



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Проскурин, Группа $G_2(\mathbb{C})$ в связи с теорией метаплектических форм, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 162, 169–185

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

23 января 2025 г., 23:05:00



ГРУППА $G_2(\mathbb{C})$ В СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ МЕТАПЛЕКТИЧЕСКИХ ФОРМ

Простая комплексная группа Ли типа G_2 (в классификации Картана) может быть реализована как группа автоморфизмов алгебры Кэли над \mathbb{C} и, также, как подгруппа в $SL(7, \mathbb{C})$ состоящая из матриц оставляющих инвариантными некоторые симметричную билинейную и кососимметричную трilinearную формы. Эта группа исследовалась в работах Шевалле [3], [4], [5], Джекобсона [7], [8] и других авторов. Наиболее подробное и удобное для нас описание реализации группы типа G_2 как подгруппы $G_2(\mathbb{C})$ в $SL(7, \mathbb{C})$ дает Гросс [6]. На однородном пространстве $G_2(\mathbb{C})/G_2(\mathbb{C}) \cap SU(7)$ можно определить метаплектические формы, — это функции автоморфные относительно некоторой дискретной подгруппы Γ в $G_2(\mathbb{C})$ имеющие в качестве системы мультипликаторов гомоморфизм Басса-Милнора-Серра [1]. В частности, мы можем определить метаплектические ряды Эйзенштейна и исследовать их вычеты. Такого рода исследования проводились ранее для линейных и симплектических групп, смотрите [10], [11], [12], [9], [13].

Метаплектические формы на $G_2(\mathbb{C})$ никогда ранее не рассматривались. Применяемые нами (глобальные) методы требуют детального описания самой группы $G_2(\mathbb{C})$ и также некоторых специфических свойств дискретной подгруппы Γ . Настоящая работа как раз и имеет целью дать такое описание.

§ I. Группа $G_2(\mathbb{C})$

Здесь собрано несколько предложений проясняющих структуру группы $G_2(\mathbb{C})$ — разложение Ивасава, разложение Бруа, группа Вейля и т.д. Мы приводим доказательства только тех из них, которые не содержатся у Гросса [6]. Под $G_2(\mathbb{C})$ понимается группа (Ли типа G_2) G из теоремы I.4.1 [6].

Γ^0 . Разложение Ивасава.

Пусть:

(а) N — множество всех матриц

$$n(v_1, v_2, \dots, v_6) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} v_1 & \sqrt{2} v_3 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} v_4 \\ 0 & 1 & v_2 & 0 & 0 & 0 & v_3 - v_1 v_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -v_1 \\ -\sqrt{2} v_4 & v_5 & v_6 & 1 & -v_3 & v_1 & v_3 v_5 - v_1 v_6 - v_4^2 \\ -\sqrt{2} v_1 & -v_1^2 & -v_4 - v_1 v_3 & 0 & 1 & 0 & -v_5 - v_1 v_4 \\ \sqrt{2}(v_1 v_2 - v_4) & v_4 - v_1 v_3 + v_1^2 v_2 & v_2 v_4 - v_3^2 + v_1 v_2 v_3 & 0 & -v_2 & 1 & -v_6 + v_2 v_5 - v_3 v_4 + v_1 v_2 v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

$$v_j \in \mathbb{C}, j=1, \dots, 6;$$

(в) A - множество матриц вида

$$a(c_1, c_2) = \text{diag}(1, c_1, c_2, (c_1 c_2)^{-1}, c_1^{-1}, c_2^{-1}, c_1 c_2), \quad (\text{I.2})$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1, c_2 > 0;$$

$$(с) K = G_2(\mathbb{C}) \cap SU(7). \quad (\text{I.3})$$

Тогда N, A, K - подгруппы в $G_2(\mathbb{C})$ и

$$G_2(\mathbb{C}) = NAK \quad (\text{I.4})$$

- разложение Ивасава, причем N - нильпотентная, A - коммутативная и K - максимальная компактная подгруппы.

2° . Группа Вейля

Порядок группы Вейля группы $G_2(\mathbb{C})$ равен 12. Как это принято делать, отождествляем группу Вейля с некоторой группой $S \subset K$. Именно,

$$S = \{e_7, p_1, p_2, (p_1 p_2)^\alpha, p_2 (p_1 p_2)^\beta, \alpha=1, \dots, 5; \beta=1, \dots, 4\} \quad (\text{I.5})$$

здесь: e_7 - единичная матрица 7×7 ,

$$\rho_1 = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 000 & 000 \\ \hline 0 & O & R \\ \hline 0 & R & O \\ \hline 0 & & \end{array} \right), \quad \rho_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 000 & 000 \\ \hline 0 & T & O \\ \hline 0 & O & T \\ \hline 0 & & \end{array} \right), \quad (I.6)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа W порожденная ρ_2 и $(\rho_1 \rho_2)^2$ имеет индекс 2 в S , так что

$$S = WUW\bar{\rho} \quad , \quad \text{при любом } \bar{\rho} \in S \setminus W \quad (I.7)$$

и объединение дизъюнктное.

3°. Разложение Брюа.

Пусть C - множество всех матриц вида (I.2) с $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, $C_1 C_2 \neq 0$. Тогда C - подгруппа в $G_2(\mathbb{C})$ и

$$B = CN = NC \quad (I.8)$$

- максимальная разрешимая (=борелевская= минимальная параболическая) подгруппа в $G_2(\mathbb{C})$. Имеет место разложение $G_2(\mathbb{C})$ в дизъюнктное объединение - разложение Брюа -

$$G_2(\mathbb{C}) = \bigcup_{z \in S} U B z B \quad (I.9)$$

4°. Одномерные представления группы N .

Если $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ и

$$e(z) = \exp\{2\pi i (z + \bar{z})\}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (I.10)$$

то отображение

$$n(v_1, v_2, \dots, v_6) \mapsto e(\mu v_1 + \nu v_2) \quad (I.11)$$

является одномерным комплексным представлением группы N . Других одномерных комплексных представлений группа N не имеет.

5°. Разложение группы N .

Пусть N_1 - множество всех матриц n_1 вида

$$n_1 = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & \sqrt{2}u_3 & \sqrt{2}u_2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}u_1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_3 \\ \hline -\sqrt{2}u_1 & -u_1u_3 & -u_1u_2 & 1 & -u_2 & u_3 & -u_1^2 \\ -\sqrt{2}u_3 & -u_3^2 & -u_1u_2u_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}u_2 & u_1 - u_2u_3 & -u_2^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (I.12)$$

и N_0 - множество всех матриц n_0 вида

$$n_0 = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \hline 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array} \right), \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z_3 \\ -z_1 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (I.13)$$

$$u_j, z_j \in \mathbb{C}, \quad j=1,2,3.$$

Тогда

$$N_0 N_1 = N_1 N_0 = N \quad (I.14)$$

(каждый элемент из N представим однозначно в виде $n_0 n_1$ с $n_0 \in N_0$, $n_1 \in N_1$ и в виде $n_1 n_0$, $n_0 \in N_0$, $n_1 \in N_1$). Это проверяется непосредственными вычислениями. N_0 - подгруппа в N .

6°. Вложение $SL(3, \mathbb{C})$ в $G_2(\mathbb{C})$.

Для $\sigma \in SL(3, \mathbb{C})$ положим

$$\sigma_* = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \hline 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array} \right) \in SL(7, \mathbb{C}). \quad (I.15)$$

Пусть $SL(3, \mathbb{C})_*$ - образ $SL(3, \mathbb{C})$ относительно мономорфизма * определенного (I.15). Покажем, что

$$SL(3, \mathbb{C})_* = G_2(\mathbb{C}). \quad (I.16)$$

Воспользуемся для этого равенством

$$SL(3, \mathbb{C})_* = \bigcup_{z \in W} U N_0 C z C N_0. \quad (I.17)$$

которое, по-существу, является разложением Бруа для $SL(3, \mathbb{C})$ *). Из разложения Бруа (I.9) и формул (I.14), (I.8), (I.17) находим:

$$\begin{aligned} SL(3, \mathbb{C})_* &= \bigcup_{z \in W} N_1 N_0 C z C N_0 N_1 = \\ &= \bigcup_{z \in W} U B z B = G_2(\mathbb{C}), \end{aligned}$$

что и требовалось.

7⁰. Следствие разложения Бруа.

Имеет место разложение группы $G_2(\mathbb{C})$ в дизъюнктное объединение

$$G_2(\mathbb{C}) = N_1 SL(3, \mathbb{C})_* N_1 \cup N_1 SL(3, \mathbb{C})_* p_0 N_1 \quad (I.18)$$

в котором

$$p_0 = (p_1 p_2)^3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & -1 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & \end{array} \right) \in S \setminus W \quad (I.19)$$

Для доказательства (I.18) достаточно (смотрите (I.7), (I.9)) проверить два равенства:

$$\bigcup_{z \in W} U B z B = N_1 SL(3, \mathbb{C})_* N_1, \quad (I.20)$$

$$\bigcup_{z \in W} B z B = N_1 SL(3, \mathbb{C})_* p_0 N_1, \quad (I.21)$$

*) W является образом относительно * группы Вейля группы $SL(3, \mathbb{C})$.

с каким-либо $\tilde{p} \in S \setminus W$. Ради краткости ограничимся доказательством (I.21). Сначала заметим, что

$$\tilde{p}C = C\tilde{p}, \quad \tilde{p}N_0 = N_0\tilde{p}, \quad (I.22)$$

где

$$\tilde{p} = \varepsilon_* p_0 \in S \setminus W, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (I.23)$$

Очевидно,

$$SL(3, \mathbb{C})_* \tilde{p} = SL(3, \mathbb{C})_* p_0. \quad (I.24)$$

Далее имеем (смотрите (I.14), (I.8), (I.17), (I.22), (I.24)):

$$\begin{aligned} \bigcup_{z \in W} zB &= \bigcup_{z \in W} N_1 N_0 C z \tilde{p} C N_0 N_1 = \\ &= \bigcup_{z \in W} N_1 (N_0 C z C N_0) \tilde{p} N_1 = \\ &= N_1 SL(3, \mathbb{C})_* \tilde{p} N_1 = N_1 SL(3, \mathbb{C})_* p_0 N_1. \end{aligned}$$

что и требовалось.

8°. Еще одно разложение группы $G_2(\mathbb{C})$.

Имеет место разложение группы $G_2(\mathbb{C})$ в дизъюнктное объединение

$$G_2(\mathbb{C}) = N_1 SL(3, \mathbb{C})_* N_2 \cup N_1 SL(3, \mathbb{C})_* N_3, \quad (I.25)$$

в котором N_1 как в пункте 5°, N_2 - множество всех матриц вида

$$n_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2}u_1 & -\sqrt{2}u_3 & -\sqrt{2}u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 & 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}u_1 & u_2 & -u_3 & u_1^2 & u_1 u_3 & u_1 u_2 & -1 \\ \sqrt{2}u_3 & -1 & 0 & 0 & u_3^2 & u_1 + u_2 u_3 & 0 \\ \sqrt{2}u_2 & 0 & -1 & 0 & -u_1 + u_2 u_3 & u_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (I.26)$$

N_3 - множество всех матриц вида

$$n_3 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} u_1 & \sqrt{2} u_3 & \sqrt{2} u_2 & 0 \\ \hline -\sqrt{2} u_1 & 1 & 0 & -u_1 u_3 & -u_3^2 & -u_1 u_2 u_3 & 0 \\ \sqrt{2} u_2 & 0 & 1 & -u_1 u_2 & u_1 - u_2 u_3 & -u_2^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \sqrt{2} u_4 & -u_2 & u_3 & -u_1^2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (I.27)$$

$u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$.

Для доказательства заметим, что

$$n_1 \rho_0^{-1} = n_2, \quad \rho_0 n_1 \rho_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -u_1 u_3 & -u_2 u_1 & 1 \end{pmatrix} n_3,$$

если n_1, n_2, n_3 из (I.12), (I.26), (I.27). Умножив разложение (I.18) справа на ρ_0^{-1} и воспользовавшись этим замечанием получаем (I.25).

9°. Последняя строка.

Вектор строка

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$$

является последней строкой некоторой матрицы из $G_2(\mathbb{C})$ в том и только в том случае, если

$$c_1^2 = -2(c_2 c_5 + c_3 c_6 + c_4 c_7). \quad (I.28)$$

Доказательство получается непосредственными вычислениями основывающимися на разложении (I.25).

10°. Два замечания

Отметим, что

$$\rho_0 N \rho_0^{-1} = {}^t N, \quad (I.29)$$

$$N_3 = {}^t N_1 \quad (I.30)$$

(t обозначает транспонирование). Эти равенства проверяются очевидным образом.

II⁰. Два вложения группы $SL(2, \mathbb{C})$ в $G_2(\mathbb{C})$. Если

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (I.31)$$

то

$$\check{\sigma} = \begin{pmatrix} 1+2bc & -\sqrt{2}bd & 0 & 0 & \sqrt{2}ac & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}cd & d^2 & 0 & 0 & -c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & -b & 0 \\ \hline \sqrt{2}ab & -b^2 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in G_2(\mathbb{C}), \quad (I.32)$$

и

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 1+2bc & 0 & \sqrt{2}bd & 0 & 0 & -\sqrt{2}ac & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ \sqrt{2}cd & 0 & d^2 & 0 & 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -b & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -c & d & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}ab & 0 & -b^2 & 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in G_2(\mathbb{C}), \quad (I.33)$$

Для доказательства заметим, что

$$\hat{\sigma} = p_2 \check{\sigma} p_2^{-1}, \quad (I.34)$$

где p_2 из (I.6), и что для $\check{\sigma}$ имеет место разложение

$$\check{\sigma} = n_1 h_* n_3 \quad (I.35)$$

в котором:

$$n_1 \quad \text{из (I.12) с} \quad u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{b}{d},$$

$$n_3 \quad \text{из (I.27) с} \quad u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{c}{d},$$

$$h = \begin{pmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Разложения (I.25) и (I.35) обеспечивают $\check{\delta} \in G_2(\mathbb{C})$. И, далее, из (I.34) и $p_2 \in G_2(\mathbb{C})$ следует $\check{\delta} \in G_2(\mathbb{C})$.

Отображения $\check{\nu}$ и $\check{\wedge}$ являются мономорфизмами групп. Мы оставляем читателю проверить это.

§ 2. Дискретная подгруппа

Пусть \mathcal{O} - кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ и \mathfrak{q} - идеал в \mathcal{O} . Матрицы

$$(a_{ij}) \in G_2(\mathbb{C}) \quad (2.1)$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & a_{ii} \in 1 + \mathfrak{q}, \quad i=1, \dots, 2, \\ \text{(b)} \quad & a_{1i}, a_{i1} \in \sqrt{2}\mathfrak{q}, \quad i=2, \dots, 2, \\ \text{(c)} \quad & a_{ij} \in \mathfrak{q}, \quad i, j=2, \dots, 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (2.2)$$

составляют дискретную подгруппу $\Gamma(\mathfrak{q})$ в $G_2(\mathbb{C})$; мы будем обозначать ее через Γ в случае когда $\mathfrak{q}=(3)$ и через $G_2(\mathcal{O})$ в случае, когда $\mathfrak{q}=(1)$. Если \mathfrak{q} обозначает не идеал в \mathcal{O} , а какое-либо подкольцо в \mathcal{O} , то группу определяемую условиями (2.2) мы обозначаем через $G_2(\mathfrak{q})$; например, $G_2(\mathbb{Z})$ - подгруппа в $G_2(\mathbb{C})$ состоящая из всех матриц удовлетворяющих (2.2) с \mathbb{Z} вместо \mathfrak{q} . (Множитель $\sqrt{2}$ в условии (b) обеспечивает компактность фактора $N\Gamma(\mathfrak{q}) \backslash N$.)

Ниже мы определяем некоторые подгруппы в Γ и доказываем ряд утверждений, которые должны обеспечить возможность вычисления коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна на $G_2(\mathbb{C})/G_2(\mathbb{C}) \cap SU(2)$ автоморфных относительно Γ .

Обозначения из § I сохраняются.

Всюду далее

$$\begin{aligned} \mathcal{O} & \text{ - кольцо целых чисел поля } \mathbb{Q}(\sqrt{3}); \\ \mathfrak{q} & \text{ - идеал в } \mathcal{O} \text{ порожденный } 3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

\mathcal{O} из (2.3) — кольцо главных идеалов, с алгоритмом Евклида и с однозначным разложением на простые множители. Группа \mathcal{O}^* единиц кольца \mathcal{O} содержит 6 элементов, — это корни уравнения $\xi^6 = 1$. Для каждого $c \in \mathcal{O}$, $c \neq 0$, существует и единственно разложение вида

$$c = \xi (\sqrt{3})^n c', \quad (2.4)$$

$\xi \in \mathcal{O}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $c' \in 1 + q$. В частности, если $c \in 1 + q$ и $c \in \mathcal{O}^*$, то $c = 1$. Для a_1, a_2, \dots, a_m из которых не все равны 0 мы обозначаем через

$$\text{Ног}(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

число $c \in \mathcal{O}$ порождающее идеал $(a_1) + (a_2) + \dots + (a_m)$ и имеющее в разложении (2.4) $\xi = 1$. (Теория квадратичных полей изложена в [2].)

1°. Подгруппа $\tilde{\Gamma}$.

Полюжим

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap \text{SL}(3, \mathbb{C})_* \quad (2.5)$$

Очевидно, $\tilde{\Gamma}$ — образ относительно $*$ главной конгруэнцподгруппы $\text{mod } q$ в $\text{SL}(3, \mathcal{O})$.

2°. Группы Δ_j .

Полагаем

$$\Delta_0 = B \cap \Gamma, \quad (2.6)$$

B — борелевская подгруппа в $G_2(\mathbb{C})$, смотрите пункт 3°, §1. Вместе с тем, легко показать, что

$$\Delta_0 = N \cap \Gamma. \quad (2.7)$$

Далее,

$$\Delta_1 = \{ (a_{ij}) \in \Gamma \mid a_{zz} = 0, j = 1, \dots, 6; a_{zz} = 1 \}, \quad (2.8)$$

— это подгруппа в Γ , которую можно охарактеризовать также как пересечение $B' \cap \Gamma$, где B' — некоторая максимальная параболическая подгруппа в $G_2(\mathbb{C})$.

Наконец,

$$\Delta_2 \text{ — подгруппа в } \Gamma \text{ порожденная } \Delta_1 \text{ и } \tilde{\Gamma}. \quad (2.9)$$

Очевидно,

$$\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \Delta_2 \quad (2.10)$$

3°. Построение матрицы $\gamma \in \Gamma$ по последней строке.

Пусть вектор строка

$$(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7) \quad (2.11)$$

удовлетворяет условиям:

$$C_1 \in \sqrt{2} \mathfrak{q}; C_2, C_3, \dots, C_6 \in \mathfrak{q}; C_7 \in 1 + \mathfrak{q}; \quad (2.12)$$

$$C_1^2 = -2(C_2 C_5 + C_3 C_6 + C_4 C_7); \quad (2.13)$$

$$(C_5) + (C_6) + (C_7) = \mathcal{O}. \quad (2.14)$$

Пусть δ — матрица из главной конгруэнцподгруппы $\text{mod } \mathfrak{q}$ в $\text{SL}(3, \mathcal{O})$ с последней строкой (C_5, C_6, C_7) :

$$\delta = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ C_5 & C_6 & C_7 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

(Существование такой матрицы δ обеспечивается (2.12), (2.14)). Мы утверждаем, что существует такая матрица $n \in N_3 \cap \Gamma$, что

$$\gamma = n \delta_x \quad (2.16)$$

имеет нижней строкой вектор (2.11). Это означает, в частности, что каждый вектор (2.11) удовлетворяющий (2.12), (2.13), (2.14) является последней строкой некоторой матрицы $\gamma \in \Gamma$. (Условия (2.12), (2.13) нельзя опустить. Однако, в Γ есть матрицы γ с последней строкой не удовлетворяющей (2.14); такие γ конечно не представлены в виде (2.16)). Докажем наше утверждение.

Пусть $n = n_3$ из (1.27) и пусть

$$(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_7)$$

последняя строка матрицы $n \delta_x$. Перемножая находим:

$$\tilde{c}_1 = -\sqrt{2} u_1 \quad (2.17)$$

$$\tilde{c}_j = c_j, \quad j=5,6,7;$$

$$(-u_2, u_3, -u_1^2) = (\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4)^t \delta. \quad (2.18)$$

Равенства

$$\tilde{c}_j = c_j, \quad j=2,3,4$$

будут обеспечены, если определить u_1, u_2, u_3 из равенства

$$(-u_2, u_3, -u_1^2) = (c_2, c_3, c_4)^t \delta. \quad (2.19)$$

Очевидно, что определяемые отсюда u_2, u_3 принадлежат \mathfrak{q} . В

том, что касается u_1 , равенство (2.19) эквивалентно:

$$-u_1^2 = c_2 c_5 + c_3 c_6 + c_4 c_7.$$

Ввиду (2.13), (2.17) мы можем и должны взять

$$u_1 = -\frac{c_1}{\sqrt{2}} \in \mathfrak{q}. \quad (2.20)$$

При этом $n \in N_3 \cap \Gamma$ и

$$\tilde{c}_j = c_j, \quad j=1, \dots, 7,$$

что и требовалось.

Отметим, что в разложении (2.16) матрица n однозначно определяется по вектору (2.11) и матрице (2.15) равенствами (2.19), (2.20) и даже одним только равенством (2.19).

4°. 0 классах из Γ/Δ_0 .

Пусть

$$(c_1, c_2, \dots, c_7) \quad (2.21)$$

- последняя строка матрицы $\gamma \in \Gamma$, $n \in \Delta_0$ и

$$(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_7) \quad (2.22)$$

- последняя строка матрицы γn .

Если

$$c_1 = c_4 = c_5 = c_6 = 0, \quad (2.23)$$

то также

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_4 = \tilde{c}_5 = \tilde{c}_6 = 0 \quad (2.24)$$

(проверяется непосредственно умножением).

Мы утверждаем, что во всех случаях отличных от (2.23) матрицу $n \in \Delta_0$ можно подобрать так, что

$$(\tilde{c}_5) + (\tilde{c}_6) + (\tilde{c}_7) = 0. \quad (2.25)$$

Другими словами, каждый класс из Γ/Δ_0 либо состоит из матриц γ с последней строкой вида

$$(0, c_2, c_3, 0, 0, 0, c_7), \quad (2.26)$$

либо содержит матрицу γ удовлетворяющую условию (2.14).

Для построения доказательства нам будет удобно рассмотреть раздельно следующие три случая:

- (а) $C_4 \neq 0$; $C_1 \neq 0$;
 (в) $C_4 \neq 0$; $C_1 = 0$; (2.27)
 (с) $C_4 = 0$; $C_5 \neq 0$ или $C_6 \neq 0$.

В случаях (а) и (с) мы сможем подобрать необходимую матрицу n в $\Gamma \cap N_1 \subset \Delta_0$, причем так, что $n = n_1$, с $u_1 = 0$ (смотрите (I.12)). Случай (в) сводится к (а). Случаи (а), (в) и (с) будут рассмотрены в пунктах 5^o, 6^o и 7^o.

Если строка (2.27) не удовлетворяет ни одному из условий (2.27), то она имеет вид (2.26) (это следует из (I.28)).

Умножив γ на $n = n_1 \in \Gamma \cap N_1$ из (I.12) мы находим:

$$\tilde{C}_1 = C_1 - \sqrt{2} C_4 u_1, \quad \text{если } u_2 = u_3 = 0; \quad (2.28)$$

$$\tilde{C}_4 = C_4; \quad (2.29)$$

$$\tilde{C}_5 = C_5 - C_4 u_2; \quad (2.30)$$

$$\tilde{C}_6 = C_6 + C_4 u_3; \quad (2.31)$$

$$\tilde{C}_7 = C_7 + C_4 u_2 - C_3 u_3, \quad \text{если } u_1 = 0. \quad (2.32)$$

Отметим, что

$$\text{Hog}(C_1, C_2, \dots, C_7) = 1, \quad (2.33)$$

- так как иначе $\det \gamma \neq 1$ и что

$$\text{Hog}(C_2, C_3, \dots, C_7) = 1, \quad (2.34)$$

- следует из (2.33) и (I.28).

5^o. Случай (а).

Мы ищем $n = n_1 \in \Gamma \cap N_1$ из (I.12) с $u_1 = 0$ с тем, чтобы имело место (2.25).

Будем искать u_j в виде

$$u_j = 3x_j, \quad x_j \in \mathcal{O}, \quad j = 2, 3. \quad (2.35)$$

Пусть

$$a = \text{Hog}(C_2, C_3, C_4), \quad b = \text{Hog}(3C_4, C_5), \quad d = \text{Hog}(3C_4, C_6);$$

$$c'_4 = 3C_4 b^{-1}, \quad c'_5 = C_5 b^{-1}, \quad c''_4 = 3C_4 d^{-1}, \quad c''_6 = C_6 d^{-1}; \quad (2.36)$$

$$c'_j = c_j a^{-1}, \quad j = 2, 3, 7.$$

В этих обозначениях (2.30), (2.31), (2.32) принимают вид:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_5 &= b(c'_5 - c'_4 x_2), \\ \tilde{c}_6 &= a(c''_6 - c''_4 x_3), \\ \tilde{c}_7 &= a(c'_7 + 3c'_2 x_2 - 3c'_3 x_3).\end{aligned}\quad (2.37)$$

Из равенства (1.28) и формул (2.30), (2.31), (2.32) находим

$$c_1^2 = -2(c_2 \tilde{c}_5 + c_3 \tilde{c}_6 + c_4 \tilde{c}_7). \quad (2.38)$$

Отсюда видно, что общий делитель чисел $\tilde{c}_5, \tilde{c}_6, \tilde{c}_7$ является делителем c_1 . Нам достаточно, следовательно, подобрать $x_2, x_3 \in \mathcal{O}$ таким образом, чтобы

$$\text{Hog}(\tilde{c}_5, \tilde{c}_6, \tilde{c}_7, c_1) = 1. \quad (2.39)$$

Пусть p - простой делитель числа c_1 , $p \neq \sqrt{-3}$. Поскольку

$$\text{Hog}(c'_4, c'_5) = \text{Hog}(c''_4, c''_6) = 1,$$

имеем:

- если $p \mid c'_4$, то $\text{Hog}(c'_5 - c'_4 x_2, p) = 1$ для всех x_2 ;
- если $p \nmid c'_4$, то $\text{Hog}(c'_5 - c'_4 x_2, p) = 1$ для всех $x_2 \not\equiv c_4^{-1} c'_5 \pmod{p}$;
- если $p \mid c''_4$, то $\text{Hog}(c''_6 - c''_4 x_3, p) = 1$ для всех x_3 ;
- если $p \nmid c''_4$, то $\text{Hog}(c''_6 - c''_4 x_3, p) = 1$ для всех $x_3 \not\equiv c_4^{-1} c''_6 \pmod{p}$;

Таким образом,

$$\text{Hog}(c'_5 - c'_4 x_2, p) = 1 \quad (2.40)$$

для всех $x_2 \in \mathcal{O}$ за исключением, быть может, $x_2 \equiv \alpha \pmod{p}$
для какого-нибудь одного α . Точно так же,

$$\text{Hog}(c''_6 - c''_4 x_3, p) = 1 \quad (2.41)$$

для всех $x_3 \in \mathcal{O}$ за исключением, быть может, $x_3 \equiv \beta \pmod{p}$
для какого-нибудь одного β . Далее, если

$$p \mid (c'_7 + 3c'_2 x_2 - 3c'_3 x_3) \quad (2.42)$$

для всех $x_2 \not\equiv \alpha \pmod{p}$ и $x_3 \not\equiv \beta \pmod{p}$, то

$$p \mid \text{Hog}(c'_7, 3c'_2, 3c'_3),$$

а это невозможно ввиду (2.36). Отсюда следует, что существуют такие $x_2, x_3 \in \mathcal{O}$, что имеют место (2.40), (2.41) и

$$\rho + (c'_7 + 3c'_2 x_2 - 3c'_3 x_3). \quad (2.43)$$

Эти x_2 и x_3 можно заменить на любые другие лежащие в тех же классах $\text{mod } \rho$ с сохранением свойств (2.40), (2.41), (2.43).

Перебрав так все простые делители $\rho \neq \sqrt{-3}$ числа C_1 и воспользовавшись китайской теоремой об остатках мы получаем такие $x_2, x_3 \in \mathcal{O}$, что каждое из чисел

$$c'_5 - c'_4 x_2, \quad c''_6 - c''_4 x_3, \quad c'_7 + 3c'_2 x_2 - 3c'_3 x_3 \quad (2.44)$$

не имеет с C_1 общих простых делителей за исключением быть может $\sqrt{-3}$. Отметим также, что последнее из чисел (2.44) не делится на $\sqrt{-3}$. С такими x_2, x_3 мы получаем из (2.36), (2.37), (2.33):

$$\begin{aligned} \text{Hog}(\tilde{c}_5, \tilde{c}_6, \tilde{c}_7, C_1) &= \text{Hog}(b, d, a, c_1) = \\ &= \text{Hog}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) = 1. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, отсюда следует

$$\text{Hog}(\tilde{c}_5, \tilde{c}_6, \tilde{c}_7) = 1,$$

что и требовалось.

6°. Случай (в).

Умножим γ на матрицу $n = n_i \in \Gamma \cap N_1$ из (I.12) с $u_2 = u_3 = 0$ и $u_1 \neq 0$. Согласно (2.28), (2.29) в последней строке матрицы γn первый и четвертый элементы отличны от 0. Следовательно, мы можем применить к γn результат пункта 5°.

7°. Случай (с).

В соответствии с (2.30), (2.31), (2.32) нам достаточно подобрать $u_2, u_3 \in \mathcal{O}$ так, чтобы

$$\text{Hog}(c_5, c_6, c_7 + c_2 u_2 - c_3 u_3) = 1. \quad (2.45)$$

Пусть

$$d = \text{Hog}(c_2, c_3), \quad c'_j = c_j d^{-1}, \quad j=2,3. \quad (2.46)$$

Будем искать u_j в виде

$$u_j = 3x_j, \quad x_j \in \mathcal{O}, \quad j=2,3.$$

В этих обозначениях

$$c_4 + c_2 u_2 - c_3 u_3 = c_4 + 3d(c_2' x_2 - c_3' x_3).$$

Поскольку $\text{Hog}(c_2', c_3') = 1$, уравнение $c_2' x_2 - c_3' x_3 = t$ разрешимо с $x_2, x_3 \in \mathcal{O}$ при любом $t \in \mathcal{O}$. Поэтому нам достаточно доказать существование такого $t \in \mathcal{O}$, что

$$\text{Hog}(c_5, c_6, c_4 - 3dt) = 1. \quad (2.47)$$

Поскольку $c_5 \neq 0$ или $c_6 \neq 0$ равенство (2.47) имеет место при каком-либо $t \in \mathcal{O}$ в том и только в том случае, если

$$\text{Hog}(c_5, c_6, c_4) = 1. \quad (2.48)$$

Поскольку $\text{Hog}(c_4, 3) = 1$, $c_4 = 0$, (2.48) следует из (2.46), (2.34).

3°. Построение матрицы $\gamma \in \Gamma$ по последней строке.

Одна конструкция предложена в пункте 3°. Вопрос, однако, не был решен полностью - условие (2.14) слишком ограничительно.

Здесь мы предлагаем еще одну конструкцию, которая очень ограничена, но позволяет нам построить матрицу $\gamma \in \Gamma$ с последней строкой как в (2.26). Мы таким образом получаем представителей тех классов из Γ/Δ_0 , которые были исключены из рассмотрения в пункте 4°. Итак, пусть

$$c_2, c_3 \in q; c_2 \neq 0 \quad \text{или} \quad c_3 = 0; c_4 \in 1 + q \quad (2.49)$$

Положим $\ell = \text{Hog}(c_2, c_3)$. Построим

$$\sigma = \begin{pmatrix} x & x \\ \ell & c_4 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} x & x & x \\ -c_3 \ell^{-1} & c_2 \ell^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

так что $\delta \in \text{SL}(3, \mathcal{O})$, а σ лежит в главной конгруэнцподгруппе $\text{mod } q$ в $\text{SL}(2, \mathcal{O})$. После этого легко находим, что

$$\gamma = \delta_*^{-1} \hat{\sigma} \delta_* \in \Gamma \quad (2.51)$$

и что последняя строка матрицы γ есть

$$(0, c_2, c_3, 0, 0, 0, c_4) \quad (2.52)$$

Наконец, если в (2.26) $c_2 = c_3 = 0$, то $c_4 = 1$ и в качестве γ можно взять единичную матрицу.

Литература

1. H. Bass, J. Milnor and S. J. Serre, "Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n (n \geq 3)$ and $Sp_{2n} (n \geq 2)$ ". Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., No. 33 (1967), 59-137.
2. З.И.Боревич, И.П.Шафаревич, Теория чисел, Москва, "Наука", 1972.
3. C. Chevalley, Theory of Lie groups. I, Princeton Math. Series, Vol. 8, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1946.
4. C. Chevalley, Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J. 7 (1955), 14-66.
5. Séminaire Chevalley, Classification des groupes de Lie algébriques, Secrétariat Math., Paris, 1958.
6. K. I. Gross, The Plancherel transform on the nilpotent part of G_2 and some applications to the representation theory of G_2 , Transactions of the American Mathematical Society, v. 132, N 2, 1968, с. 411-446.
7. N. Jacobson, Cayley numbers and simple Lie algebras of type G_2 , Duke Math. J. 5 (1939), 775-783.
8. N. Jacobson, Composition algebras and their automorphisms, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 7 (1958), 55-80.
9. D. A. Kazhdan and S. J. Patterson, "Metaplectic forms", Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., No. 59 (1984), 35-142.
10. T. Kubota "On automorphic functions and the reciprocity law in a number theory", Lectures in Math., Kyoto Univ., No. 2, (1969).
11. S. J. Patterson, "A cubic analogue of the theta series I, II", J. Reine Angew. Math. 296 (1977), 125-161, 217-220.
12. Н.В.Проскурин, "Автоморфные функции и гомоморфизм Басса-Милнора-Серра, I, II", в кн. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 123, Автоморфные функции и теория чисел, I, (1983), с. 85-126, 127-163. (Translation from Russian to English: Journal of Soviet Mathematics. v. 29, No. 2, april 1985, 115-1191, 1192-1218).
13. N. V. Proskurin, On cubic symplectic metaplectic forms, preprint LOMI E-I-87, Leningrad, 1987.