задача для псевдоримановых пространств рассматривалась П. А. Широковым ($n=2$), А. З. Петровым ($n=3$), В. И. Голиковым, Г. И. Кручковичем (лоренцевы пространства) и др. (см. ссылки в монографиях [88] и [95]). С помощью Г-преобразования Синюкова решение этой задачи сводится к интегрированию нелинейного (относительно $g$) дифференциального уравнения

$$\nabla a(Y, Z, W) = g(Y, W) Z\varphi + g(Z, W) Y\varphi, \quad (Y, Z, W \in TM) \tag{4.5a}$$

с неизвестными билинейными формами $a$ и $g$.

Это уравнение с разных точек зрения рассматривалось большим числом авторов, однако все известные до сих пор решения этого уравнения, полученные с помощью метода адаптированного репера, исчерпывались тремя типами характеристики Сегре $\chi_\nu = \{(\nu \ldots 1)(1 \ldots 1) \ldots (1 \ldots 1)\}$, $\nu = 1, 2, 3$, билинейной формы $a$. Тормозом к решению задачи в общем виде являлась необходимость рассмотрения каждого типа в отдельности. Число разных типов $\{m_1 \ldots m_\tau\}$, $m_1 + \ldots + m_\tau = n$, с ростом $n$ неограниченно возрастает, и задача становится неразрешимой. Предложенная А. В. Аминовой [26], [124] техника косонормального репера устраняет это препятствие. Косорепер является естественным обобщением ортогонального репера. Риманова геометрия в косонормальном репере развивается подобно римановой геометрии в ортогональном репере. Техника интегрирования в косорепере в принципе так же проста, как и в ортрепере. Это обстоятельство и делает в конечном итоге возможным интегрирование в общем виде ковариантных дифференциальных уравнений с неизвестной билинейной формой в римановых пространствах произвольной сигнатуры и размерности. Следующий результат получен с помощью техники косонормального репера.

Пусть $g$ и $g'$ — две $n$-мерные проективно эквивалентные (псевдо)римановы метрики на многообразии $M$, $g_c$ и $g_c'$ — соответствующие контравариантные тензорные поля. Если $\chi = \{r_1 \ldots \ldots r_k\}$, $r_1 + \ldots + r_k = n$, есть характеристика Сегре симметричной билинейной формы $b$ с матрицей $(b) = (g)^T (g')^{-1} (g)$, то

$$g_c = \sum_{\alpha=1}^{k} \Pi_\beta' (f_\beta - f_\alpha)^{-r_\beta} \Phi_\alpha,$$

$$g_c' = \prod_{\gamma=1}^{k} (f_\gamma)^{r_\gamma} \sum_{\alpha=1}^{k} \Pi_\beta' (f_\beta - f_\alpha)^{-r_\beta} (f_\alpha \Phi_\alpha + \Omega_\alpha),$$

где $f_1, \ldots, f_k$ — попарно различные поля собственных значений формы $b$, $\Pi_\beta' A_{\alpha\beta}$ — произведение $A_{\alpha\beta}$ для всех $\beta = 1, \ldots, k$, кроме $\beta = \alpha$, $\Phi_\alpha$ и $\Omega_\alpha$ — билинейные формы, определяемые рекуррентными соотношениями. Обратное также верно, см. [33], [125].

Приведенный результат охватывает бесчисленное множество (основных) типов характеристики Сегре, в отличие от предшествующих результатов, которые, как отмечалось, исчерпываются тремя (основными) типами характеристики Сегре. Использование косорепера позволило не только получить решения уравнения (4.5а) для любого набора элементарных делителей (с простыми базисами), но и записать его в виде одной формулы, управляемой параметрами характеристики, в отличие от предыдущих работ, где результаты получались для каждой характеристики в отдельности, так что было трудно уловить что-либо общее в этих результатах.

Успешное применение косонормальных реперов к решению старой геометрической проблемы наводит на мысль, что с использованием косореперов может быть связан дальнейший прогресс в исследовании псевдоримановых пространств.

**4.2. Признаки изометричности и проективной эквивалентности сфере.** Если компактное связное односвязное риманово многообразие $M_n$ размерности $n>2$ с постоянной скалярной кривизной допускает неизометрическое проективное движение, то оно изометрично сфере радиуса $\sqrt{n(n-1)/K}$ [384], см. также [383].

Пусть $M$ — компактное связное риманово многообразие размерности $n\geqslant 3$, $X=a^i\partial/\partial x^i$ — векторное поле на $M$. Порядком нуля $0(X,x)$ векторного поля $X$ в точке $x\in M$ называется наименьший из порядков нулей функций $a^i$ в точке $x$. Если существуют проективное движение $X$ на $M$ и точка $x\in M$, для которой $0(X,x)=2$, то $M$ проективно эквивалентно либо сфере, либо проективному пространству [314].

Ряд интегральных неравенств, содержащих проективное векторное поле и тензоры конформной и проективной кривизны односвязного ориентируемого риманова многообразия $M$ с постоянной скалярной кривизной, установила Хирамату [237], [238]. Эти неравенства превращаются в равенства, если и только если $M$ изометрично сфере.

Связное односвязное компактное риманово многообразие с параллельным тензорным полем Риччи изометрично сфере, если оно допускает неаффинное проективное векторное поле [119], [120], [121].

**4.3. Проективные преобразования специальных римановых многообразий.** Если конформно-симметрическое пространство с положительно определенной метрикой и постоянной скалярной кривизной допускает проективное движение, то оно является пространством постоянной кривизны [205].

Метрика $d(x,y)=(2c/\sqrt{n}-1)\delta(x,y)$ инвариантна относительно проективных преобразований пространства Эйнштейна $V_n$ с римановым расстоянием $\delta(x,y)$, $x$, $y\in V_n$, и формой Риччи $R_{ij}dx^idx^j=-c^2g_{ij}dx^idx^j$. Отсюда, в частности, следует, что проективные преобразования в пространствах Эйнштейна отрицательной кривизны есть изометрии [265].

Любое инфинитезимальное проективное преобразование $X$ в проективно-рекуррентном пространстве $W_n$ непостоянной кривизны является аффинным. Если $W_n$ — пространство Эйнштейна с ненулевой скалярной кривизной, то $X$ есть инфинитезимальная изометрия [14].

Если пространство-время (четырехмерное лоренцево пространство) допускает два независимых параллельных векторных поля, то оно является рекуррентным или симметрическим пространством. Максимальная алгебра Ли инфинитезимальных проективных преобразований в этом пространстве состоит из аффинных векторных полей [16].

Всякое проективное векторное поле $X$ в пространстве Эйнштейна $G_n$ $(n>2)$ с нулевой скалярной кривизной является коллинеацией кривизны (см. п. 6.6). Если проективное поле $X$ не является аффинным, то в $G_n$ существует параллельное векторное поле [14].

Ямаути [382] нашел необходимые условия, при которых компактное риманово многообразие $M$ постоянной скалярной кривизны допускает неизометрическое проективное векторное поле, и достаточные условия, при которых это поле сводится к киллингову векторному полю.

Конопка [269] доказал для «сепаратно эйнштейновых» пространств $V_n: R_{ij}=\alpha g_{ij}+\beta f_{ij}$, $f_j{}^i=\pm\delta_j{}^i$, $f_{ij}=g_{ik}f_j{}^k$, следующую теорему: если $\alpha^2\neq\beta^2$, то п. д. в $V_n$ есть а. д.

Дезж [181] исследовал специальные инфинитезимальные проективные преобразования не Риччи-плоских римановых пространств, удовлетворяющих условию

$$R_{ij,k}-R_{ik,j}=\frac{1}{2(n-1)}(g_{ij}R_{,k}-g_{ik}R_{,j}).$$

Пусть $M$ — многообразие с римановой метрикой $g$ и метрической связностью $\nabla: (\Delta_X g)(Y,Z)=0$, $P_0(M,\nabla)$ и $P_0(M,\tau)$ — группы проективных преобразований в $M$, сохраняющие тензорное поле кручения $S_{jk}{}^i$ и 1-форму $\tau_i=S_{ir}{}^r$ соответственно. Акбар-Заде и Кути [122] нашли условия, при которых группы преобразований $P_0(M, \nabla)$ и $P_0(M, \tau)$ компактных римановых многообразий сводятся к группам аффинных преобразований или группам изометрий.

Й. Микеш [76] привел пример нетривиального проективного преобразования «в целом» $n$-мерной сферы, которая является компактным ориентируемым римановым пространством.

По поводу действия проективных и аффинных групп на их алгебрах Ли и свойств соответствующих орбит см. [321].

**4.4. Специальные проективные векторные поля.** Проективные преобразования $n$-мерного риманова пространства $V_n$, которые оставляют на месте некоторую точку $x\in V_n$ и сохраняют все направления в этой точке, исследовал Татибана [363].

Специальное субпроективное движение (с. п. д.) $X$ в $V_n$

преобразует каждую изотропную геодезическую в геодезическую. $X$ есть с. п. д., если и только если

$$L_X\Gamma^i_{jk}=2p_{(j}\delta_{k)}{}^i+q^i g_{jk}.$$

Наибольшее возможное число $n^2+3n+1$ линейно независимых с. п. д. достигается в плоском пространстве [170].

Такано и Окумура ввели понятие об аффинных движениях конциркулярного вида и исследовали в серии статей (1961—1962 гг., см. ссылки в [40]) аффинносвязные пространства специального типа (рекуррентные, Риччи-рекуррентные и симметрические), допускающие аффинные движения конциркулярного вида. Развитием результатов Такано и Окумуры явились следующие результаты.

Если проективное векторное поле на римановом многообразии $V_n$ является конциркулярным (соответственно рекуррентным) векторным полем (см. п. 2.5), то оно называется проективным векторным полем (или проективным движением) конциркулярного (соответственно рекуррентного) вида. Так же определяются аффинные движения проективного и рекуррентного вида. Следующие три теоремы содержат решение вопроса об аффинных и проективных движениях в (севдо)римановых пространствах $V_n$ [40]:

1. Если конциркулярное векторное поле $X:\nabla X=\rho\cdot\mathrm{id}+Xd\Phi$, $d\Phi\neq 0$, является аффинным движением в $V_n$, то это поле рекуррентно ($\rho=0$; при $d\Phi=0$ $X$ есть конкуррентное векторное поле (см. п. 2.5), т. е. гомотетия).

2. Проективное движение рекуррентного вида в $V_n$ есть аффинное движение $X=\varphi D\psi$, где $D\varphi$ и $D\psi$ — параллельные векторные поля ($\nabla^2\varphi=\nabla^2\psi=0$).

3. Если $V_n$ допускает неаффинное проективное движение $X$ конциркулярного вида, то: либо а) в $V_n$ существуют параллельное ($D\rho:\nabla^2\rho=0$) и конкуррентное ($Df:\nabla^2 f=g$) векторные поля такие, что $X=\rho Df$; либо б) в $V_n$ существуют специальные конциркулярные скалярные поля $u$, $v$ ($\nabla^2 u+Kug=0$, $\nabla^2 v+Kvg=0$, $K=\mathrm{const}\neq 0$) такие, что $X=uDv$.

Эти теоремы возвращают нас к уравнениям $\nabla^2 u+Kug=0$, $\nabla^2 f=g$, $\nabla^2\varphi=0$, решения которых играют исключительную роль в возникновении групповых симметрий римановых пространств (п. 2.5). Заметим, что первое и второе уравнения определяют соответственно пространства $V(K)$ и $V(0)$ [97].

И. А. Ундалова [102] исследовала изотропные торсообразующие ($g(X,X)=0$, $\nabla X=\rho\cdot\mathrm{id}+Xa$, см. § 5) аффинные и проективные векторные поля и пришла, в частности, к выводу, что риманово пространство не может допускать неаффинных 1-параметрических проективных групп, порожденных изотропными торсообразующими векторными полями.

**4.5. Проективные преобразования лоренцевых многообразий.** Проблема определения собственно римановых пространств, допускающих (локальные) группы преобразований, сохраняющих геодезические, была сформулирована С. Ли. Ли рассматривал указанную задачу для случая поверхностей ($n=2$), однако, как пишет Фубини в предисловии к [201], «знаменитому математику не удалось решить эту проблему», названную Фубини проблемой Ли. Сам Фубини лишь вскользь коснулся проблемы Ли, записав уравнения $L_X g=h$ для метрики Лиувилля $ds^2=(u_1(x^1)-u_2(x^2))(dx^{1^2}+dx^{2^2})$ и наметив программу исследования условий интегрируемости этих уравнений [201].

В [29], [30] и др. дано полное решение проблемы Ли, т. е. определены все двумерные римановы пространства, допускающие негомотетические проективные движения, и для каждого из этих пространств — максимальная проективная алгебра Ли, включая гомотетическую и изометрическую подалгебры. В подходящих картах приведены базисные векторные поля названных алгебр Ли и их структурные соотношения.

Размерность максимальной алгебры Ли проективных преобразований в двумерном (псевдо)римановом пространстве непостоянной кривизны меньше или равна трем. Аффинная алгебра Ли состоит, самое большее, из гомотетий и ее размерность не превышает число 2. К числу максимально подвижных двумерных пространств относятся поверхности с линейным элементом

$$ds^2=\Phi^2(x^1)(e_1dx^{1^2}+e_2dx^{2^2}),\qquad (e_1,\ e_2=\pm1). \tag{4.6}$$

Заменой переменных $r=\int\Phi dx^1$, $\varphi=x^2$ форма $ds^2$ приводится к виду $ds^2=e_1dr^2+e_2\eta^2(r)d\varphi^2$ и определяет при $e_1=e_2=+1$ линейный элемент поверхности вращения, заданной уравнениями $x=\eta(r)\cos\varphi$, $y=\eta(r)\sin\varphi$, $z=\sqrt{1-\eta'^2}\,dr$ в трехмерном евклидовом пространстве с координатами $x, y, z$. При $e_1=-e_2=+1$ $ds^2$ определяет метрику двумерного пространства-времени, которую можно рассматривать как линейный элемент поверхности, вложенной с помощью уравнений

$$x=\eta(r)\operatorname{ch}\varphi,\ y=\sqrt{1-\eta'^2}\,dr,\ z=\mathrm{const},\ \tau=\eta(r)\operatorname{sh}\varphi \tag{4.7}$$

в пространство Минковского с интервалом $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-d\tau^2$. При $\eta=r=\mathrm{const}$ уравнения (4.7) определяют гиперболическое движение в спецрелятивистской динамике.

Метрика (4.6) допускает изометрию $X=\partial_2$, который соответствует линейный интеграл $e_2\Phi^2\dot{x}^2=M=\mathrm{const}$ уравнений геодезических $x_3$ ($\dot{x}^i=dx^i/ds$), определяющий при $\Phi=e^{x^1}$, $e_1=e_2=+1$ закон сохранения кинетического момента при движении в поле центральных сил.

Легко убедиться, что уравнения геодезических метрики (4.6) описывают движение лагранжевой системы с одной степенью свободы, функцией Лагранжа $L=\dot{x}^{1^2}/2-U(x^1)$ и полной энергией $E=\dot{x}^{1^2}/2+U(x^1)$, остающейся неизменной при движении частицы. При определенных условиях это движение будет колебательным (одномерный осциллятор) с периодом $T = \sqrt{2}\int\limits_{x_1^1}^{x_2^1}(E-U(x^1))^{-\frac{1}{2}}dx^1$, где $x_1^1$ и $x_2^1$ — корни уравнения $U(x^1)=E$.

Таким образом, с каждой лагранжевой системой с одной степенью свободы, потенциальной энергией $U(x^1)$ и полной энергией $E$ можно связать некоторую поверхность (4.6) с $\Phi^2 = (-\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2+8e_1e_2M^2(U-E)}/4e_1(U-E)$, $\varepsilon=0, \pm 1$, геодезические линии которой являются графиками движения системы, а первые интегралы уравнений геодезических определяют законы сохранения этой системы.

Поверхность вращения можно, следовательно, рассматривать как динамическую модель механической системы с одной степенью свободы. Так как проективное движение определяет квадратичный первый интеграл уравнений геодезических (п. 4.1), то с каждым таким движением связана сохраняющаяся величина, которая остается постоянной вдоль каждой геодезической, т. е. механический закон сохранения.

Как известно, для описания двумерных статических солитонов привлекается механическая частица — аналог (Христ, Т. Ли, Фридберг, Колеман). Если считать переменную $x$ «временем», а $\sigma$ — координатой точечной частицы с единичной массой, то уравнение, определяющее статическое солитонное решение

$$\sigma''(x)\equiv\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=+\frac{\partial u}{\partial\sigma}(x),$$

будет описывать движение частицы-аналога. В силу граничных условий ($U(\sigma)\to 0$ и $d\sigma/dx\to 0$ при $x\to\pm\infty$) полная «энергия» движения $E$, сохраняющаяся при изменении $x$, должна равняться нулю. Заменяя в приведенной выше формуле $x^1$ на $\sigma$, $s$ (длина дуги или канонический параметр геодезической) на $x$ и $U(x^1)$ на $-U(\sigma)$, получим $E=\frac{1}{2}(d\sigma/dx)^2-U(\sigma)=0$. Следовательно, каждая геодезическая $x^1=x^1(s)\equiv\sigma(x)$ на поврехности вращения (4.6) определяет статический солитон при условии, что $U(x^1(s))=(e_2M^2-\varepsilon\Phi^2)/2e_1\Phi^4\to 0$ при $s\to\pm\infty$ (геодезическая должна быть полной).

Укажем еще одно возможное приложение проблемы Ли. В теории двумерных самогравитирующих нелинейных $\sigma$-моделей групповые симметрии (изометрии и гомотетии) двумерного (риманова) кирального пространства $S_2$ используются для получения решений инстантонного и меронного типов ([63] и др.). Включение в рассмотрение полной проективной группы наряду с расширением «геометрии» кирального пространства приведет к генерации новых точных решений полевых уравнений.

Проблема определения положительно определенных римановых пространств $V^n$ размерности $n \geqslant 3$, допускающих инфинитезимальные проективные преобразования, была решена Фубини [201] и А. С. Солодовниковым [194]. Снятие условия знакоопределенности значительно усложняет задачу и требует принципиально нового подхода к ее решению. Один из таких подходов, связанный с рассмотрением алгебраической структуры производной Ли $L_X g$ метрики $g$ в направлении инфинитезимального проективного преобразования $X$, был положен в основу классификации $n$-мерных римановых пространств лоренцевой сигнатуры по алгебрам Ли проективных и аффинных движений [11]—[13], [15], [16], [25]—[28], [31], [32], [35], [123].

Инфинитезимальные проективные преобразования трехмерных лоренцевых пространств изучались Л. И. Жуковой [57]—[60]. Использованный ею подход основан на исследовании трехмерных метрик А. З. Петрова (см. [88]) с соответствующими геодезическими и существенно отличается от указанного выше подхода.

Назовем (псевдо)риманову метрику $g$ $h$-метрикой типа $\chi$, а соответствующее (псевдо)риманово пространство $M$ — $h$-пространством типа $\chi$, если в нем существует нетривиальное решение $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта (4.5). Проективное векторное поле $X$ называется проективным движением типа $\chi$ (в области $V \subseteq \subseteq M$), если билинейная форма $h = L_X g$ имеет характеристику Сегре $\chi$ (в области $V \subseteq M$). Условие лоренцевости сигнатуры сокращает число основных типов характеристики $\chi$ до трех: $\chi_\nu = \{(\nu 1 \dots 1)(1 \dots 1) \dots (1 \dots 1)\}$, $\nu = 1, 2, 3$. Метрика $h$-пространства типа $\chi_\nu$ имеет вид [26]:

$$g = \sum_{p=1}^{k} \Pi_s' (f_s - f_p)^{\nu_s} \Phi_p,$$

где $k$ — число разных собственных значений $f_1, \dots, f_k$ билинейной формы $h$, $\nu_1 = \nu$, $\nu_\alpha = 1$ при $\alpha = 2, \dots, k$; $\Phi_p$, $p = 1, \dots, k$, определяются в канонической карте $(x, U)$ вокруг каждой точки $x \in M$ следующими равенствами:

для $\nu = 1$

$$\Phi_p / _U = ds_p^2, \quad (p = 1, \dots, k); \tag{4.8}$$

для $\nu = 2$

$$e\Phi_1 |_U = 2B dx^1 dx^2 - B^2 \Sigma_1 dx^{2^2} + \\ + (r_1 - 2) \tilde{g}_{\mu_1 \rho_1} (x^2, x^{\sigma_1}) dx^{\mu_1} dx^{\rho_1}, \quad \Phi_\alpha |_U = ds_\alpha^2; \tag{4.9}$$

для $\nu = 3$

$$e\Phi_1 |_U = 2B dx^1 dx^3 + dx^{2^2} + 2(\varepsilon x^1 - B\Sigma_1) dx^2 dx^3 + \\ + \left(\varepsilon x^1 (x^1 - 2B\Sigma_1) + \frac{1}{2} B^2 (\Sigma_1^2 - \Sigma_2)\right) dx^{3^2} + \\ + (r_1 - 3) \tilde{g}_{\mu_1 \rho_1} (x^3, x^{\sigma_1}) dx^{\mu_1} dx^{\rho_1}, \tag{4.10}$$

$$\Phi_\alpha |_U = ds^2_\alpha, \quad (\alpha = 2, \ldots, k),$$

где $e = \pm 1$, $r_1, \ldots, r_k$ — кратности собственных значений $f_1, \ldots, f_k$, $r_1 + \ldots + r_k = n$; $\mu_1$, $\rho_1$, $\sigma_1 = \nu + 1, \ldots, r_1 > \nu$; $\varepsilon$ равно 0 при $r_1 > \nu$ и принимает значения 0 и 1 при $r_1 = \nu$; $\Sigma_l$ равно 0 при $k = 1$ и $\sum\limits_{\alpha=2}^{k} (f_\alpha - f_1)^{-l}$ при $k > 1$ $(l = 1, 2)$; $B$ равно 1 при $\varepsilon = 0$ и $(\nu - 1)(x^{\nu-1} + \theta(x^\nu))$ при $\varepsilon = 1$; $ds^2_p$ есть $r_p$-мерная квадратичная форма от переменных $x^{l_p}$; $f_p$ — постоянная при $r_p > \nu_p$ и функция (единственного) переменного $x^{l_p}$ при $r_p = \nu_p$ $(f_1 = \varepsilon x^\nu$ при $\nu > 1)$. В случае, если среди величин $f_p$ имеется пара комплексно сопряженных функций $f_1(x_1 + ix^2)$, $f_2(x^1 - ix^2) = \overline{f}_1$ (характеристика $\{\overline{\text{II}}(\text{I} \ldots)\}$, следует положить $\Phi_l |_U = dz^{l^2}$; $\Phi_\sigma |_U = ds^2_\sigma$ $(l = 1, 2;\ \sigma = 3, \ldots, k;\ z_1 = x^1 + ix^2 = \overline{z}^2)$.

Формулы (4.8) — (4.10) определяют все $h$-пространства лоренцевой сигнатуры. Лоренцево $h$-пространство называется $K$-пространством, если $(k+\nu-1)$-мерная присоединенная метрика

$$\overset{*}{ds}{}^2 = g_{ab} dy^a dy^b + \sum_{p=2}^{k} e_p \Pi'_s (f_s - f_p)^{\nu_s} dy^{p+\nu-1^2}, \quad (a, b = 1, \ldots \nu),$$

индуцируемая метрикой $g$ на семействах (вполне геодезических) поверхностей в $M$, имеет постоянную кривизну $K$, и обыкновенным $h$-пространством в противном случае. Формально переход к присоединенной метрике сводится к замене всех $r_p$-мерных форм $\Phi_p$ на $\nu_p$-мерные формы. Если $r_p = \nu_p$ для всех $p = 1, \ldots$ $\ldots, k$, т. е. если все базисы элементарных делителей $\lambda$-матрицы $(h - \lambda g)$ простые, то присоединенная метрика совпадает с исходной. Если $r_p > \nu_p$ для всех $p = 1, \ldots, k$, т. е. если все базисы элементарных делителей кратные, то $\overset{*}{ds}{}^2$ имеет нулевую кривизну.

Если $(M, g)$ — обыкновенное $h$-пространство и $a$ — параллельная $(\nabla a = 0)$ симметричная билинейная форма на $M$, то $a = cg$, где $c$ — постоянная. Отсюда следует, что всякое аффинное движение в обыкновенном $h$-пространстве есть инфинитезимальная гомотетия.

Проективная алгебра Ли в обыкновенном $h$-пространстве либо совпадает с подалгеброй инфинитезимальных гомотетий, либо превосходит ее по размерности на единицу.

Для любого проективного движения $X$ в $K$-пространстве выполняется условие

$$KL_X g + \nabla^2 \varphi = 0, \quad (2(n+1)\varphi = \operatorname{tr} \hat{h}, \quad h = L_X g),$$

где $\hat{h}$ — эндоморфизм, соответствующий билинейной форме $h$. В силу этого условия каждое аффинное движение в $K$-пространстве при $K \neq 0$ есть инфинитезимальная изометрия и каждое проективное движение в $K$-пространстве с $K=0$ есть коллинеация кривизны (п. 6.6).

Максимальная проективная алгебра Ли $p_r$ в $K$-пространстве содержит аффинную (фактически изометрическую) подалгебру Ли $a_{r-\tau}$, где $\tau$ — размерность линейного пространства решений ковариантного дифференциального уравнения третьего порядка с неизвестной функцией $\varphi$:

$$\nabla^3\varphi(X, Y, Z)+K(2g(X, Y)Z\varphi+g(Y, Z)X\varphi+g(X, Z)Y\varphi)=0$$

$(X, Y, Z \in TM)$. Если лоренцево или собственно риманово пространство $V^n$ допускает непостоянное решение этого уравнения с $K \neq 0$, то это пространство есть $V(K)$ (в частности, пространство постоянной кривизны $K$). Если $V^n$ допускает решение уравнения (4.5), для которого $\nabla^2\varphi=0$, $\varphi \neq \mathrm{const}$, то это пространство есть $V(0)$. Следовательно, каждое $K$-пространство, допускающее неаффинное инфинитезимальное проективное преобразование, есть $V(K)$.

В [35] определены все обыкновенные $h$-пространства, допускающие негомотетические проективные движения, и для каждого из них указана максимальная проективная алгебра Ли вместе с ее базисными векторными полями и структурными соотношениями. Подобная задача решена также для пространств $V(K)$ лоренцевой сигнатуры.

Полученные результаты дают решение важной геометрической проблемы, сформулированной С. Ли более ста лет назад, для тех римановых пространств, которые находят непосредственные приложения в физике (супергравитация, теория суперструн, теории Калуцы—Клейна, калибровочные поля и др.), при этом генераторы и структурные константы алгебр Ли входят в лагранжианы и определяют физические эффекты.

**4.6. Группы почти проективных преобразований.** Рассмотрим риманово пространство $M$, в котором задано поле конусов, определенных в каждой точке $x \in M$ уравнением $a_{ij}u^iu^j=0$. Пусть $\gamma$ — геодезическая, направление касательной к которой принадлежит в каждой точке $x \in \gamma$ соответствующему конусу. Совокупность всех таких геодезических называется квадратичным комплексом геодезических. Если рассматривается совокупность геодезических с направлениями, принадлежащими в каждой точке плоскости $a_iu^i=0$, то говорят о линейном комплексе геодезических. В любом пространстве с квадратичным первым интегралом уравнений геодезических существует квадратичный комплекс геодезических. Каждое киллингово векторное поле в $M$ задает линейный комплекс геодезических.

Пусть даны два пространства аффинной связности $A_n$, $A_n'$ и отображение $f: A_n \to A_n'$. Если $f$ сохраняет некоторый комплекс геодезических $K$, т. е. если $f$ является почти геодезическим отображением, то комплекс $K$ должен быть либо линейным, либо квадратичным (В. М. Чернышенко, 1956 г.). Задача о почти геодезических отображениях четырехмерных лоренцевых пространств оказалась тесно связанной с проблемой моделирования физических полей (А. З. Петров) и была решена в диссертации В. А. Добровольского (Казань, 1970 г.) для четырехмерного пространства Минковского (псевдоевклидово пространство лоренцевой сигнатуры.)

Пусть $(M, g)$ — (псевдо)риманово многообразие с комплексом геодезических $K$. Диффеоморфизм $f$ многообразия $M$ на себя, который отображает каждую геодезическую $\gamma \in K$ в геодезическую $f(\gamma) \in K$, называется почти проективным преобразованием. Ясно, что почти проективные преобразования образуют группу.

Векторное поле $X$ на $M$ называется инфинитезимальным почти проективным преобразованием, или почти проективным движением, или также почти проективным векторным полем, если локальная 1-параметрическая группа, порожденная полем $X$ в окрестности каждой точки $x \in M$, состоит из почти проективных преобразований. $X$ есть почти проективное движение в $M$, если и только если

$$\begin{gathered}\nabla_Y A_X = R(X, Y) + Yp + p(Y) \cdot \mathrm{id} + Vq(X, Y), \\ L_X q = \sigma q, \quad S(\nabla q - Nq) = 0\end{gathered} \tag{4.11}$$

для квадратичного комплекса $q_{ij} u^i u^j = 0$, всех векторных полей $Y$, некоторых 1-форм $p$, $N$, векторного поля $V$ и скалярного поля $\sigma$ или

$$\begin{gathered}\nabla_Y A_X = R(X, Y) + Yp + p(Y) \cdot \mathrm{id} + l(X) BY + l(Y) BX, \\ L_X l = \sigma l, \quad S(\nabla l - Nl) = 0\end{gathered} \tag{4.12}$$

для линейного комплекса $l_i u^i = 0$, всех векторных полей $Y$, некоторых 1-форм $p$, $N$, эндоморфизма $B$ и скалярного поля $\sigma$. Здесь $A_X$ — производная $L_X - \nabla_X$, $S$ — оператор симметризации [18].

Из приведенных уравнений следует, что почти проективные движения, сохраняющие квадратичный комплекс геодезических (п. п. к.), включают как частные либо предельные случаи произвольные аффинные ($p = q = 0$), проективные ($q = 0$) и конформные ($q = g$, $p = -v = \frac{1}{2}\, d\sigma$) движения ($v$ — 1-форма, сопряженная векторному полю $V$ относительно метрики $g$).

Для того чтобы п. п. к. $X$ было конформным движением, необходимо и достаточно, чтобы оно сохраняло комплекс изотропных геодезических ($g_{ij} u^i u^j = 0$). Ср. [170, п. 4.4].

Если $X$ и $Y$ — инфинитезимальные почти проективные преобразования, сохраняющие комплекс геодезических $K$, то их скобка Ли $[X, Y]$ обладает тем же свойством. Поэтому множество всех инфинитезимальных почти проективных преобразований в $M$, сохраняющих комплекс геодезических $K$, обозначаемое $pp(M)$, образует алгебру Ли, конечномерную в случае квадратичного комплекса ($ppq(M)$) и бесконечномерную в случае линейного комплекса ($ppl(M)$). Подмножество в $ppq(M)$, состоящее из всех полных векторных полей, образует алгебру Ли группы Ли $PPQ(M)$ почти проективных преобразований в $M$, сохраняющих квадратичный комплекс геодезических.

Если $p=0$ в уравнениях (4.11) или (4.12), то инфинитезимальное почти проективное преобразование называется почти аффинным. Множество всех почти аффинных преобразований образует подгруппу $PA(M)$ группы $PP(M)$ почти проективных преобразований в $M$. Почти проективные преобразования $f$, выделенные условием $f^*q=q$ (или $f^*l=l$), также порождают подгруппу почти проективной группы $PP(M)$, называемую изогруппой. Мы видим, что почти проективная группа обладает богатой структурой.

При (почти) проективных отображениях конформная группа переходит в почти проективную группу [18], [20], [21].

В псевдоевклидовом пространстве $E_n$, $n\geqslant 4$, каждое п. п. к. является специальным бесконечно малым почти геодезическим преобразованием III типа в смысле Н. С. Синюкова [94], [95], т. е. преобразованием, которое переводит каждую геодезическую в почти геодезическую.

Об алгебрах Ли почти проективных преобразований псевдоевклидовых пространств и пространств де Ситтера см. [38], [39]. Исследованию почти проективных преобразований четырехмерных лоренцевых пространств посвящена диссертация А. М. Мухамедова (Казань, 1980 г.). См. также [22] и [83].

Литературное обозрение к § 4.

Аминова А. В. [11]—[16], [18]—[23], [25]—[36]; Аминова А. В., Мухамедов А. М. [38], [39]; Аминова А. В., Тогулева Т. П. [40]; Жукова Л. И. [57]—[60]; Микеш Й. [76]; Мухамедов А. М. [83]; Синюков Н. С. [94], [95]; Солодовников А. С. [97]; Ундалова И. А. [102]; Akbar—Zadeh Hassan, Couty Raymond [119]—[122]; Aminova A. V. [123], [125]; Collinson C. D. [170]; Deszcz R. [181]; Fubini G. [201]; Giodek E. [205]; Hiramatu Hitosi [237], [238]; Iwai Toshihiro [250]; Kobayashi Shoshichi [265]; Konopka C. [269]; Nagano Tadashi, Ochiai Takushiro [314]; Papuc Dan I., Popescu I. P. [321]; Sanno B. [334]; Shetty D. J. [341]; Tachibana Shun—ichi [363]; Yamauchi Kazunari [382]—[386]; Yorozu Shinsuke [397].

## § 5. ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ

Пусть $\Gamma$ — связность в расслоении $P(M, G)$ с канонической проекцией $\pi$, $C(x)$ — множество петель в точке $x\in M$, $C_0(x)$ — подмножество в $C(x)$, состоящее из петель, гомотопных нулю.

Для каждой петли $\tau \in C(x)$ параллельный перенос вдоль $\tau$ есть изоморфизм слоя $\pi^{-1}(x)$ на себя. Множество $\Phi_x(M) \equiv \Phi_x$ всех таких изоморфизмов называется группой голономии связности Г с опорной точкой $x$ (или точкой отсчета $x$), а подгруппа $\Phi_x{}^0(M) \equiv \Phi_x{}^0$ группы голономии, состоящая из параллельных переносов вдоль петель, гомотопных нулю, — суженной (или ограниченной) группой голономии связности Г с опорной точкой $x$.

Пусть Г — линейная связность на многообразии $M$, $\psi_x(M)$ — группа голономии связности Г с опорной точкой $x$. Пересечение $\psi_x{}^* = \bigcap\limits_{U \in x} \psi_x(U)$ подгрупп $\psi_x(U)$ группы $\varphi_x(M)$ для всевозможных связных открытых окрестностей $U$, содержащих точку $x$, является подгруппой группы $\psi_x(M)$. Эта подгруппа называется локальной группой голономии связности Г в точке $x$.

Для любых векторов $X$, $Y$, $V_1, \ldots, V_h$ в точке $x$ тензоры в точке $x$

$$R^l_{jkl} X^k Y^l, \ \ldots, \ V^{h_k}_k \ldots V^{h_1}_1 \nabla_{h_k} \ldots \nabla_{h_1} R^l_{jkl}\, x^k y^l, \ \ldots,$$

де $R^l_{jkl}$ — компоненты тензорного поля кривизны, а $\nabla_i$ означает ковариантное дифференцирование по $x^i$ относительно связности Г, определяют элементы алгебры Ли $g_x{}^*$ локальной группы голономии $\psi_x{}^*$ связности Г в точке $x$. Эти элементы при $k=0, 1, \ldots$ порождают подалгебру $g_x{}'$ алгебры Ли $g_x{}^*$. Следовательно, существует связная подгруппа $\Psi_x{}'$ группы $\psi_x{}^*$, алгебра Ли которой совпадает с $g_x{}'$. Связная подгруппа Ли $\psi_x{}'$ группы $\varphi_x{}^*$, порожденная подалгеброй $g_x{}'$, называется инфинитезимальной группой голономии в точке $x$.

Группы голономии $\psi_x$, $\psi_x{}^*$ и $\Psi_x{}'$ линейной связности Г на многообразии $M$ реализуются в точке $x \in M$ как группы линейных преобразований касательного пространства $T_x(M)$ в этой точке.

В. В. Астраханцев [41] определил подалгебры Ли алгебры Ли группы Лоренца, которые могут быть алгебрами Ли группы голономии четырехмерных симметрических лоренцевых пространств и четырехмерных лоренцевых пространств с нулевым тензором Риччи, и перечислил все $n$-мерные односвязные симметрические лоренцевы пространства со слабо неприводимой коммутативной группой голономии. Алгебра Ли инфинитезимальных изометрий этих пространств является собственной подалгеброй Ли алгебры Ли аффинных движений [42].

Совершенной группой голономии называется группа голономии, алгебра Ли которой порождается всеми эндоморфизмами в $T_x(M)$ вида $R(X, Y)$, где $X, Y \in T_x M$.

В. Р. Кайгородов [64] доказал, что четырехмерные полусимметрические $((\nabla_{[m_2} \nabla_{m_1]} R)(X, Y) = 0)$ конформно плоские лоренцевы пространства $V_4$ с совершенной группой голономии и ненулевой скалярной кривизной приводимы: $V_4=V_3\times R_1$, где $V_3$ есть пространство постоянной кривизны.

Для любого киллингова векторного поля $X$ с инволютивным ортогональным распределением на полном римановом многообразии $M$ оператор $A_X=L_X-\nabla_X$ в точке $x\in M$ принадлежит алгебре Ли группы голономии в этой точке. По поводу условий, при которых оператор $A_X$ принадлежит алгебре Ли локальной (инфинитезимальной) группы голономии, см. [174].

Если полное некомпактное локально неприводимое риманово многообразие $M$ допускает неголономное киллингово векторное поле $X$, т. е. поле $X$, для которого $A_X$ не принадлежит алгебре Ли группы голономии, то эта алгебра Ли есть $su(m)$ или $sp(k)$, где $4k=m=\dim M$. Киллингово поле $X$ голономно, если его норма ограничена [176].

О необходимых условиях существования неголономного киллингова векторного поля на полном римановом многообразии см. [175].

Брайант [152], [153] доказал существование семи- и восьмимерных римановых многообразий, для которых группами голономии являются соответственно особая группа $G_2$ и спинорная группа Spin (7), и привел примеры таких многообразий. О группах Ли $G_2$ и Spin(7) как группах голономии см. также [294].

Если риманово многообразие $V_n (n>1)$, погруженное без кручения в евклидово пространство $E_{n+2}$, не распадается в прямое произведение римановых многообразий, то его группа голономии совпадает с полной ортогональной группой [374].

Пусть $(V_n, g)$—риманово многообразие,

$$E_{klij}=R_{klij}-\frac{R}{n(n-1)}(g_{li}g_{jk}-g_{ik}g_{jl}), \quad \varepsilon^2=\frac{1}{4}E_{klij}E^{klij},$$

$R$—скалярная кривизна. Если существует точка $x\in V_n$ такая, что $\varepsilon(x)<\frac{|R(x)|}{n(n-1)}$, то суженная группа голономии максимальна: $\psi^0(V_n)=SO(n)$.

Об определении группы слабой голономии и семимерных связных римановых многообразиях с группой голономии $G_2$ см. [209] и [295]. По поводу сингулярной группы голономии см. [167].

Векторное поле $X$ на римановом многообразии $M$ называется торсообразующим векторным полем, если $\nabla_Y X=\rho Y+a(Y)X$ для скалярного поля $\rho$, поля 1-формы $a$ и всех векторных полей $Y$ на $M$. Торсообразующие и конциркулярные (см. п. 2.5) векторные поля в специальных римановых пространствах (проективно-рекуррентных и т. п.) с 1-параметрической группой голономии исследовал Ставре [352].

Относительно локальной группы голономии в касательном расслоении с метрикой Сасаки см. [276].

Литературное обозрение к § 5.

Алексеевский Д. В. [6], Астраханцев В. В. [41], [42]; Грибков И. В. [50]; Кайгородов В. Р. [64]; Bryant R. L. [152], [153]; Castellani L., D'Auria R., Fre P., Nieuwenhuizen P. van [163]; Clarke C. J. S. [167]; Curras—Bosch C. [174]—[176]; Gray A. [209]; Hall G. S. [217]; Hall G. S., Costa J. da [219]; Harris R. A., Zund J. D. [222]; Ihrig E [243]; Liu—Mu—Chou [276]; Marchiafava S. [294], [295]; Stavre P. [352]; Vranceanu G. [374].

## § 6. ПРИЛОЖЕНИЯ

Теоремы А. З. Петрова [88] о трех типах полей тяготения и разработанная им и учениками его школы классификация полей тяготения по группам симметрий в форме изометрических (А. З. Петров, В. Р. Кайгородов, 1963 г.), конформных (Р. Ф. Билялов, 1963 г.), проективных и аффинных (А. В. Аминова, 1971 г.) движений стали основой программы поиска точных решений уравнений Эйнштейна в общей теории относительности (ОТО) и положили начало множеству работ, в которых физические свойства материальных систем, а также гравитационного, электромагнитного и других физических полей, переносящих взаимодействия, определялись группами автоморфизмов объектов геометрической или физической природы.

Наибольшее число работ такого рода связано с изометриями и конформными преобразованиями пространственно-временных многообразий. В последнее время в эту схему все чаще включаются гомотетии и аффинные преобразования.

**6.1. Изометрии.** Финлей и Плебанский [197] получили точные решения для спинорного поля в классе комплексных пространств-времен с самодуальной конформной кривизной и киллинговыми векторными полями (см. также [198], [199], [146]).

Статическая сферически симметричная метрика с шестью независимыми киллинговыми векторными полями соответствует однородному распределению масс по всему пространству [327], [144].

Однородная космологическая модель — это четырехмерное лоренцево пространство (пространство—время), которое допускает 3-параметрическую группу движений с пространственно-подобными трехмерными орбитами и удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости. Развитая С. П. Новиковым [84] и О. И. Богоявленским, Новиковым [44] качественная теория однородных космологических моделей привела, в частности, к выводу о необратимости свойств системы на произвольных ранних стадиях эволюции и по-новому поставила вопрос о типичных начальных состояниях расширяющейся Вселенной. См. также [288].

Глобальному анализу пространств Эйнштейна с двумерной абелевой группой движений посвящена работа М. Е. Осиновского и О. А. Тесленко [86]. Глобальные свойства алгебраически специальных пространств Эйнштейна с 3-параметрическими группами движений исследовал Сиклос [343].

Бригиншоу [149] доказал, что присоединенная ортохронная группа Лоренца совпадает с причинной группой, т. е. с группой преобразований, сохраняющих причинные отношения между точками пространства-времени.

Аштекар и Шмидт [129] использовали результаты глобального исследования изометрий для описания глобальных свойств решений уравнений Эйнштейна, удовлетворяющих асимптотическим условиям на изотропной бесконечности.

О группах изометрий в асимптотически плоских пространствах-временах см. также Аштекар и Хантхопулос [130]. Аштекар и Магнон—Аштекар [128] предложили новый способ исследования структур алгебр Ли киллинговых векторных полей. Этот способ, по мнению авторов, может быть успешно использован в ОТО.

Обзор известных (к 1975 г.) результатов по геометрии в целом четырехмерных лоренцевых многообразий содержится в статье Флаерти [200].

Харрис и Зунд [226], [227] исследовали метрики Осиновского с группами движений большой размерности и метрики однородных пространств, найденные в 1963 г. Г. И. Кручковичем.

Изометрические движения идеальной жидкости рассмотрел Р. А. Даишев [52], [53].

Киллинговым векторным полям в пространствах-временах с нелинейными скалярными полями посвящена работа Г. Г. Иванова [61] (см. также [62], [63]).

В ряде работ исследуются группы (алгебры Ли) движений специальных лоренцевых пространств — вакуумных пространств Эйнштейна со специальными конгруэнциями геодезических [259]; пространств-времен Переса [315] и Казнера [225]; стационарных осесимметрических пространств-времен с идеальной и неидеальной жидкостью [263], [228]); $n$-мерных квазиортогональных пространств-времен [46]; пространств-времен с тензором кривизны специальной структуры [108] и т. д.

О топологии и изометриях Вселенной де Ситтера см. [79].

«Внутренние» изометрии, действующие на 3-мерных подпространствах пространства-времени, исследовали Зафрон [360] и Мартинец, Санц [299].

Спинорные поля $\Psi$, обладающие той же группой симметрий ($\delta\Psi=0$), что и заданное гравитационное поле с группой изометрий, рассмотрел Хенно [232].

Колассис [268] исследовал влияние киллинговых векторных полей на нейтринное поле, подчиняющееся системе уравнений

Эйнштейна—Вейля. По поводу нейтринного электровакуума с абелевой группой движений см. [93].

Изометриям и электромагнитным полям посвящены работы Дебнея [179] и Дуггала [184] (совместное рассмотрение уравнений Эйнштейна—Максвелла и киллинговых векторных полей); П. И. Шушпанова [116] (получение законов электродинамики и оптики из алгебры Ли пространственно-временных изометрий); Эрнста и Плебанского [194] (киллинговы векторные поля и формулировка теории Эйнштейна—Максвелла в терминах комплексных потенциалов Эрнста); Паскуа [322] (нахождение решений уравнений Эйнштейна—Максвелла в пространстве с 7-мерной группой изометрий); Вулея [378] и др.

Точные решения единых несимметричных теорий поля Эйнштейна, Боннора и Шрёдингера в пространстве с изометриями найдены А. В. Аминовой и Ю. В. Монаховым [37].

Об изометриях черной дыры см. [173]. Механизм Креммера—Шерка спонтанной компактификации, в котором калибровочные поля сопоставляются киллинговым векторным полям симметрического пространства, обсуждается Д. В. Волковым, Д. П. Сорокиным и В. И. Ткачом в [45].

Об объединении внутренних и внешних (пространственно-временных) симметрий в рамках группы изометрий плоского пространства, в которое локально погружается пространство-время, см. [290].

Торрес [369] использовал изотропные струны и их комплексификацию для нахождения киллинговых, гомотетических и конформных векторных полей в алгебраически специальных пространствах-временах.

Формулировка размерной редукции в $d+n$-мерных пространствах-временах, допускающих $n$ коммутирующих киллинговых векторных полей, предложена Мансури и Виттеном в [292].

Криш [272] использовал киллинговы векторные поля для генерации новых точных решений уравнений Эйнштейна.

Керстен и Мартини [260] доказали, что условие самодуальности $SU(3)$ инвариантной янг-миллсовской теории можно записать в виде уравнения гармонического отображения пространства-времени в 8-мерное риманово пространство, и нашли 16 киллинговых векторных полей в этом пространстве.

О киллинговых векторных полях и калибровочных теориях гравитации см. [220], [221] и [349].

Манкриф [311] показал, что пространство-время является линеаризационно устойчивым, если и только если оно не допускает глобальных киллинговых векторных полей.

Арчидьяконо [127] использовал группу изометрий пространства де Ситтера в качестве фундаментальной группы для построения «проективной» теории относительности в духе Клейна и Фантапье.

Соотношения между основными уравнениями теории упругости, термодинамики и электродинамики, с одной стороны, и нелинейной последовательностью Спенсера $G_1 \subset G_2 \subset G_3$, где $G_1$ — группа Пуанкаре, $G_2$ — группа Вейля и $G_3$ — конформная группа в пространстве Минковского, с другой стороны, установлены Поммаре [325].

Понятия о «киллинговых» векторных полях в калибровочной суперсимметричной теории и связанной с этими полями «максимальной суперсимметрии» ввел Канненберг [252]. Он показал, что некоторые свойства обычных киллинговых векторных полей могут быть распространены на вновь определенные поля. См. также [190], [230], [231], [244], [248], [256], [298], [309], [316], [350] и [359].

**6.2. Конформные преобразования.** Метод получения точных решений уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса вязкой жидкости путем конформного преобразования известного вакуумного решения предложены Каро и Масом [162].

Вакуумное решение уравнений Эйнштейна с космологическим членом и собственно конформным векторным полем является либо деситтеровским, либо антидеситтеровским в зависимости от знака космологической постоянной [203].

О сферически симметричных решениях уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости и конформным векторным полем см. [234], [233], а также [161].

Маартенс и Масон [287], [303] использовали конформное векторное поле для исследования кинетических и динамических свойств анизотропной жидкости. Они показали, в частности, что специальное конформное движение $X: L_x g = 2\psi g$, $\nabla^2\psi = 0$, т. е. конциркулярное движение (п. 2.5) сохраняет линии тока жидкости (см. также [304]). О решениях уравнений Эйнштейна—Максвелла с источником — идеальной жидкостью и конформным вектроным полем см. [375].

Конциркулярные векторные поля определяют во Вселенной де Ситтера $S$ конгруэнции геодезических, каждая из которых является траекторией одной конформной (конциркулярной) и пяти проективных 1-параметрических групп. Если геодезическая времениподобна, то ее можно рассматривать как мировую линию свободной частицы. Времениподобные конциркулярные траектории в $S$ определяют мировые линии разбегающихся или сближающихся галактик, подчиняющихся гипотезе Вейля и близких по своему поведению к реальным галактикам Вселенной [19].

Если конформно-симметрическое пространство-время допускает конформное движение, то оно принадлежит к типам $O$ или $N$ Петрова и при некоторых условиях описывает гравитационные волны с параллельными лучами [339].

Синзинкайо [346] исследовал подгруппы группы конформных преобразований конформно-плоского пространства и нашел решения уравнений Эйнштейна и Эйнштейна—Янга—Миллса с $SU(2)$ янг-миллсовским полем в качестве источника гравитационного поля (см. также [147]).

Калибровочные теории с группой конформных преобразований пространства Минковского рассмотрены Лордом и Госвами [279], [280].

Катцин и Левин [255] доказали, что с помощью конформного движения и калибровочных преобразований можно получить закон сохранения заряда в конформно-плоском пространстве.

Мореши и Спарлинг [312] использовали конформные симметрии для изучения обобщенных теорий Калуцы—Клейна.

Песса [323] построил новую единую теорию электромагнитного и гравитационного полей, основанную на конформной группе.

Хуссин и Синзинкайо [24] исплоьзовали пространственно-временные конформные векторные поля для определения констант движения системы заряженных частиц со спином 1/2, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем, и привели пример магнитного монополя.

Бурде, Патера, Перрин и Винтернитц [154] нашли все подалгебры 10-мерной алгебры Ли $opt$ (3, 1) и все замкнутые подгруппы «оптической» группы $Opt$ (3, 1)-подгруппы группы конформных преобразований пространства Минковского, используемой в конформно инвариантных физических теориях.

Определению подгрупп конформной группы $O(3, 1)$, приводящих к редуцированной суперсимметрии в рамках $N=1$ суперсимметричной янг-миллсовской теории, посвящена работа Легара [273].

Барут [135] рассмотрел два аспекта конформной группы — как группы кинематических симметрий пространства-времени и как динамической группы, действующей на внутренние координаты покоящейся квантовой системы. См. также [137], [156], [229], [297].

Отметим применение группы конформных преобразований к исследованию дифференциальных уравнений [110], [296], а также к звездной динамике и сейсмике [49].

**6.3. Гомотетии.** Риччи-плоское пространство-время, допускающее времениподобное собственное гомотетическое движение с ортогональным семейством гиперповерхностей, есть пространство Минковского [342].

Инфинитезимальные гомотетии в вакуумных пространствах Эйнштейна детально исследовали Халфорд [214]; Халфорд и Керр [215]; Макинтош [305], [306].

Эрдлей [187], [188] изучил геометрию и динамику пространственно-гомотетических космологических моделей, т. е. пространственно-временных многообразий с группой гомотетий $H_3$, транзитивно действующей на пространственноподобных гиперповерхностях.

Точные решения уравнений Эйнштейна — Максвелла для заряженной идеальной жидкости найдены Вайнрайтом и Яремовичем [376] при условии существования инфинитезимальной гомотетии в пространстве-времени.

Коллинсон [171] доказал, что вакуумная метрика типа Петрова $N$ с вращающимися геодезическими лучами не допускает алгебру Ли инфинитезимальных гомотетий размерности $r>2$.

Мошетти [313] рассмотрел пространство-время с идеальной жидкостью в качестве источника гравитационного поля, в котором распространяется ударная волна. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линейная комбинация векторов, нормального и касательного к фронту ударной волны, была вектором гомотетического движения.

Холл [218] доказал, что неподвижные точки 1-параметрической группы Ли гомотетий связаны с сингулярностями пространства-времени.

О вакуумных решениях уравнений Эйнштейна и инфинитезимальных гомотетиях см. [141].

**6.4. Аффинные и проективные преобразования.** Аффинные преобразования пространств-времен Робертсона—Уолкера с линейным элементом

$$ds^2=dt^2-R^2(t)[dr^2/(1-kr^2)+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2]$$

исследовали Бедран, Леше [138] и Маартенс [286].

Коллинсон [172] доказал, что не пустое ($R_{ij}\neq 0$) пространство-время Робертсона — Уолкера, допускающее собственно аффинное движение $X$ ($L_X g\neq cg$), является статическим.

Холл и Коста [219] рассмотрели неподвижные точки аффинных преобразований в пространствах-временах и связь этих преобразований с группами голономии.

Аффинные преобразования в рамках геометрии суперпространств и суперсимметричных теорий исследовали Туккер [370] и Нееман, Шерри [317].

Об аффинной группе, «деформированной» ее подгруппой, и уравнениях Эйнштейна см. [348].

Иваи [250] указал приложения к ньютоновской и релятивистской динамическим системам лифтов инфинитезимальных проективных преобразований в касательное расслоение.

Условие существования 1-параметрической почти проективной группы в приводимом поле тяготения автоматически приводит к точным решениям уравнений Эйнштейна — Максвелла в пустоте (пространства электровакуума) [22].

**6.5. Группы голономии.** Харрис и Зунд [222] исследовали физический смысл семнадцати четырехмерных метрик Дюбурдье, допускающих группы голономии. Часть этих метрик описывает распространение гравитационного и электромагнитного излучений.

Ириг [243] показал, что связь между группой голономии пространства-времени $M$ и изотропным рекуррентным векторным полем на $M$ позволяет при некоторых дополнительных ограничениях решить вопрос об однозначности определения метрического тензора $g_{ij}$ по заданному тензору энергии-импульса $T_i{}^j$. О связи группы голономии лоренцевых пространств с рекуррентными тензорными полями см. также [6] и [64].

В работе Норриса и Дэвиса [318] понятие инфинитезимальной группы голономии используется для построения калибровочной теории гравитации.

О группах голономии в $d=11$ супергравитации см. [163]. См. также [217].

**6.6. Коллинеации кривизны, Риччи и Максвела.** Векторное поле $X$ на пространственно-временном многообразии называется коллинеацией кривизны, Риччи или Максвелла, если порождаемая этим полем локальная группа локальных преобразований сохраняет тензор кривизны ($L_X R_{jkl}{}^i=0$), тензор Риччи ($L_X R_{ij}=0$) или тензор электромагнитного поля ($L_X F_{ij}=0$) соответственно.

Коллинеация кривизны $X=v^i\partial/\partial x^i$ генерирует в пустом пространстве-времени типа Петрова $N$ законы сохранения $[\Phi(v_j p^j)\mu p^i]_{,i}=0$, где $\mu$ — скаляр, $\Phi$ — произвольная функция, $p^i$ — вектор, совпадающий по направлению с главным изотропным направлением тензора Риччи. Коллинеация Риччи генерирует закон сохранения $[T_m{}^j v^m - \frac{1}{2} T v^j]_{,j}=0$ [169].

С помощью тетрадных методов Чинеа [166] нашел коллинеации кривизны в вакуумном пространстве-времени типа Петрова $N$.

Пусть $X_\alpha=D\varphi_\alpha$, $\alpha=1, \ldots, r$, — параллельные векторные поля в римановом пространстве, $\Phi_\alpha$ — функции от $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$. Левин [274] исследовал условия, при которых $D\Phi_\alpha$ натягивают алгебру Ли коллинеаций кривизны.

Тарик и Туппер [368] доказали, что в пространствах Эйнштейна ($R_{ij}=(1/4)g_{ij}$) и в электровакуумных пространствах типов Петрова $N$ и $O$ с неизотропным электромагнитным полем коллинеация кривизны является конформным движением.

Конформные коллинеации кривизны ($L_X g_{ij}=2\psi g_{ij}$, $L_X R_{jkl}{}^i=0$) в полях тяготения, создаваемых идеальной жидкостью, налагают условия на параметры жидкости. Дуггал и Шарма [185] нашли эти условия.

Коллинеации кривизны космологических моделей исследовали Синг и Шри Рам [345]. Шри Рам и Пандей нашли коллинеации кривизны для метрик Казнера и Нарликара [329]. См. также [216], [308].

Прасад [326] использовал коллинеации Риччи для исследования свойств теплопроводной вязкой сжимаемой заряженной жидкости с постоянными магнитной проницаемостью и электрической проводимостью.

Требуя, чтобы пространство-время с линейным элементом

$$ds^2 = e^{2P(x^4)}dx^{1^2} + e^{2Q(x^4)}dx^{2^2} + 2dx^3dx^4$$

допускало коллинеацию Риччи или коллинеацию Максвелла, Синг и Шарма [344] нашли решения уравнений Эйнштейна — Максвелла в этом пространстве. Уравнения Эйнштейна — Максвелла при условии существования конформной коллинеации Риччи исследовал Фариди [195]. См. также [132].

Дэвис и Оливер [178] рассмотрели наряду с коллинеациями Риччи и кривизны коллинеации, определенные условиями $g^{ij}L_XR_{ij}=0$, $\nabla_k(L_X\Gamma_{jh}{}^i)=0$, в полях тяготения, создаваемых идеальной жидкостью, пылевидной материей и т. д.

Обзор инвариантно-групповых методов, используемых для нахождения решений уравнений Эйнштейна, дан в статье Макинтоша [307].

Литературное обозрение к § 6

Алексеевский Д. В. [6]; Аминова А. В. [10]—[13], [15], [16], [22], [34], [36]; Аминова А. В., Монахов Ю. В. [37]; Богоявленский О. И., Новиков С. П. [44]; Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И. [45]; Волков Н. В. [46]; Голубятников В. П., Пестов Л. Н. [49]; Даишев Р. А. [52], [53]; Иванов Г. Г. [61]—[63]; Мицкевич Н. В., Сенин Ю. Е. [79]; Мухамедов А. М. [83]; Новиков С. П. [84]; Осиновский М. Е., Тесленко О. А. [86]; Сибгатуллин Н. Р. [93]; Ферзалиев А. С. [108]; Чупахин А. П. [110]; Шушпанов П. И. [116]; Aminova A. V. [123]; Arcidiacono G. [127]; Ashtekar A., Magnon—Ashtekar A. [128]; Ashtekar A., Schmidt B. G. [129]; Ashtekar A., Xanthopoulos B. C. [130]; Aulestia L., Nunez L., Patino A., Rago H., Herrera L. [132]; Barut A. O. [135]; Beckers J., Harnad J., Perroud M., Winternitz P. [137]; Bedran M. L., Leshe B. [138]; Beem J. K., Ehrlich P. E., Markvorsen S. [139], [140]; Berger B. K. [141]; Bokhari A., Qadir A. [144]; Boyer C. P., Finley J. D., III [146]; Branson T. [147]; Briginshaw A. J. [149]; Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P. [154]; Cao Rongmey [161]; Carot J., Mas Li [162]; Castellani L., D'Auria R., Fre P., Nieuwenhuisen P. van [163]; Chinea F. J. [166]; Collinson C. D. ([169]—[172]); Collinson C. D., Smith P. N. [173]; Davis W. R., Oliver D. R., Jr. [178]; Debney G. [179]; Duggal K. L. [183], [184]; Duggal K. L., Sharma R. [185]; Dyer C. C., Honig E. [186]; Eardley D. M. [187]; Eardley D., Isenberg J., Marsden J., Moncrief V. [188]; Ehrlich P. E. [190]; Ernst F. J., Plebanski J. F. [194]; Faridi A. M. [195]; Finley J. D., III, Plebanski J. F. ([197]—[199]); Flaherty F. J. [200]; Garfinkle D., Tian Qingjun [203]; Halford W. D. [214]; Halford W. D., Kerr R. P. [215]; Hall G. S. ([216]—[218]); Hall G. S., Costa J. da [219]; Halpern L. [220]; Harnad J. P., Pettitt R. B. [221];

Harris R. A., Zund J. D. ([222]—[227]); Harrison B. Kent, Stevens J. L. [228]; Havas P., Plebanski J. [229]; Held A. [230], [231]; Henneaux M. [232]; Herrera L., Jimenez J., Leal L., Ponce de Leon J., Esculpi M., Galina V. [223]; Herrera L., Ponce de Leon [234]; Hussin Z., Sinzinkayo S. [241]; Ihrig E. [243]; Ihrig E., Sen D. K. [244]; Israelit M. [248]; Iwai Toshihiro [252]; Kannenberg L. [252]; Karger A. [253]; Katzin G. H., Levine J. [255]; Kauffmann L. H. [256]; Kersten P., Martini R. [260]; Kitamura Shin-ichi [263]; Kolassis C. A. [268]; Krisch J. P. [272]; Legare M. [273]; Levine J. [274]; Lord E. A., Goswami P. [280]; Lukach B., Perjes Z., Sebestyen A. [281]; Maartens R. [286]; Maartens R., Mason D. P., Tsamparlis M. [287]; Mas Callum M. [288]; Maia M. D. [290]; Mansouri F., Witten L. [292]; Margulescu G. [296], [297]; Martin J. [298]; Martinez E., Sanz J. L. [299]; Mason D. P., Tsamparlis M. [304]; Mason D. P., Maartens R. [303]; McIntosh C. B. G. ([305]—[307]); McIntosh C. B. G., Halford W. D. [308]; Mensky M. B. [309]; Moncrief V. [311]; Moreshi O. M., Sparling G. A. [312]; Moshetti G. [313]; Navez J. [315]; Nedita N. I. [316]; Ne'eman Y., Sherry T. N. [317]; Norris L. K., Davis W. R. [318]; Pascua M. [322]; Pessa E. [323]; Pommaret J.—F. [325]; Prasad G. [326]; Qadir A., Ziad M. [327]; Quan Pham Mau [328]; Ram Shri, Pandey H. S. [329]; Sharma Ramesh [339]; Sigal R. [342]; Siklos T. C. [343]; Singh K. P., Sharma D. N. [344]; Singh K. P., Ram Shri [345]; Sinzinkayo S., Demaret J. [346]; Smrz P. K. [348], [349]; Sobczyk G. E. [350]; Szabados L. B. [359]; Szafron D. A. [360]; Tariq N., Tupper B. C. [368]; Torres del Castillo G. F. [369]; Tucker R. W. [370]; Waiwright J., Yaremovicz P. E. A. [375], [376]; Wooley M. L. [378].

## § 7. КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

Харрис и Зунд [223], [224] проверили с помощью компьютерных программ 18 классов точных решений уравнений Эйнштейна с изометриями, найденных В. Р. Кайгородовым, и уточнили результаты.

Ребукас [330] использовал систему алгебраических вычислений для исследования метрики типа Гёделя

$$ds^2=(dt+H(x)\,dy)^2-D^2(x)\,dy^2-dx^2-dz^2.$$

При $m^2=4\Omega^2$ эта метрика является конформно плоской и допускает семимерную алгебру Ли инфинитезимальных изометрий, а при $m^2-4\Omega^2\neq0$ принадлежит к типу $D$ Петрова и допускает пятимерную изометрическую алгебру Ли.

Статья Коэна [168] содержит обзор и сравнительный анализ программ, составленных для формульных вычислений в общей теории относительности. См. также [143] и [302].

Литературное обозрение к § 7

Bona C. [143]; Cohen H. I., Leringe O., Sundblad Y. [168]; Harris R. A., Zund J. D. [223], [224]; Mc Crea J. D. [302]; Reboucas M. J., Aman J. E. [330].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Абакиров Б.* Некоторые группы преобразований в римановых пространствах с полями вырождения // Исслед. по топол. и геометрии.— Фрунзе, 1985.— С. 3—6 (РЖМат, 1986, 6А963)
2. —, *Молдобаев Д.* Некоторые вопросы групп конформных преобразований римановых пространств // Сб. тр. аспирантов и соискателей. Кирг. ун-т. Сер. мат. н.— 1973.— Вып. 10.— С. 3—7 (РЖМат, 1974, 1А716)
3. *Абакирова Г. Б.* О нетранзитивных группах конформных преобразований в четырехмерных пространствах с полями вырождения // Исслед. по топол. и геометрии.— Фрунзе, 1985.— С. 6—14 (РЖМат, 1986, 6А964)
4. *Алексеевский Д. В.* Группы конформных преобразований римановых пространств // Мат. сб.— 1972.— *89*, № 2.— С. 280—296 (РЖМат, 1973, 2А586)
5. — $S^n$ и $E^n$ — единственные римановы пространства, допускающие существенное конформное преобразование // Успехи мат. наук.— 1973.— *28*, № 5.— С. 225—226 (РЖМат, 1974, 3А546)
6. — Группы голономии и рекуррентные тензорные поля в лоренцевых пространствах // Пробл. теории гравитации и элементарн. частиц.— М.: Атомиздат, 1974.— Вып. 5.— С. 5—17 (РЖМат, 1975, 3А740)
7. — Однородные римановы пространства отрицательной кривизны // Мат. сб.— 1975.— *96*.— № 1.— С. 93—117 (РЖМат, 1975, 5А713)
8. —, *Кимельфельд Б. Н.* Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Мат. заметки.— 1978.— *24*, № 1.— С. 103—110 (РЖМат, 1978, 11А748)
9. *Алыбакова Г. Б.* О нетранзитивных группах конформных преобразований четырехмерных римановых пространств с вырожденными гиперповерхностями // Исслед. по топологич. и обобщен. пространствам.— Фрунзе, 1988.— С. 63—70 (РЖМат, 1989, 2А738)
10. *Аминова А. В.* О полях тяготения, допускающих группы проективных движений // Докл. АН СССР.— 1971.— *197*, № 4.— С. 807—809 (РЖФиз, 1971, 8Б162)
11. — Проективные группы в полях тяготения. I // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1971.— Вып. 8.— С. 3—13 (РЖМат, 1972, 7А593; РЖФиз, 1972, 6Б117)
12. — Проективные группы в полях тяготения. II // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1971.— Вып. 8.— С. 14—20 (РЖМат, 1972, 7А594; РЖФиз, 1972, 6Б118)
13. — О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел // Препринт ИТФ—71—85 Р.— Киев, 1971.— 21 с.
14. — Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств // Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ.— 1974.— *6*.— С. 295—316 (РЖМат, 1975, 3А742)
15. — Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности // Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ.— 1974.— *6*.— С. 317—346 (РЖМат, 1975, 3А760)
16. — Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1975 (1976).— Вып. 10—11.— С. 9—22 (РЖМат, 1977, 11А684)
17. — О конциркулярных движениях в римановых пространствах // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1975 (1976).— Вып. 10—11.— С. 127—138 (РЖМат, 1977, 11А657)

18. — Определение бесконечно малых почти проективных преобразований // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1976.— № 13.— С. 3—9 (РЖФиз, 1978, 4Б94)
19. — Конциркулярные векторные поля и групповые симметрии в мирах постоянной кривизны // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1978.— № 14—15.— С. 4—16 (РЖМат, 1979, 2А645; РЖФиз, 1978, 11Б94)
20. — Примеры групп почти проективных движений // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1978.— № 14—15.— С. 138—142 (РЖМат, 1979, 2А584; РЖФиз, 1978, 11Б95)
21. — Группы почти проективных движений пространств аффинной связности // Изв. вузов. Мат.— 1979.— № 4.— С. 71—75 (РЖМат, 1979, 10А522)
22. — Группы почти проективных движений в приводимых полях тяготения // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1980.— № 17.— С. 3—11
23. — Об одном классе проективно-подвижных пространств. I // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1981.— № 18.— С. 3—10 (РЖМат, 1982, 6А659)
24. — О косоортогональных реперах и некоторых свойствах параллельных тензорных полей на римановых многообразиях // Изв. вузов. Мат.— 1982.— № 6.— С. 63—67 (РЖМат, 1983, 6А714)
25. — О подвижном косоортогональном репере и одном типе проективных движений римановых многообразий // Изв. вузов. Мат.— Казань, 1982.— № 9.— С. 69—74 (РЖМат, 1983, 2А597)
26. — Об уравнении Эйзенхарта и первых интегралах уравнений геодезических на римановых многообразиях лоренцевой сигнатуры // Изв. вузов. Мат.— 1983.— № 1.— С. 12—26 (РЖМат, 1983, 8А750)
27. — О проективно-групповых свойствах римановых пространств лоренцевой сигнатуры // Изв. вузов. Мат.— 1984.— № 6.— С. 10—21 (РЖМат, 1985, 1А862)
28. — Негомотетические проектные движения в обыкновенных $h$-пространствах лоренцевой сигнатуры // Изв. вузов. Мат.— 1985.— № 4.— С. 3—13 (РЖМат, 1985, 9А601)
29. — Алгебры Ли проективных движений и механические законы сохранения в двумерных мирах специальной структуры // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1985.— № 22.— С. 3—12 (РЖМат, 1986, 2А856)
30. — Поверхность вращения как динамическая модель лагранжевой системы с одной степенью свободы. Сохраняющиеся величины // Гравитация v теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1985.— № 22.— С. 12—30 (РЖМат, 1986, 2А827)
31. — Алгебры Ли проективных движений в $h$-пространствах типа $\{3\}$ // Изв. вузов. Мат.— 1987.— № 3.— С. 68—71 (РЖМат, 1987, 9А790)
32. — О проективно-групповых симметриях фридмановских миров и их многомерных обобщений — обыкновенных $h$-пространств типа $\{1(1...1)\}$ // Изв. вузов. Мат.— 1987.— № 12.— С. 66—68 (РЖМат, 1988, 5А809)
33. — Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезических отображениях римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности // Изв. вузов. Мат.— 1988.— № 1.— С. 3—13 (РЖМат, 1988, 6А810)
34. — Группы симметрий в общей теории относительности // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1988.— № 25.— С. 16—23 (РЖМат, 1988, 8А709)
35. — Алгебры Ли проективных движений обыкновенных $h$-пространств лоренцевой сигнатуры // Изв. вузов. Мат.— 1989.— № 1.— С. 3—12 (РЖМат, 1989, 7А389)
36. — О группах инвариантности уравнений движения пробных тел изотропных космологических моделей // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1989.— № 26.— С. 93—101

37. —, *Монахов Ю. В.* Теории единого несимметричного поля Эйнштейна, Боннора и Шрёдингера в пространстве с симметриями // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1977.— № 12.— С. 3—16
38. —, *Мухамедов А. М.* Группы почти проективных движений в пространстве де Ситтера // Гравитация и теория относительности.— Казань: Казан. ун-т.— 1980.— № 16.— С. 3—8 (РЖМат, 1981, 1А726)
39. —, — Группы почти проективных движений $n$-мерных (псевдо)евклидовых пространств // Изв. вузов. Мат.— 1980.— № 11.— С. 5—11 (РЖМат, 1981, 4А624).
40. —, *Тогулева Т. П.* Проективные и аффинные движения, определяемые конциркулярными векторными полями // Гравитация и теория относительн.— Казань. Казан. ун-т.— 1975 (1976).— Вып. 10—11.— С. 139—153 (РЖМат, 1977, 11А649)
41. *Астраханцев В. В.* О группах голономии четырехмерных псевдоримановых пространств // Мат. заметки.— 1971.— *9*.— С. 59—66 (РЖМат, 1971, 6А754)
42. — Псевдоримановы симметрические пространства с коммутативной группой голономии // Мат. сб.— 1973.— *90,* № 2.— С. 288—305 (РЖМат, 1973, 7А689)
43. *Билялов Р. Ф.* Конформные группы преобразований в полях тяготения // Докл. АН СССР.— 1963.— *152,* № 3.— С. 570—572.
44. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.* Качественная теория однородных космологических моделей // Тр. Семинара им. И. Г. Петровского. Моск. ун-т, 1975.— Вып. 1.— С. 7—43 (РЖМат, 1976, 2А859)
45. *Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.* Калибровочные поля в механизмах спонтанной компактификации подпространств // Теор. и мат. физ.— 1983.— *56,* № 2.— С. 171—179 (РЖМат, 1984, 1А725)
46. *Волков Н. В.* Локальная группа движений $n$-мерного квазиортогонального риманова пространства-времени // Ленингр. электротехн. ин-т.— Л., 1979.— 10 с.— Деп. в ВИНИТИ 25.12.79, № 4405—79 Деп. (РЖМат, 1980, 5А684 ДЕП)
47. *Галярский Э. И.* Двумерные группы конформной симметрии и их обобщения // Соврем. вопр. прикл. мат. и программир. Мат. науки.— Кишинев, 1979.— С. 31—36 (РЖМат, 1979, 8А750)
48. *Германов О. С.* О трехмерных римановых пространствах, допускающих группу конформных преобразований, порядок которой не выше трех // Горьк. политехн. ин-т.— Горький, 1986.— 12 с.— Библиогр. 6 назв.— Деп. в ВИНИТИ 06.06.86, № 4143-В (РЖМат, 1986, 10А763 ДЕП)
49. *Голубятников В. П., Пестов Л. Н.* О группе конформных преобразований $R^3$ в звездной динамике и обратных кинематических задачах сейсмики // Приближен. методы решения и вопр. корректности обратн. задач.— Новосибирск, 1981.— С. 35—43 (РЖМат, 1981, 11А787)
50. *Грибков И. В.* О достаточных условиях максимальности групп голономии римановых многообразий // Вестн. МГУ. Мат., мех.— 1988.— № 3.— С. 50—52 (РЖМат, 1988, 11А888)
51. *Громов Н. А.* О предельных переходах в множествах групп движений и алгебр Ли пространств постоянной кривизны // Мат. заметки.— 1982.— *32*.— № 3.— С. 355—364 (РЖМат, 1983, 1А739)
52. *Даишев Р. А.* Изометрические движения идеальной жидкости с массивным скалярным полем // Казан. ун-т.— Казань, 1983.— 46 с.— Библиогр. 5 назв.— Деп. в ВИНИТИ 23.06.83, № 3426—83 Деп (РЖМат, 1983, 11А910 ДЕП)
53. — Изометрические движения идеальной жидкости с массивным скалярным полем // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1988.— № 25.— С. 40—57 (РЖМат, 1988, 8А711)
54. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1986.— 760 с.
55. *Егоров А. И., Егорова Л. И.* О некоторых пространствах, допускающих

группы движений максимального порядка // Liet. mat. rinkinys: Лит. мат. сб.— 1972.— *12,* № 2.— С. 39—42 (РЖМат, 1973, 2А612)
56. *Егоров И. П.* Автоморфизмы в обобщенных пространствах // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1980.— *10.*— С. 147—191
57. *Жукова Л. И.* Римановы пространства с проективной группой // Уч. зап. Пенз. пед. ин-т.— 1971.— *124.*— С. 13—18 (РЖМат, 1974, 6А802)
58. — Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай) // Уч. зап. Пенз. пед. ин-т.— 1971.— *124.*— С. 19—25 (РЖМат, 1974, 6А803)
59. — О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств // Уч. зап. Пенз. пед. ин-т.— 1971.— *124.*— С. 26—30 (РЖМат, 1974, 6А804)
60. — Римановы пространства, допускающие проективные преобразования // Изв. вузов. Мат.— 1973.— № 6.— С. 37—41 (РЖМат, 1973, 11А608)
61. *Иванов Г. Г.* Изометрические движения в пространствах-временах с нелинейными скалярными полями // Изв. вузов. Мат.— 1985.— № 2.— С. 77—78 (РЖМат, 1985, 8А849)
62. — О погружении пространства-времени с изометрическими и конформными движениями // Изв. вузов. Мат.— 1985.— № 1.— С. 61—63 (РЖМат, 1985, 6А594)
63. —, *Червон С. В.* Точные решения в $SO(3)$-инвариантной нелинейной сигма-модели, связанные с изометрическими и гомотетическими симметриями // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1987.— № 24.— С. 37—44
64. *Кайгородов В. Р.* Полусимметрические лоренцевы пространства с совершенной группой голономии // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1978.— № 14—15.— С. 113—120 (РЖМат, 1979, 2А569; РЖФиз, 1978, 11Б93)
65. *Камышанский Н. Р.* Однопараметрические группы движений псевдоримановых пространств размерности 2 // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. МГУ.— 1979.— № 19.— С. 218—239 (РЖМат, 1979, 11А624)
66. — Классификация полных односвязных субпроективных псевдоримановых пространств В. Ф. Кагана // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. МГУ.— 1981.— № 20.— С. 66—85 (РЖМат, 1981, 8А765)
67. *Колесова Т. И.* Разложение группы изотропии некоторых однородных римановых пространств // Дифференц. геометрия и алгебры Ли. Моск. обл. пед. ин-т.— М., 1983.— С. 66—70.— Библиогр. 4 назв.— Деп. в ВИНИТИ 17.04.84, № 2384—84 Деп (РЖМат, 1984, 8А752 ДЕП)
68. *Кондауров М. Т.* Движения и аффинные преобразования в симметрических конформно евклидовых пространствах // Ред. журн. «Изв. вуз. Мат.»— Казань, 1983.— 20 с.— Библиогр. 4 назв.— Деп. в ВИНИТИ 09.06.83, № 3173—83 Деп. (РЖМат, 1983, 10А624 ДЕП)
69. *Копп В. Г.* Об инвариантах групп бесконечно малых движений трехмерного пространства Лоренца // Тр. Геометр. семинара Казан. ун-т.— 1986.— № 17.— С. 13—29 (РЖМат, 1986, 8А828)
70. *Липатов Н. С.* Гомотетическая неподвижность в пространстве Гёделя // Движения в обобщен. пространствах.— Рязань, 1985.— С. 95—97 (РЖМат, 1986, 5А805)
71. *Ловков А. А.* О просто транзитивной группе гомотетических преобразований в $V_4$ // Уч. зап. Пенз. пед. ин-т.— 1971.— *124.*— С. 70—72 (РЖМат, 1974, 6А807)
72. *Малахальцев М. А.* Свободные действия группы изометрий на пространстве знакопостоянной кривизны. Группа изометрий и тензор Риччи // Казан. ун-т.— Казань, 1986.— 11 с.— Библиогр. 7 назв.— Деп. в ВИНИТИ 21.07.86, № 5294-В (РЖМат, 1986, 10А762 ДЕП)
73. *Мельников В. Е.* О римановых пространствах, допускающих группу движений с распавшейся группой изотропии // Изв. вузов. Мат.— 1971.— № 2.— С. 81—89 (РЖМат, 1971, 6А721)

74. — О группах вращений римановых пространств // Тр. 27-й Науч.-техн. конф., Моск. ин-т радиотехн., электрон. и автомат.— М., 1978.— С. 53—60.— Библиогр. 9 назв.— Деп. в ВИНИТИ 22.03.79, № 1014—79 Деп (РЖМат, 1979, 7А743 ДЕП)
75. *Микеш Й.* О конциркулярных векторных полях «в целом» на компактных римановых пространствах // Одес. ун-т.— Одесса, 1988.— 10 с.— Библиогр. 8 назв.— Деп. в Укр. НИИНТИ 02.03.88, № 615—Ук 88 (РЖМат, 1988, 8А694 ДЕП)
76. — О существовании $n$-мерных компактных римановых пространств, допускающих нетривильные проективные преобразования «в целом» // Докл. АН СССР.— 1989.— *305*, № 3.— С. 534—536 (РЖМат, 1989, 8А828)
77. —, *Покась С. М.* Группы Ли преобразований второго порядка в ассоциированных римановых пространствах // Одес. ун-т.— Одесса, 1981.— 21 с.— Библиогр. 9 назв.— Деп. в ВИНИТИ 30.10.81, № 4988—81 Деп (РЖМат, 1982, 2А802 ДЕП)
78. *Михайличенко Г. Г.* Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости // Сиб. мат. ж.— 1982.— *23*, № 5.— С. 132—141 (РЖМат, 1983, 5А641)
79. *Мицкевич Н. В., Сенин Ю. Е.* Топология и изометрии мира де Ситтера // Докл. АН СССР.— 1982.— *266*, № 3.— С. 586—590 (РЖМат, 1983, 2А626)
80. *Мицнефес И. М., Ундалова И. А.* Однопараметрические группы движений псевдориманова пространства $V_4$ // Материалы 4-й Науч. конф. молод. учен. мех.-мат. фак.— Горький, 1979.— С. 64—71.— Библиогр. 1 назв.— Деп. в ВИНИТИ 31.07.79, № 2856—79 Деп (РЖМат, 1979, 11А634 ДЕП)
81. *Молдобаев Д.* О порядках групп конформных преобразований в римановых пространствах // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.— Фрунзе, 1983.— № 16.— С. 313—323 (РЖМат, 1984, 2А725)
82. — О конформно расширенных группах движений римановых пространств // Исслед. по топологич. и обобщен. пространствам.— Фрунзе, 1988.— С. 63—70 (РЖМат, 1989, 2А739)
83. *Мухамедов А. М.* Максимально подвижные поля тяготения относительно почти проективных движений, сохраняющих квадратичный комплекс геодезических // Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т.— 1979.— № 11.— С. 64—69 (РЖМат, 1980, 5А663)
84. *Новиков С. П.* Некоторые задачи теории гравитации // Успехи мат. наук.— 1973.— *28*, № 5.— С. 266 (РЖМат, 1974, 5А777)
85. *Нусь С. Я.* Об инфинитезимальных изометриях в касательном расслоении гомотетически подвижных римановых пространств $V_3$, $V_4$ // Казан. ун-т.— Казань, 1985.— 25 с.— Библиогр. 4 назв.— Деп. в ВИНИТИ 28.10.85, № 7484-В (РЖМат, 1986, 2А786 ДЕП)
86. *Осиновский М. Е., Тесленко О. А.* Глобальный анализ вакуумных пространств третьего типа, допускающих двумерную коммутативную группу изометрий // Гравитация и теория относительн.— Казань: Казан. ун-т.— 1980.— № 16.— С. 111—119 (РЖМат, 1981, 1А720)
87. *Паньженский В. И.* О движениях в касательном расслоении с метрикой Сасаки // Пенз. гос. пед. ин-т.— Пенза, 1989.— 10 с.— Библиогр. 3 назв. — Деп. в ВИНИТИ 22.02.89, № 1194-В89 (РЖМат, 1989, 6А644 ДЕП)
88. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности.— М.: Наука, 1966.— 496 с.
89. *Покась С. М.* Движения в ассоциированных римановых пространствах // Одесск. ун-т.— Одесса, 1980.— 17 с.— Библиогр. 5 назв.— Деп. в ВИНИТИ 08.04.80, № 1347—80 Деп. (РЖМат, 1980, 8А634 ДЕП)
90. — Бесконечно малые конформные преобразования в ассоциированных римановых пространствах второго порядка // Одесск. ун-т.— Одесса, 1981.— 33 с.— Библиогр. 4 назв.— Деп. в ВИНИТИ 29.06.81, № 3176—81 Деп (РЖМат, 1981, 11А748 ДЕП)
91. *Попов В. А.* Продолжаемость локальных групп изометрий // Мат. сб.— 1988.— *135*.— № 1.— С. 12—23 (РЖМат, 1988, 7А705)
92. *Рийвес К.* Подгруппы Ли движений евклидова пространства $R_5$ и их

орбиты II // Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартус. ун-та.— 1974, вып. 342.— С. 83—109 (РЖМат, 1975, 8А711)
93. *Сибгатуллин Н. Р.* К теории нейтринного электровакуума с абелевой группой движений $G_2$ на $V_2$ // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1985.— № 2.— С. 44—51 (РЖМат, 1985, 8А852)
94. *Синюков Н. С.* Бесконечно малые почти геодезические преобразования аффинносвязных и римановых пространств II // Укр. геометр. сб.— 1971.— Вып. 11.— С. 87—95 (РЖМат, 1972, 4А807)
95. — Геодезические отображения римановых пространств.— М.: Наука, 1979.— 256 с.
96. —, *Покась С. М.* Группы движений второй степени в ассоциированном римановом пространстве // Движения в обобщен. пространствах.— Рязань, 1985.— С. 30—36 (РЖМат, 1986, 3А904)
97. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств // Успехи мат. наук.— 1956.— *11*, № 4.— С. 45—116 (РЖМат, 1957, 5897)
98. *Тралле А. Е.* О группе изометрий обобщенного риманова симметрического пространства // Мат. заметки.— 1987.— *41*, № 2.— С. 248—256 (РЖМат, 1987, 5А745)
99. *Улановский М. А.* О конформных преобразованиях метрики Лоренца // Укр. геометрич. сб.— Харьков, 1984.— № 27.— С. 118—120 (РЖМат, 1984, 9А714)
100. *Ундалова И. А.* Собственно римановы пространства, допускающие стационарно-статическую группу движений // Редколлегия ж. «Изв. вузов. Математика».— Казань, 1977.— 20 с.— Библиогр. 5 назв.— Деп. в ВИНИТИ 01.03.77, № 789—77 Деп (РЖМат, 1977, 6А567 ДЕП)
101. — Однопараметрические группы движений с изотропными траекториями // Дифференц. и интегр. уравнения.— Горький, 1986.— С. 58—62 (РЖМат, 1987, 11А810)
102. — Однопараметрические группы проективных преобразований риманова пространства с изотропными траекториями // Горьк. ун-т.— Горький, 1986.— 16 с.— Библиогр. 7 назв.— Деп. в ВИНИТИ 29.10.86, № 7458-В (РЖМат, 1987, 2А696 ДЕП)
103. —, *Арясова С. Н.* Псевдориманово пространство $V^4$, допускающее однопараметрическую группу движений с изолированной неподвижной точкой // Горьк. ун-т.— Горький, 1987.— 20 с.— Библиогр. 1 назв.— Деп. в ВИНИТИ 28.08.87, № 6361-В87 (РЖМат, 1987, 12А766 ДЕП)
104. —, *Еранова Г. Р.* Однопараметрические группы гомотетий риманова пространства // Сб. ст. Горьков. ун-т.— 1975.— Вып. 2.— С. 105—109 (РЖМат, 1976, 3А837)
105. —, *Маркова В. Н.* Собственно римановы пространства, допускающие группы движений типа «В» // Материалы 8 Науч. конф. мол. ученых мех.-мат. фак. Горьк. ун-та и НИИ мех., Горький, 25—26 апр., 1983, Ч. I.— Горьк. ун-т.— Горький, 1983.— С. 114—118.— Библиогр. 2 назв.— Деп. в ВИНИТИ 03.04.84, № 1846—84 Деп. (РЖМат, 1984, 8А748 ДЕП)
106. —, *Осипова Л. Ю.* Однопараметрические группы движений типа «В» римановых пространств $V_3$ *и* $V_4$ // Материалы 6-й Науч. конф. мол. ученых мех.-мат. фак. и НИИ мех. Ч. 3.— Горьк. ун-т.— Горький, 1981.— С. 392—400.— Библиогр. 3 назв.— Деп. в ВИНИТИ 14.01.82, № 202—82 Деп. (РЖМат, 1989, 5А662 ДЕП)
107. —, *Томарова И. В.* Псевдориманово пространство $V^4$, допускающее поле Киллинга с особенностью // Горьк. ун-т.— Горький, 1988.— 11 с.— Библиогр. 4 назв.— Деп. в ВИНИТИ 11.08.88, № 6519-В88 (РЖМат, 1988, 11А894 ДЕП)
108. *Ферзалиев А. С.* О группах движений в пространствах с тензором кривизны, рассматриваемым как когредиентная функция метрического и кососимметрического тензоров // Пробл. теории гравитации и элементарн. частиц.— М.: Атомиздат, 1970.— Вып. 3.— С. 137—149 (РЖМат, 1971, 6А761)

109. *Чинак Р. Б.* О компактных группах изометрий, сопряженных с подгруппой ортогональной группы // Сиб. мат. ж.— 1987.— *28*, № 4.— С. 207—209 (РЖМат, 1987, 11А801)
110. *Чупахин А. П.* Нелинейные конформно-инвариантные уравнения в пространствах $V_4$ с нетривиальной конформной группой // Динамика сплош. среды.— Новосибирск, 1976.— Вып. 25.— С. 122—132 (РЖМат, 1977, 4А742)
111. — Нетривиальные конформные группы в римановых пространствах // Доклады АН СССР.— 1979.— *246*, № 5.— С. 1056—1058 (РЖМат, 1979, 11А631)
112. *Шадыев Х.* Об инфинитезимальных гомотетиях в касательном расслоении риманова многообразия // Изв. вузов. Мат.— 1984.— № 9.— С. 77—79 (РЖМат, 1985, 3А715)
113. — Об инфинитезимальных гомотетиях в касательном расслоении риманова многообразия // Вопр. многомер. дифференц. геом. и ее прил.— Самарканд, 1988.— С. 12—26 (РЖМат, 1988, 9А789)
114. *Шандра И. Г.* Инфинитезимальные гомотетические преобразования в кокасательном расслоении // Матер. науч. конф. мол. ученых Одес. ун-та.— Одесса, 16—17 мая, 1985.— Сер. Мат.— Одес. ун-т.— Одесса.— С. 152—164.— Библиогр. 10 назв. Деп. в Укр. НИИНТИ 03.01.86, № 129-Ук (РЖМат, 1986, 6А935 ДЕП)
115. *Широков А. П.* Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1980.— *12*.— С. 61—95
116. *Шушпанов П. И.* Группа движений сферического пространства и преобразования Лоренца // Науч. тр. Моск. ин-т нар. х-ва.— 1970.— Вып. 96.— С. 150—177 (РЖМат, 1971, 9А624)
117. *Ackerman Noill H., Hsiung C. C.* Isometry of Riemannian manifolds to spheres. II // Can. J. Math.— 1976.— *28*, № 1.— С. 63—72 (РЖМат, 1976, 11А787)
118. *Ackler Lynn L., Hsiung Chuan-Chin.* Isometry of Riemannian manifolds to spheres // Ann. mat. pura ed appl.— 1974.— *99*.— С. 53—64 (РЖМат, 1975, 1А793)
119. *Akbar-Zadeh Hassan, Couty Raymond.* Espaces a tenseur de Ricci parallele admettant des transformations projectives // C. r. Acad. sci.— 1977.— *284*, № 15.— С. А891—А893 (РЖМат, 1977, 10А486)
120. —, — Espaces à tenseur de Ricci parallèle admettant des transformations projectives // Rend. Math.— 1978.— *11*, № 1.— С. 85—96 (РЖМат, 1979, 4А771)
121. —, —, Transformations projectives de certaines variétés à connexion métrique // C. r. Acad. sci.— 1984, sér. 1.— *298*, № 7.— С. 153—156 (РЖМат, 1984, 10А628)
122. —, — Transformations projectives des variétés munies d'une connexion métrique // Am. Math. Pura ed Appl.— 1987.— № 148.— С. 251—275 (РЖМат, 1988, 11А900)
123. *Aminova A. V.* The groups of symmetries in the spaces of general relativity // Теор.— группов. методы в мех. Тр. Междунар. симпоз. Новосибирск, 1978.— С. 24—33 (РЖМат, 1979, 10А513)
124. — On skew-orthonormal frame and parallel symmetric bilinear form on Riemannian manifold // Tensor.— 1987.— *45*.— С. 1—13
125. — On geodesic mappings of the Riemannian spaces // Tensor.— 1987.— *46*.— С. 179—186
126. *Amur Krishna, Pujar S. S.* Isometry to spheres of Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group // J. Different. Geom.— 1977. *12*, № 2.— С. 247—252 (РЖМат, 1978, 11А742)
127. *Arcidiacono Guiseppe.* A new Projective relativity based on the De Sitter universe // Gen. Relat. and Gravit.— 1976.— *7*, № 11.— С. 885—889 (РЖМат, 1978, 7А944)

128. *Ashtekar Abhay, Magnon-Ashtekar Anne.* A technique for analyzing the structure of isometries // J. Math. Phys.— 1978.— *19,* № 7.— С. 1567—1572 (РЖМат, 1979, 4А774)
129. —, *Schmidt B. G.* Null infinity and Killing fields // J. Math. Phys.— 1980.— *21,* № 4.— С. 862—867 (РЖМат, 1980, 10А519)
130. —, *Xanthopoulos Basilis C.* Isometries compatible with asymptotic flatness at null infinity: a complete description // J. Math. Phys.— 1978.— *19,* № 10.— С. 2216—2222 (РЖМат, 1979, 5А707)
131. *Asimov Daniel.* Finite groups as isometry groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1976.— *216.*— С. 389—391 (РЖМат, 1976, 12А797)
132. *Aulestia L., Núñez L., Patiño A., Rago H., Herrera L.* Radiating *C* metric: an example of a proper Ricci collineations // Nuovo cim.— 1984.— *B80,* № 1.— С. 133—142 (РЖМат, 1984, 9А756)
133. *Barbance Christiane.* Transformations conformes des variétés lorentziennes homogènes // Tensor.— 1982.— *39,* Commem. Vol. 3.— С. 173—178 РЖМат, 1984, 10А631)
134. —, *Kerbrat Yvan.* Sur les transformations conformes des variétés d'Einstein // C. r. Acad. sci.— 1978.— *AB286,* № 8.— С. 391—394 (РЖМат, 1978, 12А1083)
135. *Barut A. O.* External (kinematical) and internal (dynamical) conformal symmetry and discrete mass spectrum // Group Theory Non-Linear Probl. — Dordrecht — Boston, 1974.— С. 249—259 (РЖМат, 1974, 9А867)
136. *Batbedat Andre.* Sur la conjecture de A. Lichnerowicz // Pubis Dép math.— 1974.— *11,* № 3.— С. 51—57 (РЖМат, 1975, 9А530)
137. *Beckers J., Harnad J., Perroud M., Winternitz P.* Tensor field invariant under subgroups of the conformal group of space-time // J. Math. Phys.— 1978.— *19,* № 10.— С. 2126—2153 (РЖМат, 1979, 6А620)
138. *Bedran M. L., Lesche B.* An example of affine collineation in the Robertson—Walker metric // J. Math. Phys.— 1986.— *27,* № 9.— С. 2360—2361 (РЖМат, 1987, 1А764)
139. *Beem J. K., Ehrlich P. E., Markvorsen S.* Timelike isometries of space-times with nonnegative sectional curvature // Top. Differ. Geom.: Colloq., Debrecen, 26 Aug.— Sept. 1, 1984. Vol. 1.— Amsterdam etc., 1988.— С. 153—165 (РЖМат, 1989, 3А685)
140. —, —, — Timelike isometries and Killing fields // Geom. dedic.— 1988.— *26,* № 3.— С. 247—258 (РЖМат, 1989, 1А744)
141. *Berger Beverly K.* Homothetic and conformal motions in spacelike slices of solutions of Einstein's equations // J. Math. Phys.— 1976.— *17,* № 7.— С. 1268—1273 (РЖМат, 1976, 12А826)
142. *Blair David E.* On the zeros of a conformal vector field // Nagoya Math. J.— 1974.— *55.*— С. 1—3 (РЖМат, 1975, 6А833)
143. *Bokhari Ashfaque H., Qadir Asghar.* Symmetries of static, spherically symmetric space-times // J. Math. Phys.— 1987.— *28,* № 5.— С. 1019—1022 (РЖМат, 1987, 12А789)
144. *Bona C.* Invariant conformal vectors in space-times admitting a group $G_3$ of motions acting on spacelike orbits $S_2$ // J. Math. Phys.— 1988.— *29,* № 11.— С. 2462—2464 (РЖМат, 1989, 6А690)
145. *Božek Miloš.* Existence of generalised symmetric Riemannian spaces with solvable isometry group // Čas. pestov. mat.— 1980.— *105,* № 4.— С. 368—384 (РЖМат, 1981, 5А666)
146. *Boyer C. P., Fnley J. D. III.* Killing vectors in self-dual Euclidean Einstein spaces // J. Math. Phys.— 1982.— *23,* № 6.— С. 1126—1130 (РЖМат, 1982, 12А759)
147. *Branson Thomas P.* Quasi-inveriance of the Yang-Mills equations under conformal transformations and conformal vector fields // J. Different. Geom.— 1981.— *16,* № 2.— С. 195—203 (РЖМат, 1982, 7А809)
148. *Brickell Frederick, Yano Kentaro.* Concurrent vector fields and Minkowski structures // Kodai Math. Semin. Repts.— 1974.— *26,* № 1.— С. 22—28 (РЖМат, 1982, 12А759)

149. *Briginshaw A. J.* Causality and the group structure of space-time // Int. J. Theor. Phys.— 1980.— *19,* № 5.— С. 329—345 (РЖМат, 1981, 4А675)
150. *Brodzki Marek, Sonelski Wacław.* Zastosowanie pewnych podgrup grupy afinicznej zespolonej w geometrycznej teorii seci electrycznych // Zesz. nauk. Psl.— 1979.— № 593.— С. 3—15 (РЖМат, 1980, 7А696)
151. *Brüning Jochen, Heintze Ernst.* Représentations des groupes d'isométries dans les sous-espaces propres du laplacien // C. r. Acad. sci.— 1978.— *286,* № 20.— С. A221—A223 (РЖМат, 1979, 1А742)
152. *Bryant Robert L.* Metrics with holonomy $G_2$ or Spin (7) // Lect. Notes. Math.— 1985.— № 1111.— С. 269—277 (РЖМат, 1985, 12А819)
153. — Metrics with exceptional holonomy // Ann. Math.— 1987.— *126,* № 3. — С. 525—576 (РЖМат, 1988, 9А790)
154. *Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P.* The optical group and its subgroups // J. Math. Phys.— 1978.— *19,* № 8.— С. 1758—1780 (РЖМат, 1979, 3А604)
155. *Byers W.* Isometry group's of manifolds of negative curvature // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— *54.*— С. 281—285 (РЖМат, 1976, 12А798)
156. *Cahen M.* A propos du groupe conforme de l'espace de Minkowski // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg.— 1976.— *62,* № 3.— С. 199—206 (УМНос, 1977, 4А749)
157. —, Kerbrat Yvan. Transformations conformes des espaces symétriques pseudo-riemanniens // C. r. Acad. sci.— 1977.— *A285,* № 5.— *B285,* № 5.— С. A383—A385 (РЖМат, 1978, 5А673)
158. —, — Champs de vecteurs conformes et transformations conformes des espaces lorentziens symétriques // J. math. pures et appl.— 1978.— *57,* № 2.— С. 99—112 (РЖМат, 1979, 2А582)
159. —, — Transformations conformes des espaces symétriques pseudo-riemanniens // Ann. mat. pura ed appl.— 1982.— № 122.— С. 257—289 (РЖМат, 1983, 11А879)
160. *Càmpoli Oscar A.* Clifford isometries of compact homogeneous Riemannian manifolds // Rev. Union mat. argent.— 1983.— *31,* № 1—2.— С. 44—49 (РЖМат, 1984, 12А777)
161. *Cao Rongmei.* Space-times admitting a group of conformal motions generated by a time-like vector field // Наньцзин дасюэ сюэбао = J. Nanjing Univ.— 1988.— *5,* № 2.— С. 249—253 (РЖМат, 1989, 3А727)
162. *Carot J., Mas Li.* Conformal transformation and riseous fluieds in general relativity // J. Math. Phys.— 1986.— *27,* № 9.— С. 2336—2339 (РЖМат, 1987, 2А724)
163. *Castellani L., D'Auria R., Fré P., Nieuwenhuizen P. van.* Holonomy groups, sesquidual torsion fields, and SU (8) in $d=11$ supergravity // J. Math. Phys.— 1984.— *25,* № 11.— С. 3209—3213 (РЖМат, 1985, 5А681)
164. *Chen Su-Shing, Eberlein Patrick.* Isometry groups of simply connected manifold of nonpositive curvature // Ill. J. Math.— 1980.— *24,* № 1.— С. 73—103 (РЖМат, 1980, 10А501)
165. *Chep Cheng-Hsien.* On a Riemannian manifold admitting Killing vectors whose covariant derivatives are conformal Killing tensors // Kodai Math. Semin. Repts.— 1971.— *23,* № 2.— С. 168—171 (РЖМат, 1972, 1А1095)
166. *Chinea F. J.* Symmetries in tetrad theories // Class. and Quantum Gravity.— 1986.— *5,* № 1.— С. 135—145 (РЖМат, 1988, 8А725)
167. *Clarke C. J. S.* The singular holonomy group // Commun. Math. Phys.— 1978.— *58,* № 3.— С. 291—297 (РЖМат, 1978, 11А780)
168. *Cohen H. I., Leringe O., Sundblad Y.* The use of algebraic computing in general relativity // Gen. Relat. and Gravit.— 1976.— *7,* № 3.— С. 269—286 (РЖМат, 1978, 7А1007)
169. *Collinson C. D.* Conservation laws in general relativity based upon the existence of preferred collineations // Gen. Relat. and Gravit.— 1970.— *1,* № 2.— С. 137—142 (РЖМат, 1973, 1А695)
170. — Special subprojective motions in a Riemannian space // Tensor.— 1974. — *28,* № 2.— С. 218—220 (РЖМат, 1975, 6А840)

171. — Homothetic motions and the Hauser metric // J. Math. Phys.— 1980.— *21,* № 1.— С. 2601—2602 (РЖМат, 1981, 5А689)
172. — Proper affine collineations in Robertson — Walker space-times // J. Math. Phys.— 1988.— *29,* № 9.— С. 1972—1973 (РЖМат, 1989, 4А694)
173. —, *Smith P. N.* A comment on the symmetries of Kerr black holes // Commun. Math. Phys.— 1977.— *56,* № 3.— С. 277—279 (РЖМат, 1978, 8А747)
174. *Currás-Bosch Carlos.* Killing vector fields and holonomy algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *90,* № 1.— С. 97—102 (РЖМат, 1984, 12А765)
175. — Killing vector fields and complex structures // Lect. Notes Math.— 1984.— *1045.*— С. 36—42 (РЖМат, 1984, 10А623)
176. — Infinitesimal transformations on noncompact manifolds // Ann. mat. pura ed appl.— 1987.— № 149.— С. 347—360 (РЖМат, 1988, 9А792)
177. *D'Ambra G.* Isometry groups of Lorentz manifolds // Invent. math.— 1988.— *92,* № 3.— С. 555—565 (РЖМат, 1989, 1А724)
178. *Davis W. R., Oliver D. R., Jr.* Matter field space-times admitting mappings satisfying vanishing contraction of the Lie deformation of the Ricci tensor // An.. Inst. H. Poincaré.— 1978.— *A28,* № 2.— С. 197—206 (РЖМат, 1979, 1А750)
179. *Debney George.* Symmetry in Einstein — Maxwell space-time // J. Math. Phys.— 1972.— *13,* № 10.— С. 1469—1477 (РЖМат, 1973, 4А840)
180. *Defrise-Carter L.* Conformal groups and conformally equivalent isometry groups // Commun. Math. Phys.— 1975.— *40,* № 3.— С. 273—282 (РЖМат, 1975, 12А689)
181. *Deszcz Ryszard.* Uwagi o kolineacjach rzutowych w pewnych klasach przestrzeni Riemanna // Pr. nauk. Inst. matem. i fiz. teor. PWr.— 1973, № 8.— С. 3—9 (РЖМат, 1973, 11А610)
182. — On some Riemannian manifolds admitting a concircular vector field // Demonstr. math.— 1976.— *9,* № 3.— С. 487—495 (РЖМат, 1977, 6А563)
183. *Duggal K. Ц.* Existence of two Killing vector fields on the space-time of general relativity // Tensor.— 1978.— *32,* № 3.— С. 318—322 (РЖМат, 1979, 6А622)
184. — Einstein-Maxwell equations compatible with certain Killing vectors with light velocity // Ann. mat. pura ed appl.— 1979.— *120.*— С. 263—264 (РЖМат, 1980, 6А792)
185. —, *Sharma R.* Conformal collineations and anisotropic fluids in general relativity // J. Math. Phys.— 1986.— *27,* № 10.— С. 2511—2513 (РЖМат, 1987, 6А841)
186. *Dyer C. C., Honig E.* Geometry of homothetic Killing trajectories and stationary limit surfaces // J. Math. Phys.— 1979.— *20,* № 1.— С. 1—5 (РЖМат, 1979, 8А741)
187. *Eardley Douglas M.* Self-similar space-times: geometry and dynamics // Commun. Math. Phys.— 1974.— *37,* № 4.— С. 287—309 (РЖМат, 1975, 4А814)
188. —, *Isenberg J., Marsden J., Moncrief V.* Homothetic and conformal symmetries of solutions of Einstein's equations // Commun. Math. Phys.— 1986.— *106,* № 1.— С. 137—158 (РЖМат, 1987, 1А763)
189. *Eberlein Patrick.* Isometry groups of simply connected manifolds of nonpositive curvature // Acta math.— 1982.— *149,* № 1—2.— С. 41—69 (РЖМат, 1983, 7А665)
190. *Ehrlich Paul E.* The displacement function of a timelike isometry // Tensor.— 1982.— *38,* Commen.— Vol. 2.— С. 29—36 (РЖМат, 1984, 9А715)
191. *Ejiri Norio.* A negative answer to a conjecture of conformal transformations of Riemannian manifolds // Tensor.— 1981.— *33,* № 2.— С. 261—266 (РЖМат, 1982, 1А903)
192. *Enghis P.* Grupul de miscari al spatilor $K_3$* // Stud. Univ. Babes-Bolydi Mat.— 1975.— *20.*— С. 16—20 (РЖМат, 1976, 10А428)

193. *Ernotte P.* Commutation properties of 2-parameter groups of isometries // J. Math. Phys.— 1980.— *21*, № 5.— С. 954 (РЖМат, 1980, 11А759)
194. *Ernst Frederick J., Plebanski Jerzy F.* Killing structures and complex ε-potentials // Ann. Phys., (USA).— 1977.— *107*, № 1—2.— С. 266—282 (РЖМат, 1978, 4А625)
195. *Faridi Abbas M.* Einstein—Maxwell equations and the conformal Ricci collineations // J. Math. Phys.— 1987.— *28*, № 6.— С. 1370—1376 (РЖМат, 1988, 2А824)
196. *Ferrand Jacqueline.* Sur un lemme d'Alekseevskii relatif aux transformations conformes // C. r. Acad. sci.— 1977.— *284*, № 2.— С. А121—А123 (РЖМат, 1977, 8А721)
197. *Finley J. D., III, Plebański J. F.* Further heavenly metrics and their symmetries // J. Math. Phys.— 1976.— *17*, № 4.— С. 585—596 (РЖМат, 1976, 10А425)
198. —, — Killing vectors in plane *HH* space // J. Math. Phys.— 1978.— *19*, № 4.— С. 760—766 (РЖМат, 1978, 12А1108)
199. —, — The classification of all *H*—spaces admitting a Killing vector // J. Math. Phys.— 1979.— *20*, № 9.— С. 1938—1945 (РЖМат, 1980, 3А526)
200. *Flaherty F. J.* Champs de Killing sur des variétés Lorentziennes // C. r. Acad. sci.— 1975.— *280*, № 8.— С. А517—А518 (РЖМат, 1975, 8А692)
201. *Fubini G.* Sui gruppi trasformazioni geodetiche // Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat.— 1903.— *53*, № 2.— С. 261—313.
202. *Fujii Masami.* Some Riemannian manifolds admitting a concircular scalar fields // Math. J. Okayama Univ.— 1973.— *16*, № 1.— С. 1—9 (РЖМат, 1974, 5А745)
203. *Garfinkle David, Tian Qingjun.* Space-times with cosmological constant and conformal Killing field have constant curvature // Class. and Quantum Gravity.— 1987.— *4*, № 1.— С. 137—139 (РЖМат, 1987, 7А776)
204. *Gebarowski Andrzej.* On conformal collineations in Riemannian spaces // Pr. nauk. Inst. matem. i fiz. teor. PWr.— 1973.— № 8.— С. 11—17 (РЖМат, 1973, 11А609)
205. *Giodek E.* On riemannian conformally symmetric spaces admitting projective collineations // Colloq. math.— 1972.— *26*.— С. 123—128 (РЖМат, 1973, 5А704)
206. *Gordon Carolyn S., Wilson Edward N.* Isometry groups of Riemannian solvmanifolds // Trans. Amer. Math. Soc.— 1988.— *307*, № 1.— С. 245—269 (РЖМат, 1989, 6А642)
207. *Goto Midori S.* On isometry group of a manifold without focal poits // J. Math. Soc. Jap.— 1982.— *34*, № 4.— С. 653—663 (РЖМат, 1983, 6А738)
208. —, *Goto Morikuni.* Isometry groups of negatively pinched 3-manifolds // Hiroshima Math. J.— 1979.— *9*, № 2.— С. 313—319 (РЖМат, 1979, 12А739)
209. *Gray Alfred.* Weak holonomy groups // Math. Z.— 1971.— *123*, № 4.— С. 290—300 (РЖМат, 1972, 4А801)
210. *Greene Robert E., Shiohama Katsuhiro.* The isometry groups of manifolds admitting nonconstant convex functions // J. Math. Soc. Jap.— 1987.— *39*, № 1.— С. 1—16 (РЖМат, 1987, 9А779)
211. *Grycak W.* Null geodesic collineations in conformally recurrent manifolds // Tensor.— 1980.— *34*, № 3.— С. 253—259 (РЖМат, 1981, 4А654)
212. — On affine collineations in conformally recurrent manifolds // Tensor.— 1981.— *35*, № 1.— С. 45—50 (РЖМат, 1981, 7А690)
213. *Guo Xiaoying.* Riemannian manifolds admitting concircular vector fields // Ханчжоу дасюэ сюэбао. Цзыжань кэсюэ бань=J. Hangzhou Univ. Natur. Sci. Ed.— 1984.— *11*, № 2.— С. 157—167 (РЖМат; 1984, 10А635)
214. *Halford William Dean.* Petrov type *N* vacuum metrics and homothetic motions // J. Math. Phys.— 1979.— *20*, № 6.— С. 1115—1117 (РЖМат, 1979, 12А740)
215. —, *Kerr R. P.* Einstein spaces and homothetic motions. I // J. Math.

Phys.— 1980.— *21,* № 1.— С. 120—128 (РЖМат, 1980, 8А632)
216. *Hall G. S.* Curvature collineations and the determination of the metric from the curvature in general relativity // Gen. Relat. and Gravit.— 1983. — *15,* № 6.— С. 581—589 (РЖМат, 1984, 1А724)
217. — Curvature, metric and holonomy in general relativity // Differ. Geom. and Appl.: Proc. Conf., Brno, Aug. 24—30, 1986, Commun.— Brno, 1987.— С. 127—136 (РЖМат, 1988, 6А844)
218. — Singularities and homothety groups in spacetime // Class. and Quantum Gravity.— 1988.— *5,* № 5.— С. L77—L80 (РЖМат, 1988, 11А921)
219. — *Costa J. da.* Affine collineations in space-time // J. Math. Phys.— 1988.— *29,* № 11.— С. 2465—2472 (РЖМат, 1989, 6А693)
220. *Halpern Leopold.* Broken symmetry of Lie groups of transformation generating general relativistic theories of gravitation // Int. J. Theor. Phys.— 1979.— *18,* № 11.— С. 845—860 (РЖМат, 1981, 3А690)
221. *Harnad J. P., Pettitt R. B.* Gauge theories for space-time symmetries. I // J. Math. Phys.— 1976.— *17,* № 10.— С. 1827—1837 (РЖМат, 1977, 5А578)
222. *Harris R. A., Zund J. D.* An investigation of Dubourdien's list of space-times which admit holonomy groups // J. Math. Phys.— 1978.— *19,* № 10. — С. 2052—2054 (РЖМат, 1979, 5А696)
223. —, — An investigation of the Kaigorodov space-times. I // Tensor.— 1982.— *36,* № 3.— С. 233—241 (РЖМат, 1984, 12А811)
224. —, — An investigation of the Kaigorodow space-times. II // Tensor.— 1982.— *36,* № 3.— С. 242—248 (РЖМат, 1984, 12А812)
225. —, — Continuous groups of the Kasner space-times // Tensor.— 1982.— *36,* № 3.— С. 270—274 (РЖМат, 1984, 9А705)
226. —, — An investigation of Kruchkovich's homogeneous space-times // Tensor.— 1982.— *37,*— Commem.— Vol. 1.— С. 85—89 (РЖМат, 1984, 8А749)
227. —, — Generalized Osinovsky space-times // Tensor.— 1983.— *40,* № 1.— С. 49—53 (РЖМат, 1986, 8А874)
228. *Harrison B. Kent, Stevens James L.* Using group theory to solve certain equations arising in general relativity // Encyclia [formerly, «Proc. Utah. Acad. Sci., Arts, und Lett.»].— 1978.— *55,*— С. 73—76 (РЖМат, 1981, 2А758)
229. *Havas Peter, Plebanski Jerzy.* Conformal extensions of the Galilei group and their relation to the Schrödinger group // J. Math. Phys.— 1978.— *19,* № 2.— С. 482—493 (РЖМат, 1978, 10А628)
230. *Held A.* Killing vectors in empty space algebraically special metrics. I // Gen. Relat. and Gravit.— 1976.— *7,* № 2.— С. 177—198 (РЖМат, 1978, 7А946)
231. — Killing vectors in empty space algebraically special metrics. II // J. Math. Phys.— 1976.— *17,* № 1.— С. 39—45 (РЖМат, 1976, 7А926)
232. *Henneaux Marc.* Gravitational fields, spinor fields and groups of motions // Gen. Relat. and Gravit.— 1980.— *12,* № 2.— С. 137—147 (РЖМат, 1981, 3А686)
233. *Herrera L., Jiménez J., Leal L., Ponce de León J., Esculpi M., Galina V.* Anisotropic fluids and conformal motions in general relativity // J. Math. Phys.— 1984.— *25,* № 11.— С. 3274—3278 (РЖМат, 1985, 4А725)
234. —, *Ponce de León.* Perfect fluid spheres admitting a one-parameter group of conformal motions // J. Math. Phys.— 1985.— *26,* № 4.— С. 778—784 (РЖМат, 1986, 1А953)
235. *Hiramatu Hitosi.* On essentially isometric conformal transformation groups // Kodai Math. Semin. Repts.— 1972.— *24,* № 2.— С. 212—216 (РЖМат, 1972, 11А560)
236. — On Riemannian manifolds admitting a one-parameter conformal transformation group // Tensor.— 1974.— *28,* № 1.— С. 19—24 (РЖМат, 1975, 6А835)
237. — On integral inequalities and their applications in Riemannian manifolds // Geom. dedic.— 1978.— *7,* № 3.— С. 375—386 (РЖМат, 1979,

4A765)
238. — Integral inequalities and their applications in Riemannian manifolds admitting a projective vector field // Geom. dedic.— 1980.— *9*, № 4.— С. 501—505 (РЖМат, 1981, 5А668)
239. *Hsiung Chuan-Chih, Stern Louis W.* Conformality and isometry of Riemannian manifolds to spheres // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— *163*, Jan.— С. 65—73 (РЖМат, 1972, 9А557)
240. *Huber Heinz.* Über die Isometriegruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit negativer Krümmung // Helv. phys. acta.— 1972.— *45*, № 2.— С. 277—288 (РЖМат, 1973, 3А698)
241. *Hussin Z., Sinzinkayo S.* Conformal symmetry and constants of motion // J. Math. Phys.— 1985.— *26*, № 5.— С. 1072—1076 (РЖМат, 1985, 11А650)
242. *Ichida Ryosuke.* On Riemannian manifolds of non-positive sectional curvature admitting a Killing vector field // Math. J. Okayama Univ.— 1975. — *17*, № 2.— С. 131—134 (РЖМат, 1976, 4А747)
243. *Ihrig Edwin.* The holonomy group in general relativity and the determination of $g_{ij}$ from $T_i^j$ // Gen. Relat. and Gravit.— 1976.— *7*, № 3.— С. 313—323 (РЖМат, 1978, 7А949)
244. —, *Sen D. K.* Uniquennes of timelike Killing vector fields // Ann. Inst. H. Poincaré.— 1975.— *A23*, № 3.— С. 297—301 (РЖМат, 1976, 5А693)
245. Im Hof Hans-Christoph. Über die Isometrie gruppe bei kompakten Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung // Comment. mat. helv.— 1973.— *48*, № 1.— С. 14—30 (РЖМат, 1974, 1А705)
pincées // C. r. Acad. sci.— 1975.— *280*, № 13.— С. А901—А904 (РЖМат,
246. —, *Ruh Ernst A.* Actions isometriques sur des variétés riemanniennes
1975, 10А557)
247. *Ishihara Shigeru, Konishi Mariko.* Fibred Riemannian space with triple of Killing vectors // Kodai Math. Semin. Repts.— 1973.— *25*, № 2.— С. 175—189 (РЖМат, 1974, 2А647)
248. *Israelit Mark.* Bimetric Killing vectors and generation laws in bimetric theories of gravitation // Gen. Relat. and Gravit.— 1981.— *13*, № 6.— С. 523—529 (РЖМат, 1982, 6А682)
249. *Isu Minoru.* Notes on integral inequality for Riemannian manifolds admitting an infinitesimal conformal transformation // Tensor.— 1987.— *44*, № 3.— С. 261—264 (РЖМат, 1989, 6А649)
250. *Iwai Toshihiro.* Liftings of infinitesimal transformations of a Riemannian manifold to its tangent bundle, with applications to dynamical systems // Tensor.— 1977.— *31*, № 1.— С. 98—102 (РЖМат, 1978, 7А911)
251. — On infinitesimal affine and isometric transformations preserving respective vector fields // Kodai Math. J.— 1978.— *1*, № 2.— С. 171—186 (РЖМат, 1979, 5А671)
252. *Kannenberg L.* Killing vectors in gauge supersymmetry // J. Math. Phys. — 1978.— *19*, № 10.— С. 2203—2206 (РЖМат, 1979, 6А623)
253. *Karger Adolf.* Geometry of the motion of robot manipulators // Manuser. math.— 1988.— *62*, № 1.— С. 115—126 (РЖМат, 1989, 3А734)
254. *Katsuda Atsushi.* The isometry groups of compact manifolds with negative Ricci curvature // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *104*, № 2.— С. 587—588 (РЖМат, 1989, 7А589)
255. *Katzin Gerald H., Levine Jack.* Charge conservation as concomitant of conformal motions coupled to generalized gauge transformations // J. Math. Phys.— 1980.— *21*, № 4.— С. 902—908 (РЖМат, 1980, 10А520)
256. *Kauffman Louis H.* Transformations in special relativity // Int. J. Theor. Phys.— 1985.— *24*, № 3.— С. 223—236 (РЖМат, 1985, 11А635)
257. *Kerbrat Yvan.* Existence d'homothéties infinitesimales sur une variété munie d'une connexion linéaire symétrique complète // C. r. Acad. sci.— 1975.— *280*, № 9.— С. А587—А589 (РЖМат, 1975, 9А533)
258. — Transformations conformes des variétés pseudoriemanniennes // J.

Different. Geom.— 1976.— *11*, № 4.— С. 547—571 (РЖМат, 1978, 5А672)
259. *Kerr R. P., Debney G. C., Jr.* Einstein spaces with symmetry groups // J. Math. Phys.— 1970.— *11*, № 9.— С. 2807—2817 (РЖМат, 1971, 5А776)
260. *Kersten Paul, Martin Ruud.* The harmonic map and Killing fields for self-dual SU (3) Yang-Mills equations // J. Phys. A.: Math. and Gen.— 1984.— *17*, № 5.— С. L227—L230 (РЖМат, 1985, 1А892)
261. *Kieres Andrzej.* A pseudo-group of motions of a certain pseudo-Riemannian space // Ann. UMCS.— 1980.— *A34*.— С. 65—71 (РЖМат, 1984, 12А767)
262. *Kim In-Bae.* Special concircular vector fields in Riemannian manifolds // Niroshima Math. J.— 1982.— *13*, № 1.— С. 77—91 (РЖМат, 1982, 10А569)
263. *Kitamura Shin-ichi.* The groups of motions of some stationary axially symmetric space-times // Tensor.— 1981.— *35*, № 2.— С. 183—186 (РЖМат, 1982, 2А819)
264. *Kobayashi Shoshichi.* Transformation groups in differential geometry (Ergeb, Math., 70).— Berlin e. a., Springer, 1972, VIII— 182 с. (РЖМат, 1973, 1А672К) (Пер. на рус. яз.: *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии.— М.: Наука, 1986.— 224 с.)
265. — Projective invariant metrics for Einstein spaces // Nagoya Math. J.— 1979.— *73*.— С. 171—174.— (РЖМат, 1979, 9А689)
266. —, *Nomizu Katsumi.* Foundations of differential georemtry. Vol. 1.— Intersc. Publ., New York — London, 1963; Vol. 2.— Interc. Publ., New York — London — Sydney, 1969. (Пер. на рус. яз.: *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии.— М.: Наука, 1981.— *1*.— 344 с.; т. II.— 416 с.)
267. *Kôjyô Hidemaro.* On conformal Killing tensors of a Riemannian manifold of constant curvature // Hokkaido Math. J.— 1973.— *2*, № 2.— С. 236—242 (РЖМат, 1974, 5А747)
268. *Kolassis Charalampos A.* On the effect of space-time isometries on the neutrino fields // J. Math. Phys.— 1982.— *23*, № 9.— С. 1630—1638 (РЖМат, 1983, 4А842)
269. *Konopka Czesław.* On some transformations in separately Einstein spaces // Pr. nauk. Inst. matem. i fiz. teor. PWr.— 1973.— № 8.— С. 25—32 (РЖМат, 1974, 1А709)
270. *Kowalski Oldrich.* Free periodic isometries of Riemannian manifolds // J. London Math. Soc.— 1979.— *20*, № 2.— С. 334—338 (РЖМат, 1980, 6А762)
271. *Koyanagi Tsunehira.* On a certain property of a Riemannian space admitting a special concircular scalar field // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I. — 1972.— *22*, № 3—4.— С. 154—157 (РЖМат, 1972, 12А546)
272. *Krisch J. P.* On the Killing surface-event horizon relation // J. Math. Phys.— 1981.— *22*, № 4.— С. 663—666 (РЖМат, 1982, 1А969)
273. *Légaré Martin.* Symmetry reduction and simple supersymmetric models // J. Math. Phys.— 1987.— *28*, № 4.— С. 935—939 (РЖМат, 1987, 12А788)
274. *Levine Jack.* Curvature collineations in Riemannian spaces admitting *r* fields of parallel vectors // Tensor.— 1972.— *24*.— С. 389—392 (РЖМат, 1974, 1А698)
275. *Lichnerowicz Andre.* Geometry of groups of transformation;— Leyden, The Netherlands.— 1977.— 234 с.
276. *Liu Mu-Chou.* Local holonomy groups of induced connectiones // Proc. Amer. Math. Soc.— 1974.— *42*, № 1.— С. 272—278 (РЖМат, 1974, 12А456)
277. *Lopera J. F. Torres.* Geodesics and conformal transformations of Heisenberg-Reiter spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1988.— *306*, № 2.— С. 489—498 (РЖМат, 1989, 1А751)
278. *Lord Eric A.* Geometrical interpretation of Inönü-Wigner contractions // Int. J. Theor. Phys.— 1985.— *24*, № 7.— С. 723—730 (РЖМат, 1986, 5А845)

279. — Gauge theory of a group of diffeomorphisms. II. The conformal and de Sitter groups // J. Math. Phys.— 1986.— *27,* № 12.— С. 3051—3054 (РЖМат, 1987, 8А691)
280. —, *Goswami P.* Gauge theory of a group of diffeomorphisms. I. General principles // J. Math. Phys.— 1986.— *27,* № 9.— С. 2415—2422 (РЖМат, 1987, 2А720)
281. *Lukács B., Perjés Z., Sebestyén A.* Null Killing vectors // J. Math. Phys.— 1981.— *22,* № 6.— С. 1248—1253 (РЖМат, 1982, 2А824)
282. *Lukesh Gordon W.* Compact transitive isometry groups // London Math. Soc. Lect. Note Ser.— 1977.— № 26.— С. 301—304 (РЖМат, 1978, 4А591)
283. — Isometry groups acting with one orbit type // Geom. Dedic.— 1982.— *12,* № 4.— С. 347—350 (РЖМат, 1983, 2А585)
284. *Lynge Walter C.* Zero points of Killing vector fields, geodesic orbits, curvature and cut locus // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— *172,* Oct.— С. 501—506 (РЖМат, 1973, 9А671)
285. — Sufficient conditions for periodicity of a Killing vector field // Proc. Amer. Math. Soc.— 1973.— *38,* № 3.— С. 614—616 (РЖМат, 1974, 1А679)
286. *Maartens R.* Affine collineations in Robertson — Walker space-time // J. Math. Phys.— 1987.— *28,* № 9.— С. 2051—2052 (РЖМат, 1988, 3А899)
287. —, *Mason D. P., Tsamparlis M.* Kinematic and dynamic properties of conformal Killing vectors in anisotropic fluids // J. Math. Phys.— 1986.— *27,* № 12.— С. 2987—2994 (РЖМат, 1987, 8А668)
288. *MacCallum Malcolm.* The mathematics of anisotropic spatially-homogeneous cosmologies Physics of the Expanding Universe. Cracow School Cosmol. Jodlowy Dwor, Sept., 1978 // Lect. Notes Phys.— 1979.— *109.*— С 1—59 (РЖМат, 1980, 6А790)
289. *Maeda Masao.* The isometry groups of compact manifolds with non-positive curvature // Proc. Jap. Acad.— 1975.— *51,* Suppl.— С. 790—794 (РЖМат, 1976, 11А818)
290. *Maia M. D.* Combined symmetries in curved space-times // J. Math. Phys. — 1984.— *25,* № 6.— С. 2090—2094 (РЖМат, 1985, 1А894)
291. *Mann L. N.* Gaps in the dimensions of isometry groups of Riemannian manifolds // J. Different. Geom.— 1976.— *11,* № 2.— С. 293—298 (РЖМат, 1977, 5А544)
292. *Mansouri Freydoon, Witten Louis.* Isometries and dimensional reduction // J. Math. Phys.— 1984.— *25,* № 6.— С. 1991—1994 (РЖМат, 1984, 12А774)
293. *Maralabhavi Y. B.* A note on the conformal transformation in a *W*-recurrent space // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1985.— *16,* № 4.— С. 365—372 (РЖМат, 1985, 9А598)
294. *Marchiafava Stefano.* Alcune osservazioni riguardanti i gruppi di Lie $G_2$ e Spin (7), candidati a gruppi di olonomia // Ann. mat. pura ed. appl.— 1981.— *129.*— С. 247—264 (РЖМат, 1982, 9А626)
295. — Characterization of Riemannian manifolds with weak holonomy group $G_2$ (following A. Gray) // Math. Z.— 1981.— *178,* № 2.— С. 157—162 (РЖМат, 1982, 4А667)
296. *Mărgulescu George.* Équations invariantes par rapport au groupe conforme affine // Rev. roum. math. pures et appl.— 1974.— *19,* № 2.— С. 209—212 (РЖМат, 1974, 10А648)
297. — Les representations spinorielles du groupe conforme de l'espace de Minkowski // Lucr. coloc. nat. geom. si topol., Busteni, 27—30 iun., 1981. — Bucuresti, 1983.— С. 226—233 (РЖМат, 1983, 12А911)
298. *Martin Jésus.* Étude de certains groupes d'isométries agissant sur la variété espace-temps // C. r. Acad. sci.— 1970.— *271,* № 20.— С. A1036—A1038 (РЖМат, 1971, 5А773)
299. *Martinez E., Sanz J. L.* Space-times with intrinsic symmetries on the three-spaces $t$ = constant // J. Math. Phys.— 1985.— *26,* № 4.— С. 785—791 (РЖМат, 1986, 1А893)

300. *Matsuda Hiroo.* On $n$-dimensional Lorentz manifolds admitting an isometry group of dimension $n(n-1)/2+1$ for $n \geqslant 4$ // Hokkaido Math. J.— 1986.— *15,* № 2.— С. 309—315 (РЖМат, 1986, 12А970)
301. — On $n$-dimensional Lorentz manifolds admitting an isometry group of dimension $n(n-1)/2+1$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *100,* № 2.— С. 329—334 (РЖМат, 1987, 12А755)
302. *McCrea J. Dermott.* Poincaré gauge theory of gravitation: foundations, exact solutions and computer algebra // Lect. Notes Math.— 1987.— *1251.*— С. 222—237 (РЖМат, 1988, 2А823)
303. *Mason D. P., Maartens R.* Kinematics and dynamics of conformal collineations in relativity // J. Math. Phys.— 1987.— *28,* № 9.— С. 2182—2186 (РЖМат, 1988, 3А900)
304. —, *Tsamparlis M.* Spacelike conformal Killing vectors and spacelike congruences // J. Math. Phys.— 1985.— *26,* № 11.— С. 2881—2901 (РЖМат, 1986, 4А915)
305. *McIntosh C. B. G.* Homothetic motions in general relativity // Gen. Relat. and Gravit.— 1976.— *7,* № 2.— С. 199—213 (РЖМат, 1978, 7А947)
306. — Homothetic motions with null homothetic bivectors in general relativity // Gen. Relat. and Gravit.— 1976.— *7,* № 2.— С. 215—218 (РЖМат, 1978, 7А948)
307. — Symmetries and exact solutions of Enstein's equations. Gravitational Radiation, Collapsed Objects and Exact Solutions. Proc. Einstein Centenary Summer School, Perth, Jan., 1979 // Lect. Notes Phys.— 1980.— *125.*— С. 469—476 (РЖМат, 1981, 3А692)
308. —, *Halford W. D.* The Riemann tensor, the metric tensor and curvature collineations in general relativity // J. Math. Phys.— 1982.— *23,* № 3.— С. 436—441 (РЖМат, 1982, 9А640)
309. *Mensky M. B.* Group of parallel transports and description of particles in curved space-time // Lett. Math. Phys.— 1978.— *2,* № 3.— С. 175—180 (РЖМат, 1979, 1А761)
310. *Mok Kam-Ping.* On the differential geometry of frame bundles of Riemannian manifolds // J. reine und angew. Math.— 1978.— *302.*— С. 16—31 (РЖМат, 1979, 4А753)
311. *Moncrief Vincent.* Space-time symmetries and linearization stability of the Einstein equations // J. Math. Phys.— 1976.— *17,* № 10.— С. 1893—1902 (РЖМат, 1977, 5А573)
312. *Moreschi Osvaldo M., Sparling George A. J.* On Riemannian spaces with conformal symmetries or a tool for the study of generalized Kaluza-Klein theories // J. Math. Phys.— 1983.— *24,* № 2.— С. 303—310 (РЖМат, 1983, 7А703)
313. *Moschetti Gaetano.* Homothetic solutions of Einstein's equations and shok waves // J. Math. Phys.— 1981.— *22,* № 4.— С. 830—834 (РЖМат, 1982, 1А976)
314. *Nagano Tadashi, Ochiai Takushiro.* On compact Riemannian manifolds admitting essential projective transformations // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.— 1986. Sec. 1A.— *33,* № 2.— С. 233—246 (РЖМат, 1987, 6А815)
315. *Navez J.* The groups of motions of space-times admitting a parallel null vector field // Bull. Soc. roy. sci. Liège.— 1972.— *41,* № 9—10.— С. 484—502 (РЖМат, 1973, 7А740)
316. *Neditǎ N. I.* On space-times with Killing pairing //Bull. math. Soc. sci. math. RSR.— 1978.— *22,* № 2.— С. 175—182 (РЖМат, 1979, 2А644)
317. *Ne'eman Y., Sherry T. N.* Affine extensions of supersymmetry: The finite case // Nucl. Phys.— 1978.— *B138,* № 1.— С. 31—44 (РЖМат, 1979, 2А651)
318. *Norris L. K., Davis W. R.* Infinitesimal holonomy group, structure and geometrization // Ann. Inst. H. Poincaré.— 1979.— *A31,* № 4.— С. 387—398 (РЖМат, 1980, 10А517)
319. *Obata Morio.* The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds // J. Different. Geom.— 1971.— *6,* № 2.— С. 247—258 (РЖМат, 1972, 9А556)

320. *Ochiai Takushtro, Takahashi Tsunero.* The group of isometries of a left invariant Riemannian metric on a Lie group // Math. Ann.— 1976.— *223,* № 1.— С. 91—96 (РЖМат, 1977, 3А686)
321. *Papuc Dan I., Popescu Ion P.* Remarques sur les actions des groupes projectif et affine sur leurs algèbres de Lie // C. r. Acad. sci.— 1974.— *A279,* № 14.— С. 565—567 (РЖМат, 1975, 7А913)
322. *Pascua Matilde.* Una soluzione delle equazioni di Einstein—Maxwell ammettente un gruppo $G_7$ di automorfismi // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.— 1975 (1976).— *59,* № 1—2.— С. 91—99 (РЖМат, 1977, 9А884)
323. *Pessa Eliano.* A new unified field theory based on the conformal group // Gen. Relat. and Gravit.— 1980.— *12,* № 10.— С. 857—862 (РЖМат, 1981, 7А714)
324. *Pigeaud Pierre, Sakoto Moussa.* Transformations infinité simales conformes fermées des variétés riemanniennes // C. r. Acad. sci.— 1972.— *274,* № 19.— С. A1406—A1408 (РЖМат, 1972, 10А485)
325. *Pommaret Jean-Francois.* Thermodynamique et théorie des groupes // C. r. Acad. sci. Ser. 1.— 1988.— *307,* № 16.— С. 839—842 (РЖМат, 1989, 6А683)
326. *Prasad G.* Relativistic electromagnetic fluids and Ricci collineations // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1979.— *10,* № 1.— С. 94—99 (РЖМат, 1979, 12А763)
327. *Qadir Asghar, Ziad M.* Static spherically symmetric space-times with six Killing vectors // J. Math. Phys.— 1988.— *29,* № 11.— С. 2473—2474 (РЖМат, 1989, 6А689)
328. *Quan Pham Mau.* Sur les transformation qui lassent invariantes les équations d'Einstein // C. r. Acad. sci. Paris.— 1977.— *285.*— С. 1081—1084 (РЖМат, 1978, 7А903)
329. *Ram Shri, Pandey H. S.* Curvature collineations in a certain cosmological space-times // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1982.— *13,* № 10.— С. 1200—1203 (РЖМат, 1983, 5А668)
330. *Reboucas M. J., Aman J. E.* Computer-aided study of a class of Riemannian space-times // J. Math. Phys.— 1987.— *28,* № 4.— С. 888—892 (РЖМат, 1987, 12А793)
331. *Roter W.* Some remarks on infinitesimal conformal motions in conformally symmetric manifolds // Tensor.— 1981.— *36,* № 1.— С. 8—10 (РЖМат, 1981, 7А689)
332. *Sakoto Moussa.* Transformations infinitésimales conformes d'une variété riemannienne quotient // C. r. Acad. sci.— 1971.— *272,* № 21.— С. A1407—A1409 (РЖМат, 1972, 1А1100)
333. *Salem Eliane.* Une généralisation du théorème de Myers-Steenrod dux pseudogroupes d'isométries // Ann. Inst. Fourier.— 1988.— *38,* № 1.— С. 185—200 (РЖМат, 1989, 3А675)
334. *Sanno Bartolo.* Sulle superficie che si corrispondono per transformazione di Lie e su un formulario completo tra gli invarianti del gruppo conforme e gli invarianti del gruppo proiettivo // Rend. Circ. math Palermo.— 1975.— *24,* № 1.— 2.— С. 168—176 (РЖМат, 1977, 7А613)
335. *Schmidt B. G.* Homogeneous Riemannian spaces and Lie algebras of Killing fields // Gen. Relat. and Gravit.— 1971.— *2,* № 2.— С. 105—120 (РЖМат, 1972, 12А549)
336. *Schroeder Victor.* Tits metric and the action of isometries at infinity // Manifolds of nonpositive curvature.— Boston e. a.— 1985.— С. 212—220 (РЖМат, 1986, 7А834)
337. *Schubert Matthias.* Die Geometrie nilpotenter Lie gruppen mit linksinvarianter Metrik // Bonn. math. Schr.— 1983.— № 149.— 74 с. (РЖМат, 1984, 7А654)
338. *Sharma Ramesh.* A relation between an affine Killing vector and the strain tensor of a pseudo-riemannian manifolds // Math. Repts Acad. Sci. Can.— 1982.— *4,* № 5.— С. 305—307 (РЖМат, 1983, 4А824)

339. — Proper conformal symmetries of conformal symmetric space-times // J. Math. Phys.— 1988.— *29,* № 11.— С. 2421—2422 (РЖМат, 1989, 6А692)
340. —, *Duggal K. L.* Charakterization of an affine conformal vector field // Math. Repts Acad. Sci. Can.— 1985.— *7,* № 3.— С. 201—205 (РЖМат, 1986, 1А897)
341. *Shetty D. J.* On harmonic and Killing vector fields in a submanifold // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1980.— *11,* № 8.— С. 983—987 (РЖМат, 1981, 5А674)
342. *Sigal Richard F.* A note on proper homothetic motions // Gen. Relat. and Gravit.— 1974.— *5,* № 6.— С. 737—739 (РЖМат, 1977, 11А683)
343. *Siklos S. T. C.* Some Einstein spaces and their global properties // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1981.— *14,* № 2.— С. 395—409 (РЖМат, 1981, 8А816)
344. *Singh K. P., Sharma D. N.* Ricci and Maxwell collineations in a null electromagnetic field // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1975.— *8,* № 12.— С. 1875—1881 (РЖМат, 1976, 7А931)
345. —, *Ram Shri.* Curvature collineation for plane symmetric cosmological model // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1974.— *5,* № 3.— С. 241—245 (РЖМат, 1976, 5А694)
346. *Sinzinkayo S., Demaret J.* On solutions of Einstein and Einstein—Yang—Mills equations with (maximal) conformal subsymmetries // Gen. Relat. and Gravit.— 1985.— *17,* № 2.— С. 187—201 (РЖМат, 1985, 11А632)
347. *Smaranda Dumitru.* On the Riemann space with intransitive group of motions // Tensor.— 1974.— *28,* № 3.— С. 273—274 (РЖМат, 1975, 6А849)
348. *Smrz P. K.* Relativity and deformed Lie groups // J. Math. Phys.— 1978.— *19,* № 10.— С. 2085—2088 (РЖМат, 1979, 5А683)
349. — A gauge field theory of spacetime based on the de Sitter group // Found. Phys.— 1980.— *10,* № 3—4.— С. 267—280 (РЖМат, 1981, 1А761)
350. *Sobczyk G. E.* Killing vectors and embedding of exact solutions in general relativity // Clifford Algebras and Appl. Math. Phys.: Proc. NATO and SERC Workshop, Canterbury, 15—27 Sept., 1985.— Dordrecht etc., 1986.— С. 227—244 (РЖМат, 1989, 2А762)
351. *Söler F., Séguin G.* Groupe d'isométries de $S_2$, $S_2 \times R$, $S_3$ et $S_3 \times R$ // Tensor.— 1982.— *36,* № 3.— С. 249—255 (РЖМат, 1984, 9А693)
352. *Stavre P.* Asupra unor cîmpuri de vectori // Stud. si cerc. mat.— 1974.— *26,* № 2.— С. 281—287 (РЖМат, 1975, 1А756)
353. *Stehney Ann K., Millman Richard S.* Riemannian manifolds with many Killing vector fields // Fundam. math.— 1980.— *105,* № 3.— С. 241—247 (РЖМат, 1980, 11А749)
354. *Sugahara Kunio.* The isometry group and the diameter of a Riemannian manifold with positive curvature // Math. Jap.— 1982.— *27,* № 5.— С. 631—634 (РЖМат, 1983, 4А814)
355. *Suguri T., Ueno S.* Some notes on infinitesimal conformal transformations // Tensor.— 1972.— *24.*— С. 253—260 (РЖМат, 1974, 1А715)
356. *Suyama Yoshihiko.* Riemannian manifolds admitting commutative Killing vector fields // Math. J. Okayama Univ.— 1984.— *26.*— С. 199—218 (РЖМат, 1986, 7А845)
357. —, *Tsukamoto Yotaro.* Riemannian manifolds admitting a certain conformal transformation group // J. Different. Geom.— 1971.— *5,* № 3—4.— С. 415—426 (РЖМат, 1972, 3А683)
358. *Švec Alois.* Finite Killing vector fields // Comment. math. Univ. carol.— 1977.— *18,* № 1.— С. 65—69 (РЖМат, 1978, 2А657)
359. *Szabados L. B.* Commutation properties of cyclic and null Killing symmetries // J. Math. Phys.— 1987— *28,* № 11.— С. 2688—2691 (РЖМат, 1988, 6А845)
360. *Szafron D. A.* Intrinsic isometry groups in general relativity // J. Math. Phys.— 1981.— *22,* № 3.— С. 543—548 (РЖМат, 1981, 11А776)

361. *Szenthe J.* Sur les sous-groupes d'isotropie d'actions isométriques sur les variétés riemanniennes á courbure positive // Stud. sci. math. hung.— 1980.— *15,* № 1—3.— С. 89—92 (РЖМат, 1983, 7А671)
362. — A generalization of the Weyl group // Acta math. hung.— 1983.— *41,* № 3—4.— С. 347—357 (РЖМат, 1983, 12А894)
363. *Tachibana Shun-ichi.* On the geodesic projective transformation in Riemannian spaces // Hokkaido Math. J.— 1972.— *1,* № 1.— С. 87—94 (РЖМат, 1973, 5А709)
364. — On examples of Riemannian spaces harmonic relative to Killing vectors // Отяномидзу дзёси дайгаку сидзэн кагаку хококу=Natur. Sci. Rept Ochanomizu Univ.— 1972.— *23,* № 1.— С. 1—7 (РЖМат, 1973, 7А692)
365. — On Riemannian spaces admitting geodesic conformal transformations // Tensor.— 1972.— *25.*— С. 323—331 (РЖМат, 1974, 1А710)
366. *Takagi Hitoshi.* Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries // Tôhoku Math. J.— 1975.— *27,* № 1.— С. 103—110 (РЖМат, 1975, 10А570)
367. *Tandai Kwoichi.* Riemannian manifold admitting more than $n-1$ linearly independent solutions of $\nabla^2\rho+c^2\rho g=0$ // Hokkaido Math. J.— 1972.— *1,* № 1.— С. 12—15 (РЖМат, 1973, 5А702)
368. *Tariq N., Tupper B. O. J.* Curvature collineations in Einstein—Maxwell space-times and in Einstein spaces // Tensor.— 1977.— *31,* № 1.— С. 42—48 (РЖМат, 1978, 7А992)
369. *Torres del Castillo G. F.* Killing vectors in algebraically special space-times // J. Math. Phys.— 1984.— *25,* № 6.— С. 1980—1984 (РЖМат, 1984, 12А766)
370. *Tucker R. W.* Affine transformations and the geometry of superspace // J. Math. Phys.— 1981.— *22,* № 2.— С. 422—429 (РЖМат, 1981, 12А765)
371. *Udriste Constantin.* Proprietăti ale cîmpurilor vectoriale afine si proiective // Stud. si cerc. mat.— 1984.— *36,* № 5.— С. 444—452 (РЖМат, 1985, 7А822)
372. — Cîmpuri vectoriale conforme pe varietăti Riemann ou tensorul Rirri negativ semidefinit // Lucr. Conf. nat. geom. si topol., Tîrgoviste, 12—14 apr., 1986.— Bucuresti, 1988.— С. 311—314 (РЖМат, 1989, 3А691)
373. *Vignon Bernard.* Sur les vecteurs conformes fermés d'une variété pseudo-riemannienne // C. r. Acad. sci.— 1973.— *276,* № 26.— С. А1689—А1691 (РЖМат, 1973, 12А639)
374. *Vrănceanu Gheorghe.* Sur les groupes d'holonomie des espaces $V_n$ plongés dans $E_{n+p}$ sans torsion // Rev. roum. math. pures et appl.— 1974.— *19,* № 1.— С. 125—128 (РЖМат, 1974, 10А543)
375. *Wainwright J., Yaremovicz P. A. E.* Killing vector fields and the Einstein—Maxwell field equations with perfect fluid source // Gen. Relat. and Gravit.— 1976.— *7,* № 4.— С. 345—359 (РЖМат, 1978, 7А972)
376. —, — Symmetries and the Einstein—Maxwell field equations. The null field gase // Gen. Relat. and Gravit.— 1976.— *7,* № 7.— С. 593—608 (РЖМат, 1978, 7А950)
377. *Wilson Edward N.* Isometry groups on homogeneous nilmanifolds // Geom. dedic.— 1982.— *12,* № 3.— С. 337—346 (РЖМат, 1982, 12А784)
378. *Wooley M. L.* On Killing vectors and invariance transformations of the Einstein—Maxwell equations // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1976.— *80,* № 2.— С. 357—364 (РЖМат, 1977, 5А575)
379. *Yamada Toshikiyo.* On conharmonic and concircular transformations // Асахикава когё кото сэммон гакко кэнкю хобун. J. Asahikawa Techn. Coll.— 1979.— № 16.— С. 163—170 (РЖМат, 1980, 1А842)
380. *Yamaguchi Takao.* The isometry groups of Riemannian manifolds admitting strictly convex functions // Ann. sci. Ec. norm. supér.— 1982.— *15,* № 1.— С. 205—212 (РЖМат, 1983, 3А709)

381. — The isometry groups of manifolds of nonpositive curvature with finite volume // Math. Z.— 1985.— *189,* № 2.— С. 185—192 (РЖМат, 1985, 9А592)
382. *Yamauchi Kazunari.* On infinitesimal projective transformations // Hokkaido Math. J.— 1974.— *3,* № 2.— С. 262—270 (РЖМат, 1975, 6А834)
383. — On infinitesimal projective transformations satisfying the certain conditions // Hokkaido Math. J.— 1978.— *7,* № 1.— С. 74—77 (РЖМат, 1978, 11А750)
384. — On infinitesimal projective transformations of a Riemannian mannifold with constant scalar curvature // Hokkaido Math. J.— 1979.— *8,* № 2.— С. 167—175 (РЖМат, 1980, 4А723)
385. *Yamauchi Kazunari.* Infinitesimal projective and conformal transformations in a tangent bundle // Кагосима дайгаку рика хококу=Sci. Repts. Kagoshima Univ.— 1983.— № 32.— С. 47—58 (РЖМат, 1984, 8А721)
386. — On infinitesimal projective transformations and infinitesimal conformal transformations in tangent bundles of Riemannian manifolds // Кагосима дайгаку рика хококу=Sci Repts Kagoshima Univ.— 1987.— № 36.— С. 21—33 (РЖМат, 1988, 6А816)
387. *Yano Kentaro.* Concircular geometry, I—IV // Proc. Acad. Japan.— 1940.— *16.*— С. 195—200, 354—360, 442—448, 505—511.
388. — Conformal transformations in Riemannian manifolds // Ber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach.— 1971.— № 4.— С. 339—351 (РЖМат, 1975, 8А699)
389. — Notes on isometries // Colloq. math.— 1972.— *26.*— С. 1—7 (РЖМат, 1973, 5А710)
390. —, *Hiramatu Hitosi.* Riemannian manifolds admitting an infinitesimal conformal transformations // J. Different. Geom.— 1975.— *10,* № 1.— С. 23—38 (РЖМат, 1975, 9А531)
391. —, — On conformal changes of Riemannian metrics // Kodai Math. Semin. Repts.— 1976.— *27,* № 1—2.— С. 19—41 (РЖМат, 1976, 12А799)
392. —, — Isometry of Riemannian manifolds to spheres // J. Different. Geom.— 1977.— *12,* № 3.— С. 443—460 (РЖМат, 1979, 4А773)
393. *Yawata Makoto.* On the affine Killing vectors in the tangent bundles // Тиба когё дайгаку кэнкю хококу=Rept Chiba Inst. Technol.— 1984.— № 29.— С. 29—33 (РЖМат, 10А634)
394. *Yokote Ichiro.* Affine Killing vectors in the tangent bundles // Kodai Math. J.— 1981.— *4,* № 3.— С. 383—398 (РЖМат, 1982, 7А788)
395. *Yorozu Shinsuke.* Killing vector fields on noncompact Riemannian manifolds with boundary // Kodai Math. J.— 1982.— *5,* № 3.— С. 426—433 (РЖМат, 1983, 6А716)
396. — Killing vector fields on complete Riemannian manifolds // Proc. Amer. Math. Soc.— 1982.— *84,* № 1.— С. 115—120 (РЖМат, 1982, 9А614)
397. — Affine and projective vector fields on complete non-compact Riemannian manifolds // Yokohama Math. J.— 1983.— *31,* № 1—2.— С. 41—46 (РЖМат, 1984, 12А764)
398. — Conformal and Killing vector fields on complete noncompact Riemannian manifolds // Geom. Geod. and Relat. Top. Proc. Symp., Tokyo, Nov. 29—Dec. 3, 1982,— Amsterdam, Tokyo, 1984.— С. 459—472 (РЖМат, 1986, 2А779)
399. — The non-existence of Killing fields // Tôhoku Math. J.— 1984.— *36,* № 1.— С. 99—105 (РЖМат, 1984, 10А622)
400. *Yoshimatsu Yashiro.* On a theorem of Alekseevskii concerning conformal transformations. // J. Math. Soc. Jap.— 1976.— *28,* № 2.— С. 278—289 (РЖМат, 1977, 2А744)