Л. Н. Пестов, В. А. Шарафутдинов, Интегральная геометрия тензорных полей на многообразии отрицательной кривизны,
Сиб. матем. журн., 1988, том 29, номер 3, 114–130

https://www.mathnet.ru/smj7444

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXIX, № 3 МАЙ — ИЮНЬ 1988

УДК 517.9 : 513.516

Л. Н. ПЕСТОВ, В. А. ШАРАФУТДИНОВ

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ НА МНОГООБРАЗИИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Введение

Многие задачи таких прикладных дисциплин, как томография, математическая теория переноса, сейсмология и теоретическая фотометрия, приводят к вопросам, подобным следующему.

Пусть риманово многообразие M является рассеивающим, т. е. каждая геодезическая покидает рано или поздно любой компакт. Тогда для финитного симметричного тензорного поля $f=(f_{i_1\ldots i_m})$ степени m на M и любой геодезической γ определен интеграл

$$If(\gamma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{i_1\ldots i_m}(\gamma(t))\,\dot\gamma^{i_1}(t)\ldots\dot\gamma^{i_m}(t)\,dt.$$

Спрашивается, насколько однозначно поле f определяется совокупностью чисел $If(\gamma)$, где γ пробегает множество всех геодезических?

Представляется весьма вероятным такой простой ответ на этот вопрос: совокупность чисел $If(\gamma)$ определяет поле f с точностью до аддитивного слагаемого вида dv, где v — произвольное финитное симметричное тензорное поле степени $m-1$, d — симметричная часть ковариантной производной, т. е. $d=\sigma\nabla$ (∇ — оператор ковариантного дифференцирования, σ — симметрирование). Мы называем d оператором внутреннего дифференцирования по аналогии с оператором $d=\alpha\nabla$ (α — альтернирование) на кососимметричных тензорных полях (т. е. внешних дифференциальных формах). Одинаковое обозначение для этих двух операторов не должно привести к недоразумению, поскольку их области определения различны.

Выдвинутая гипотеза к настоящему времени доказана для $m=0$, 1 при условии регулярности поля геодезических на носителе f [1—3], а также для евклидова пространства при произвольном m [4—6].

В настоящей работе эта гипотеза доказывается при произвольном m для многообразия неположительной секционной кривизны. Формулировка установленного нами результата (теорема 2.2) несколько отличается от приведенной выше. Отличие состоит в том, что M предполагается компактным многообразием со строго выпуклым краем ∂M; при этом на поле v, о котором шла речь выше, накладывается дополнительное условие $v|_{\partial M}=0$. Эти изменения в постановке задачи позволяют получить не только указанный результат, но и соответствующую оценку устойчивости. Предлагаемый метод, как легко видеть, годится и для доказательства гипотезы в том виде, как она сформулирована выше.

§ 1. Оператор внутреннего дифференцирования

Пусть M — риманово многообразие размерности $n\geqslant 2$ с краем ∂M и метрическим тензором g, которые предполагаем гладкими (т. е. бесконечно дифференцируемыми), T и T' — соответственно касательное и кокасательное расслоения M. Метрика g позволяет установить канонический изоморфизм этих расслоений, поэтому мы будем иногда их отождествлять. Точки многообразия T будем записывать в виде пары (x, ξ), где $x \in M$, $\xi \in T_x$, T_x — касательное пространство к M в точке x. Пусть $\otimes^m T' \otimes C$ — расслоение комплексных ковариантных тензоров степени m. Здесь C — поле комплексных чисел, тензорное произведение берется над R. Через $S^m T'$ обозначим подрасслоение в $\otimes^m T' \otimes C$, состоящее из симметричных тензоров, $\sigma\colon \otimes^m T' \otimes C \to S^m T'$ — проекция, определяемая равенством

$$\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi} v_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\pi(m)},$$

где сумма берется по всем перестановкам π множества $\{1, \ldots, m\}$. Отметим, что $S^1T' = T' \otimes C$, $S^0 T' = M \times C$. Считаем также, что $\otimes^m T' = S^m T' = 0$ при $m < 0$. Через $S^m T'|_{\partial M}$ обозначим ограничение расслоения $S^m T'$ на ∂M, т. е. прообраз $i^*(S^m T')$, где $i\colon \partial M \to M$ — вложение.

Мы будем использовать одинаковые символы для обозначения векторного расслоения и его пространства. Слой расслоения E в точке x обозначим через E_x, алгебру гладких комплексных функций на $U \subset M$ — через $C^\infty(U)$. Для гладкого комплексного векторного расслоения E над M символом $C^\infty(E, U)$ обозначим $C^\infty(U)$-модуль гладких сечений E над U. Обозначение $C^\infty(E, M)$ будем сокращать до $C^\infty(E)$. Элементы пространства $C^\infty(S^m T', U)$ называются *симметричными тензорными полями* или *внутренними дифференциальными формами степени m на U*.

Для $u \in S^m T'_x, v \in S^l T'_x$ через uv обозначим симметричное произведение u и v, т. е. $uv = \sigma(u \otimes v)$. Это произведение коммутативно, гладко зависит от x и превращает $S^* T' = \bigoplus_{m=0}^{\infty} S^m T'$ в расслоение градуированных алгебр.

Мы часто будем использовать координатное представление тензоров. Если $x^1, \ldots, x^n$ — локальная система координат с областью определения $U \subset M$, то поле $u \in C^\infty(\otimes^m T' \otimes C, U)$ однозначно представимо в виде $u = u_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_m}$, причем здесь так же, как и во всех формулах ниже, действует обычное соглашение о суммировании от 1 до n по одноименным повторяющимся сверху и снизу индексам, $u_{i_1 \ldots i_m}$ — гладкие комплексные функции точки $x \in U$, называемые *ковариантными координатами* (или *компонентами*) поля u в данной системе координат. Предполагая выбор системы координат ясным из контекста (или произвольным), последнее равенство сокращаем до следующего: $u = (u_{i_1 \ldots i_m})$. *Контравариантные координаты* задаются формулой $u^{i_1 \ldots i_m} = g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_m j_m} u_{j_1 \ldots j_m}$, (g^{ij}) — матрица, обратная (g_{ij}).

На $S^m T'_x$ существует естественное скалярное произведение, определяемое в координатах формулой $(u, v) = u^{i_1 \ldots i_m} \bar{v}_{i_1 \ldots i_m}$. Продолжим это скалярное произведение на $S^* T'_x$, объявив $S^m T'_x$ и $S^l T'_x$ ортогональными друг другу при $m \neq l$. Полученное скалярное произведение гладко зависит от x и превращает $S^* T'$ в эрмитово векторное расслоение.

Для $\xi \in T'_x$ обозначим через $i_\xi\colon S^* T'_x \to S^* T'_x$ оператор умножения на ξ, т. е. $i_\xi u = \xi u$. Пусть j_ξ — сопряженный к i_ξ оператор. Непосредственным вычислением в координатах легко проверяется справедливость на $S^m T'_x$ равенства

$$(m+1) j_\xi i_\xi = \|\xi\|^2 E + m i_\xi j_\xi, \tag{1.1}$$

где E — тождественный оператор.

Через $\nabla\colon C^\infty(\otimes^m T' \otimes C) \to C^\infty(\otimes^{m+1} T' \otimes C)$ обозначим оператор ковариантного дифференцирования на M [7], а через $\nabla u = (\nabla_j u_{i_1 \ldots i_m})$ — координаты поля ∇u. Будем использовать также обозначение $\nabla^i = g^{ij} \nabla_j$.

Оператор внутреннего дифференцирования d: $C^\infty(S^*T') \to C^\infty(S^*T')$ задается равенством $d = \sigma\nabla$.

Оператор дивергенции δ: $C^\infty(S^*T') \to C^\infty(S^*T')$ определяется в координатах равенством $(\delta u)_{i_1 \ldots i_{m-1}} = \nabla^{i_m} u_{i_1 \ldots i_m}$.

Оператор $d(\delta)$ является дифференциальным оператором на расслоении S^*T' порядка 1 и степени 1 (-1).

Нетрудно доказать, что d и $-\delta$ формально сопряжены [8]. Более того, для компактной области $G \subset M$, ограниченной кусочно-гладкой гиперповерхностью ∂G, и любых u, $v \in C^\infty(S^*T')$ имеет место формула Грина

$$\int_G [(u, dv) + (\delta u, v)]\, dV^n = \int_{\partial G} (j_\nu u, v)\, dV^{n-1}, \tag{1.2}$$

где dV^n — риманов объем на M, dV^{n-1} — риманов объем на ∂G, ν — единичный вектор внешней нормали к ∂G.

Пусть γ: $(a, b) \to M$ — геодезическая. Пользуясь тем, что касательный вектор $\dot\gamma(t)$ параллелен вдоль γ, т. е. $\dot\gamma^i \nabla_i \dot\gamma^j = 0$, легко установить для $u = C^\infty(S^mT')$ справедливость равенства

$$\frac{d}{dt}\left[u_{i_1 \ldots i_m}(\gamma(t))\, \dot\gamma^{i_1}(t) \ldots \dot\gamma^{i_m}(t)\right] = \\ = (du)_{i_1 \ldots i_{m+1}}(\gamma(t))\, \dot\gamma^{i_1}(t) \ldots \dot\gamma^{i_{m+1}}(t). \tag{1.3}$$

Если M компактно, то для любого гладкого расслоения E над M и целого $s \geqslant 0$ определено топологическое гильбертово пространство $H^s(E)$ сечений [9], компоненты которых имеют обобщенные локально интегрируемые в квадрате производные до порядка s. Зафиксировав конечный атлас на M и подчиненное ему разбиение единицы, снабдим $H^s(S^mT')$ и $H^s(S^mT'|_{\partial M})$ структурой гильбертовых пространств. Нормы в этих пространствах будем обозначать через $\|\cdot\|_s$. Напомним, что для $s \geqslant 1$ оператор следа $H^s(S^mT') \to H^{s-1}(S^mT'|_{\partial M})$, $u \to u|_{\partial M}$ ограничен. Символом $\mathring{H}^s(S^mT')$ обозначим ядро этого оператора.

Следующая теорема обобщает на симметричные тензорные поля произвольной степени хорошо известный факт о разложении векторного поля $(m = 1)$ на потенциальную и соленоидальную части.

Теорема 1.1. *Пусть M компактно, $s \geqslant 1$ целое. Для любого поля $u \in H^s(S^mT')$ существуют такие однозначно определенные поля $v \in \mathring{H}^{s+1}(S^{m-1}T')$ и $w \in H^s(S^mT')$, что*

$$u = dv + w, \qquad \delta w = 0. \tag{1.4}$$

При этом имеют место оценки

$$\|v\|_{s+1} \leqslant C\|\delta u\|_{s-1}, \quad \|w\|_s \leqslant C\|u\|_s \tag{1.5}$$

с постоянной C, не зависящей от u. В частности, если u гладкое, то v и w тоже гладкие.

Доказательство. Предположив существование v, w, удовлетворяющих равенствам (1.4), и применив к первому из них оператор δ, получим, что v — решение краевой задачи $\delta dv = \delta u$, $v|_{\partial M} = 0$. Обратно, если мы установим, что краевая задача

$$\delta dv = f, \qquad v|_{\partial M} = 0 \tag{1.6}$$

для любого $f \in H^{s-1}(S^mT')$ обладает единственным решением $v \in H^{s+1}(S^mT')$ и справедлива оценка

$$\|v\|_{s+1} \leqslant C\|f\|_{s-1}, \tag{1.7}$$

то, полагая $f = \delta u$, $w = u - dv$, придем к утверждению теоремы.

Покажем, что задача (1.6) является эллиптической, а соответствующая однородная задача $\delta dv=0$, $v|_{\partial M}=0$ имеет только нулевое решение. После того как это будет доказано, применив теорему о нормальной разрешимости [10], убедимся в существовании и единственности решения задачи (1.6) и справедливости оценки (1.7).

Для доказательства эллиптичности задачи (1.6) следует установить эллиптичность символа $\sigma_2(\delta d)$ оператора δd и проверить условие Лопатинского для этой задачи.

Будем пользоваться определением и обозначениями для символов дифференциальных операторов на векторных расслоениях, приведенными в [9]. Непосредственно из определения вытекает, что символы операторов d и δ выражаются формулами

$$\sigma_1(d)(\xi,u)=i_\xi u,\quad \sigma_1(\delta)(\xi,u)=j_\xi u\quad \left(\xi\in T'_x, u\in S^*T'_x\right).$$

Значит, $\sigma_2(\delta d)(\xi,u)=j_\xi i_\xi u$. Согласно равенству (1.1) оператор $j_\xi i_\xi$ положительно определен при $\xi\neq 0$. Тем самым эллиптичность $\sigma_2(\delta d)$ установлена.

Условие Лопатинского нам удобнее проверять в форме, приведенной в [10, условие III]. Выберем в окрестности точки $x_0\in\partial M$ локальную систему координат $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=t$ так, чтобы край ∂M задавался уравнениями $t=0$ и $g_{jk}(x_0)=\delta_{jk}$ ($=1$ при $j=k$ и 0 при $j\neq k$). Пусть $D=(D_1, \ldots, D_n)$, где $D_j=-i\partial/\partial x_j$. Для дифференциального оператора $A(x, D)$, как и в [10], обозначим через $\pi A(x, D)$ главную часть оператора $A(x, D)$. Тогда $\pi(\delta d)(x_0, D)=\delta_0(D)d_0(D)$. Здесь

$$(d_0(D)v)_{j_1\ldots j_{m+1}}=i\sigma(j_1\ldots j_{m+1})\left(D_{j_1}v_{j_2\ldots j_{m+1}}\right), \tag{1.8}$$

$$(\delta_0(D)v)_{j_1\ldots j_{m-1}}=i\sum_{k=1}^{n}D_k v_{kj_1\ldots j_{m-1}}.$$

Согласно [10] для проверки условия Лопатинского для задачи (1.6) надо рассмотреть следующую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\delta_0(\xi', D_t)d_0(\xi', D_t)v(t)=0, \tag{1.9}$$

$$v(0)=v_0, \tag{1.10}$$

где $\xi'=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $D_t=-id/dt$, v_0 — симметричный тензор степени m с постоянными компонентами. Условие Лопатинского будет установлено, если показать, что задача (1.9), (1.10) однозначно разрешима для любых $0\neq\xi'\in R^{n-1}$, v_0 в пространстве $\mathfrak{M}_+$ решений системы (1.9), стремящихся к нулю при $t\to+\infty$.

Как известно, пространство $\mathfrak{M}$ всех решений системы (1.9) разлагается в прямую сумму $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_+\oplus\mathfrak{M}_-$, где $\mathfrak{M}_-$ состоит из решений, стремящихся к нулю при $t\to-\infty$. При этом размерность пространства $\mathfrak{M}_+$ ($\mathfrak{M}_-$) равна числу корней (с учетом кратности) уравнения $\det(\delta_0(\xi', \lambda)\times d_0(\xi', \lambda))=0$ с положительной (отрицательной) мнимой частью. Поскольку это уравнение имеет действительные коэффициенты и, как показано выше, не имеет при $\xi'\neq 0$ действительных корней, то $\dim\mathfrak{M}_+=\dim\mathfrak{M}_-=\alpha(m, n)$, где $\alpha(m,n)=\binom{m+n-1}{m}$ — размерность расслоения S^mT'. Поэтому для проверки условия Лопатинского достаточно убедиться, что однородная задача

$$\delta_0(\xi', D_t)d_0(\xi', D_t)v(t)=0,\quad v(0)=0, \tag{1.11}$$

обладает только нулевым решением в пространстве $\mathfrak{M}_+$. Прежде чем проверять это, докажем одно вспомогательное равенство.

Пусть $u(t)$, $v(t)$ — симметричные тензоры на $\mathbf{R}^n$ степеней $m+1$ и m соответственно, гладко зависящие от $t\in[0,\infty)$ и быстро убывающие вместе со своими производными при $t \to +\infty$, причем $v(0)=0$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty (\delta_0(\xi', D_t)u, v)\,dt = -\int\limits_0^\infty (u, d_0(\xi', D_t)v)\,dt. \tag{1.12}$$

Здесь скалярное произведение тензоров понимается в смысле приведенного выше определения при $g_{ij}=\delta_{ij}$. Действительно,

$$\int\limits_0^\infty (\delta_0(\xi', D_t)u, v)\,dt = i\int\limits_0^\infty \left(D_t u_{nj_1\ldots j_m} + \sum_{k=1}^{n-1} \xi'_k u_{kj_1\ldots j_m}\right)\bar{v}^{j_1\ldots j_m} dt =$$

$$= i\int\limits_0^\infty \left(u^{nj_1\ldots j_m}\overline{D_t v_{j_1\ldots j_m}} + \sum_{k=1}^{n-1} \xi'_k u_{kj_1\ldots j_m}\bar{v}^{j_1\ldots j_m}\right) dt.$$

Если положить $\xi=(\xi'_1, \ldots, \xi'_{n-1}, D_t)$, то это равенство можно переписать так:

$$\int\limits_0^\infty (\delta_0(\xi', D_t)u, v)\,dt = i\int\limits_0^\infty u^{j_1\ldots j_{m+1}}\overline{\xi_{j_1} v_{j_2\ldots j_{m+1}}}\,dt. \tag{1.13}$$

Из определения (1.8) следует, что $(d_0(\xi', D_t)v|_{j_1\ldots j_{m+1}} = i\sigma(j_1\ldots j_{m+1}) \times$ $\times \left(\xi_{j_1} v_{j_2\ldots j_{m+1}}\right)$, поэтому $(u, d_0(\xi', D_t)v) = -iu^{j_1\ldots j_{m+1}}\overline{\xi_{j_1} v_{j_2\ldots j_{m+1}}}$. Сравнивая последнее равенство с (1.13), приходим к равенству (1.12).

Пусть $v(t) \in \mathfrak{M}_+$ — решение задачи (1.11). Полагая в соотношении (1.12) $u(t)=d_0(\xi', D_t)v(t)$, получим

$$d_0(\xi', D_t)v(t)=0. \tag{1.14}$$

Установим теперь, что из равенства (1.14) и начального условия $v(0)=0$ вытекает $v(t)\equiv 0$. Определение (1.8) оператора $d_0(\xi)$ перепишем так:

$$(d_0(\xi)v)_{j_1\ldots j_m} = \frac{i}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1} \xi_{j_k} v_{j_1\ldots \hat{j}_k\ldots j_{m+1}}.$$

Знак $\hat{}$ над символом означает, что этот символ пропускается. Полагая в последнем равенстве $\xi=(\xi', D_t)$, $j_{m+1}=n$ и учитывая формулу (1.14), будем иметь

$$0 = (d_0(\xi', D_t)v)_{nj_1\ldots j_m} =$$

$$= \frac{i}{m+1}\left[(l+1)D_t v_{j_1\ldots j_m} + \sum_{j_k\neq n} \xi'_{j_k} v_{nj_1\ldots \hat{j}_k\ldots j_m}\right]. \tag{1.15}$$

Здесь $l=l(j_1, \ldots, j_m)$ равно числу вхождений индекса n в $(j_1, \ldots, j_m)$. Таким образом, поле $v(t)$ удовлетворяет однородной системе (1.15), разрешенной относительно производных. Вместе с начальным условием $v(0)=0$ это дает $v(t)=0$. Проверка эллиптичности задачи (1.6) закончена.

Докажем, что однородная задача $\delta dv=0$, $v|_{\partial M}=0$ обладает только нулевым решением. В силу установленной эллиптичности можно считать v гладким. Положив в (1.2) $u=dv$, $G=M$, убедимся, что $dv=0$. Пусть $x_0 \in M\setminus\partial M$, x_1 — ближайшая к x_0 точка края ∂M. Тогда существует геодезическая γ: $[-1, 0]\to M$, для которой $\gamma(-1)=x_1$, $\gamma(0)=x_0$. Для любого $\xi \in T_{x_0}$, достаточно близкого к $\dot\gamma(0)$, геодезическая γ_ξ, определяемая начальными условиями $\gamma_\xi(0)=x_0$, $\dot\gamma_\xi(0)=\xi$, пересекает ∂M при некотором $t_0=t_0(\xi)<0$. Пользуясь равенством (1.3), получим

$$v_{i_1\ldots i_m}(x_0)\,\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_m} = v_{i_1\ldots i_m}(\gamma_\xi(t_0))\,\dot\gamma_\xi^{i_1}(t_0)\ldots\dot\gamma_\xi^{i_m}(t_0) +$$

$$+\int\limits_{t_0}^0 (dv)_{i_1\ldots i_{m+1}}(\gamma_\xi(t))\,\dot\gamma_\xi^{i_1}(t)\ldots\dot\gamma_\xi^{i_{m+1}}(t)\,dt = 0.$$

Поскольку это равенство доказано для всех ξ из некоторой окрестности $\dot\gamma(0)$ в T_{x_0}, из него следует $v(x_0)=0$. В силу произвольности x_0 это означает, что $v\equiv 0$. Доказательство теоремы 1.1 завершено.

§ 2. Оператор I интегрирования вдоль геодезических

Считаем M компактным и не содержащим геодезических бесконечной длины. Тогда для $(x, \xi)\in T$, $\xi\neq 0$, существует такое число $t_0(x,\xi)\leqslant \leqslant 0$, что геодезическая $\gamma_{x,\xi}$, задаваемая начальными условиями $\gamma_{x,\xi}(0)=x$, $\dot\gamma_{x,\xi}(0)=\xi$, определена на отрезке $[t_0(x, \xi), 0]$, а $\gamma_{x,\xi}(t_0(x, \xi))\in\partial M$.

Край ∂M называется *выпуклым* (*строго выпуклым*), если в любой точке $x\in\partial M$ вторая квадратичная форма $B(\xi)=(\nabla_\xi\nu, \xi)$ неотрицательна (положительна) на пространстве $T_{0,x}=\{\xi\in T_x|(\xi, \nu(x))=0\}$. Здесь ν — единичный вектор внешней нормали к ∂M.

Обозначим через Ω подмногообразие в T, состоящее из единичных векторов, $\Omega=\{(x, \xi)\in T \mid \|\xi\|^2=g_{ij}(x)\xi^i\xi^j=1\}$, а через $\Omega_+(\partial M)$ — его подмножество, задаваемое равенством $\Omega_+(\partial M)=\{(x, \xi)\in\Omega| \ x\in\partial M, (\xi, \nu(x))\geqslant 0\}$, которое является компактным многообразием с краем. Следовательно, для целого $s\geqslant 0$ определено топологическое гильбертово пространство $H^s(\Omega_+(\partial M))$ комплексных функций на $\Omega_+(\partial M)$, имеющих обобщенные локально интегрируемые в квадрате производные до порядка s. Зафиксировав на $\Omega_+(\partial M)$ конечный атлас и подчиненное ему разбиение единицы, снабдим $H^s(\Omega_+(\partial M))$ структурой гильбертова пространства. Норму в этом пространстве будем обозначать через $\|\cdot\|_s$.

Для симметричного тензорного поля f степени m на M введем функцию If на $\Omega_+(\partial M)$ равенством

$$(If)(x, \xi) = \int\limits_{t_0(x,\xi)}^{0} f_{i_1\ldots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t))\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t)\ldots\dot\gamma^{i_m}_{x,\xi}(t)\,dt. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть M компактно и не содержит геодезических бесконечной длины, край ∂M строго выпуклый. Тогда для $f\in H^1(S^mT')$ функция If принадлежит $H^1(\Omega_+(\partial M))$ и оператор I: $H^1(S^mT')\to H^1(\Omega_+(\partial M))$ ограничен.*

Доказательство этой теоремы приводится в конце параграфа.

Заметим, что если $v\in C^\infty(S^mT')$ и $v|_{\partial M}=0$, то $I(dv)=0$. Действительно, пользуясь соотношением (1.3), получим для $(x, \xi)\in\Omega_+(\partial M)$

$$(Idv)(x,\xi) = \left[v_{i_1\ldots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t))\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t)\ldots\dot\gamma^{i_m}_{x,\xi}(t)\right]^0_{t=t_0(x,\xi)} = 0,$$

поскольку $\gamma_{x,\xi}(0)$, $\gamma_{x,\xi}(t_0)\in\partial M$. По непрерывности отсюда вытекает, что образ оператора d: $\overset{\circ}{H}{}^2(S^{m-1}T')\to H^1(S^mT')$ содержится в ядре оператора I.

Насколько однозначно поле $f\in H^1(S^mT')$ определяется функцией If? Если

$$f=\tilde f + dv \tag{2.2}$$

— разложение, существующее в силу теоремы 1.1, где $\tilde f\in H^1(S^mT')$, $\delta\tilde f=0$, $v\in \overset{\circ}{H}{}^2(S^{m-1}T')$, то ввиду приведенного выше замечания $If=I\tilde f$. Поэтому, зная If, можно надеяться определить только первое слагаемое разложения (2.2).

Пусть (R_{ijkl}) — тензор кривизны метрики g [7].

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2.2. *Пусть M компактно, не содержит геодезических бесконечной длины, край ∂M строго выпуклый и секционные кривизны M неположительны, т. е. в каждой точке $x\in M$ $R_{ijkl}\xi^i\xi^k\eta^j\eta^l\leqslant 0$ для любых ξ, $\eta\in T_x$. Пусть $f\in H^1(S^mT')$. Если $f=\tilde f+dv$ — разложение, существую-*

щее в силу теоремы 1.1, *где* $\tilde f \in H^1(S^mT')$, $\delta f = 0$, $v \in \mathring{H}^2(S^{m-1}T')$, то *справедливы оценки*

$$\|\tilde f\|_0^2 \leqslant C(m\|j_\nu \tilde f|_{\partial M}\|_0\|If\|_0 + \|If\|_1^2) \leqslant C_1(m\|f\|_1\|If\|_0 + \|If\|_1^2) \qquad (2.3)$$

с не зависящими от f постоянными C, C_1. Здесь ν — единичный вектор нормали к ∂M, j_ν: $S^mT'|_{\partial M} \to S^{m-1}T'|_{\partial M}$ — оператор, определенный в § 1.

Мы выделили в первом слагаемом из правой части (2.3) множитель m, чтобы подчеркнуть, что при $m = 0$ это слагаемое отсутствует. Таким образом, если $If = 0$ для $f = H^1(S^mT')$, то $f = dv$ для некоторого $v \in \mathring{H}^2(S^{m-1}T')$. Последнее утверждение устойчиво в следующем смысле: если f_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — ограниченная последовательность в $H^1(S^mT')$, для которой $If_k \to 0$ в $H^1(\Omega_+(\partial M))$ при $k \to \infty$, то существуют такие $v_k \in \mathring{H}^2(S^{m-1}T')$, что $f_k - dv_k \to 0$ в $H^0(S^mT')$.

Замечание. Можно показать, что для компактного многообразия неположительной секционной кривизны со строго выпуклым краем условие «M не содержит геодезических бесконечной длины» эквивалентно односвязности M. Такое многообразие диффеоморфно шару. В дальнейшем мы не будем пользоваться этим замечанием.

Для доказательства теоремы 2.1 нам понадобится приведенное ниже утверждение о пространствах H^s, доказательство которого легко провести с помощью теоремы о неявной функции.

Лемма 2.1. *Пусть N, L — гладкие компактные многообразия, причем $\dim N \geqslant \dim L$, φ: $N \to L$ — гладкое отображение. Предположим, что φ имеет в каждой точке $x \in N$ максимальный ранг, т. е. ранг матрицы Якоби равен $\dim L$. Тогда для целого $s \geqslant 0$, если $u \in H^s(L)$, то $u \circ \varphi \in H^s(N)$ и оператор φ^*: $H^s(L) \to H^s(N)$, $\varphi^* u = u \circ \varphi$, ограничен.*

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим сначала $f \in C^\infty(S^mT')$. Пусть G — замкнутая область в $\Omega_+(\partial M) \times R$, определяемая равенством $G = \{(x, \xi, t) \in \Omega_+(\partial M) \times R \mid t_0(x, \xi) \leqslant t \leqslant 0\}$. Зададим отображение exp: $G \to M$, полагая $\exp(x, \xi, t) = \gamma_{x,\xi}(t)$. Это отображение гладкое, и его ранг равен n в каждой точке области G. Действительно, как установлено в вариационной теории геодезических [11], дифференциал отображения exp вдоль геодезической $\gamma_{x,\xi}(t)$ удовлетворяет уравнению Якоби. Из линейности этого уравнения следует, что дифференциал exp имеет максимальный ранг. Применяя лемму 2.1, получим, что для функции F, задаваемой на G равенством $F(x, \xi, t) = f_{i_1 \ldots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t)) \times \dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t) \ldots \dot\gamma^{i_m}_{x,\xi}(t)$, справедлива оценка

$$\|F\|_{H^1(G)} \leqslant C\|f\|_1. \qquad (2.4)$$

С помощью этой функции равенство (2.1) переписывается так:

$$(If)(x, \xi) = \int\limits_{t_0(x,\xi)}^{0} F(x, \xi, t)\, dt. \qquad (2.5)$$

Подынтегральное выражение в (2.5) является гладкой функцией на G, поэтому гладкость If определяется гладкостью нижнего предела интегрирования. С помощью теоремы о неявной функции легко убедиться, что $t_0(x, \xi)$ гладкая при тех (x, ξ), для которых геодезическая $\gamma_{x,\xi}(t)$ пересекает ∂M трансверсально при $t = t_0(x, \xi)$. Последнее верно в случае выпуклости ∂M для всех $(x, \xi) \in \Omega$, за исключением точек множества $\Omega_0(\partial M) = \{(x, \xi) \in \Omega \mid x \in \partial M, \ (\xi, \nu(x)) = 0\}$. Заметим, что $\Omega_0(\partial M)$ — край многообразия $\Omega_+(\partial M)$. Таким образом, функция If будет гладкой во всех внутренних точках многообразия $\Omega_+(\partial M)$. Поэтому для доказательства того, что $If \in H^1(\Omega_+(\partial M))$, достаточно установить, что первые частные производные функции If (относительно какой-либо системы координат на многообразии $\Omega_+(\partial M)$, определенной в окрестности точки $(x_0, \xi_0) \in \Omega_0(\partial M)$) остаются ограниченными при приближении к краю $\Omega_0(\partial M)$.

Обозначим через ρ: $M \to R$ функцию расстояния до края ∂M. В некоторой окрестности точки $x_0 \in \partial M$ можно так выбрать систему координат $x^1, \ldots, x^n$ на M, что $x^n \equiv \rho$ и $g_{in} = \delta_{in}$. Набор функций $x^1, \ldots, x^{n-1}$, $\xi^1, \ldots, \xi^n$, где $\xi = \xi^i \partial/\partial x^i$, образует локальную систему координат на $T(\partial M) = \{(x, \xi) \in T \mid x \in \partial M\}$. Дифференцируя равенство (2.5), получим соотношение

$$\frac{\partial (If)}{\partial x^\alpha} = \int\limits_{t_0(x,\xi)}^{0} F_{x^\alpha}(x, \xi, t)\, dt - F(x, \xi, t_0(x, \xi)) \frac{\partial t_0(x, \xi)}{\partial x^\alpha} \tag{2.6}$$

и аналогичную формулу для $\partial(If)/\partial \xi^i$, в которую войдет $\partial t_0(x, \xi)/\partial \xi^i$. Поэтому для доказательства ограниченности производных $\partial(If)/\partial x^\alpha$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant n-1)$ и $\partial(If)/\partial \xi^i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ достаточно установить ограниченность функций

$$\frac{\partial t_0}{\partial x^\alpha} \ (1 \leqslant \alpha \leqslant n-1), \quad \frac{\partial t_0}{\partial \xi^i} \ (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{2.7}$$

Это доказательство основано на лемме 2.2.

Лемма 2.2. *Пусть M компактно, край ∂M строго выпуклый. Для $(x, \xi) \in \Omega \backslash \Omega_0(\partial M)$ обозначим через $\varphi(x, \xi)$ угол выхода геодезической $\gamma_{x,\xi}(t)$ из M при $t = t_0(x, \xi)$, т. е. $\cos \varphi(x, \xi) = -(\dot\gamma_{x,\xi}(t_0), \nu(\gamma_{x,\xi}(t_0)))$, где $t_0 = t_0(x, \xi)$. Тогда функция $t_0(x, \xi)/\cos \varphi(x, \xi)$ ограничена на $\Omega \backslash \Omega_0(\partial M)$.*

Мы не будем приводить формального доказательства этой леммы, ограничившись следующим замечанием. Для $x \in \partial M$ рассмотрим отображение $\exp_x$: $T_x \to M$ [11]. Согласно условию строгой выпуклости ∂M подмножество $\exp_x^{-1}(U)$ евклидова пространства T_x, где U — достаточно малая окрестность x в M, заключено внутри некоторой сферы, проходящей через $0 \in T_x$. Для шара евклидова пространства утверждение леммы проверяется элементарно. Таким образом, приходим к неравенству $t_0(x, \xi)/\cos \varphi(x, \xi) \leqslant C$ для фиксированной $x \in \partial M$. Легко видеть, что константа C в этом неравенстве может быть выбрана одинаковой для всех $x \in \partial M$.

Покажем, что ограниченность производных (2.7) вытекает из леммы 2.2. Пусть точка x принадлежит области U определения координат, введенных перед формулировкой леммы 2.2, а вектор $\xi \in T_x$ таков, что вся геодезическая $\gamma_{x,\xi}(t)$ $(t_0(x, \xi) \leqslant t \leqslant 0)$ лежит в U (достаточно рассмотреть только такие (x, ξ)). Обозначим через $\gamma^i(x, \xi, t)$ координаты $\gamma_{x,\xi}(t)$. Точка $\gamma_{x,\xi}(t_0(x, \xi))$ принадлежит ∂M. Это означает, что $\gamma^n(x, \xi, t_0(x, \xi)) = 0$. Дифференцируя последнее равенство, получим

$$\frac{\partial t_0}{\partial x^\alpha}(x, \xi) = -\frac{\partial \gamma^n}{\partial x^\alpha}(x, \xi, t_0) \Big/ \frac{\partial \gamma^n}{\partial t}(x, \xi, t_0), \quad \frac{\partial t_0}{\partial \xi^i}(x, \xi) = -\frac{\partial \gamma^n}{\partial \xi^i}(x, \xi, t_0) \Big/ \frac{\partial \gamma^n}{\partial t}(x, \xi, t_0). \tag{2.8}$$

Очевидно, что знаменатели в правых частях этих равенств равны $\cos \varphi(x, \xi)$. Отметим, что $\partial \gamma^n(x, \xi, 0)/\partial x^\alpha = 0$ при $1 \leqslant \alpha \leqslant n-1$, поэтому возможно представление $\partial \gamma^n(x, \xi, t_0)/\partial x^\alpha = \psi_\alpha(x, \xi) t_0(x, \xi)$ с некоторыми ограниченными $\psi_\alpha(x, \xi)$. В силу равенства $\partial \gamma^n(x, \xi, 0)/\partial \xi^i = 0$ возможно представление $\partial \gamma^n(x, \xi, t_0)/\partial \xi^i = \chi_i(x, \xi) t_0(x, \xi)$ с ограниченными $\chi_i(x, \xi)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Вследствие этого соотношение (2.8) перепишется в виде

$$\frac{\partial t_0}{\partial x^\alpha}(x, \xi) = -\psi_\alpha(x, \xi) \frac{t_0(x, \xi)}{\cos \varphi(x, \xi)}, \quad \frac{\partial t_0}{\partial \xi^i}(x, \xi) = -\chi_i(x, \xi) \frac{t_0(x, \xi)}{\cos \varphi(x, \xi)}.$$

Отсюда с помощью леммы 2.2 убеждаемся, что функции (2.7) ограничены.

Заметим, что мы установили не только ограниченность функций (2.7) на $\Omega(\partial M)$, но и равномерную по ρ_0 при достаточно малых $\rho_0 \geqslant 0$ ограниченность этих функций на многообразии $\Omega(\partial M_{\rho_0}) = \{(x, \xi) \in \in \Omega \mid \rho(x) = \rho_0\}$. Это замечание пригодится нам позже, при доказательстве теоремы 2.2.

Обозначим через $\partial_+ G$ часть границы G, определяемую равенством $\partial_+ G = \{(x, \xi, t) \in \Omega_+(\partial M) \times R \mid t = t_0(x, \xi)\}$. Из ограниченности производных (2.7) вытекает, что оператор следа $H^1(G) \to H^0(\partial_+ G)$, $F \to F|_{\partial_+ G}$, ограничен. Поэтому из (2.4) — (2.6) выводим оценку

$$\|If\|_1 \leqslant C_1 \|f\|_1. \tag{2.9}$$

Итак, для $f \in C^\infty(S^m T')$ функция If принадлежит $H^1(\Omega_+(\partial M))$ и имеет место оценка (2.9). Пусть теперь $f \in H^1(S^m T')$. Определив, как и ранее, F, убедимся в справедливости соотношений (2.4), (2.5). Из (2.5) с помощью теоремы Фубини заключаем, что функция $(If)(x, \xi)$ определена почти для всех $(x, \xi) \in \Omega_+(\partial M)$ и принадлежит $H^0(\Omega_+(\partial M))$. Выберем последовательность $f_k \in C^\infty(S^m T')$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к f в $H^1(S^m T')$. Тогда последовательность If_k сходится к If в $H^0(\Omega_+(\partial M))$. Применяя оценку (2.9) для $f_k - f_l$, убедимся, что последовательность If_k фундаментальна в $H^1(\Omega_+(\partial M))$. Значит, $If \in H^1(\Omega_+(\partial M))$, и справедлива оценка (2.9). Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Полубазисные тензорные поля

Изложим некоторые понятия, относящиеся к тензорному анализу на пространстве T касательного расслоения риманова многообразия M.

Напомним, что координатами вектора $\xi \in T_x$ относительно определенной в окрестности $U \subset M$ точки x системы координат $x^1, \ldots, x^n$ называются коэффициенты разложения $\xi = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}(x)$. На множестве $\pi^{-1}(U)$, где π — проекция касательного расслоения, набор функций x^i, ξ^i $(i = = 1, \ldots, n)$ (строго говоря, надо писать $x^i \circ \pi$ вместо x^i, однако мы, надеясь, что это не вызовет недоразумений, будем $x^i \circ \pi$ обозначать снова через x^i) образует систему координат. Впредь на T будут рассматриваться только такие системы. Фактически мы уже пользовались такой системой координат при доказательстве теоремы 2.1.

Тензор u типа (r, s) на многообразии T будем называть *полубазисным*, если в некоторой (а значит, и в любой) системе координат он представим в виде

$$u = u^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}. \tag{3.1}$$

Название взято по аналогии с полубазисными внешними формами [12]. Обозначим через B^r_s расслоение полубазисных тензоров типа (r, s) над многообразием T. Сечения этого расслоения называются *полубазисными тензорными полями типа* (r, s). Для такого поля в области действия системы координат справедливо равенство (3.1), коэффициенты которого являются комплексными функциями переменных $x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n$. Подразумевая выбор системы координат ясным из контекста, равенство (3.1) сократим до следующего: $u = \left(u^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\right)$.

На полубазисные тензоры переносятся алгебраические операции, известные для обычных тензоров: сумма, тензорное произведение, свертка по двум разновысоким индексам. Отметим еще, что тензорные поля типа (r, s) на M могут быть отождествлены с теми полубазисными полями, компоненты которых не зависят от $\xi^1, \ldots, \xi^n$.

Для $u \in C^\infty(B^r_s)$ определим два полубазисных поля типа $(r,\ s+1)$ $\overset{v}{\nabla} u = \left(\overset{v}{\nabla}_k u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\right)$ и $\overset{h}{\nabla} u = \left(\overset{h}{\nabla}_k u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\right)$, положив

$$\overset{v}{\nabla}_k u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = \frac{\partial}{\partial \xi^k} u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s},$$

$$\overset{h}{\nabla}_k u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = \frac{\partial}{\partial x^k} u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} - \Gamma^p_{kq}\xi^q \frac{\partial}{\partial \xi^p} u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} + \sum_{m=1}^{r} \Gamma^{i_m}_{kp} u^{i_1\ldots i_{m-1} p i_{m+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} -$$

$$- \sum_{m=1}^{s} \Gamma^p_{kj_m} u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{m-1} p j_{m+1}\ldots j_s},$$

где Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля метрики g [7]. Легко проверить, что эти равенства инвариантны при замене координат, т. е. $\overset{v}{\nabla} u$ и $\overset{h}{\nabla} u$ действительно являются полубазисными тензорными полями. Таким образом, $\overset{v}{\nabla}$ и $\overset{h}{\nabla}$ — дифференциальные операторы 1-го порядка на расслоении B^r_s со значениями в B^r_{s+1}. Будем называть их соответственно *вертикальной* и *горизонтальной ковариантными производными.*

Легко убедиться, что каждый из операторов $\overset{v}{\nabla}$, $\overset{h}{\nabla}$ ведет себя как обычный оператор дифференцирования по отношению к тензорному произведению и свертке, а также в справедливости следующих правил коммутации:

$$\overset{v}{\nabla}_k \overset{v}{\nabla}_l - \overset{v}{\nabla}_l \overset{v}{\nabla}_k = 0,$$

$$\overset{v}{\nabla}_k \overset{h}{\nabla}_l - \overset{h}{\nabla}_l \overset{v}{\nabla}_k = 0,$$

$$\left(\overset{h}{\nabla}_k \overset{h}{\nabla}_l - \overset{h}{\nabla}_l \overset{h}{\nabla}_k\right) u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = -R^p_{qkl}\xi^q \overset{v}{\nabla}_p u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} + \sum_{m=1}^{r} R^{i_m}_{pkl} u^{i_1\ldots i_{m-1} p i_{m+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} -$$

$$- \sum_{m=1}^{s} R^p_{j_m kl} u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{m-1} p j_{m+1}\ldots j_s},$$

где $\left(R^i_{jkl}\right)$ — тензор кривизны. Выполняются соотношения

$$\overset{v}{\nabla}_k g_{ij} = \overset{h}{\nabla}_k g_{ij} = 0, \quad \overset{v}{\nabla}_k \delta^i_j = \overset{h}{\nabla}_k \delta^i_j = 0, \quad \overset{h}{\nabla}_j \xi^i = 0, \quad \overset{v}{\nabla}_j \xi^i = \delta^i_j.$$

В дальнейшем будем также использовать обозначения: $\overset{v}{\nabla}{}^i = g^{ij}\overset{v}{\nabla}_j$, $\overset{h}{\nabla}{}^i = g^{ij}\overset{h}{\nabla}_j$.

$2n$-Форма dV^{2n} на многообразии T, определяемая равенством

$$dV^{2n} = g\,d\xi \wedge dx = g\,d\xi^1 \wedge \ldots \wedge d\xi^n \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \quad g = \det(g_{ij}), \tag{3.2}$$

как легко видеть, не зависит от выбора системы координат и, следовательно, определена глобально на T. Будем называть эту форму элементом объема многообразия T.

В области действия системы координат определим $(2n-1)$-формы $\overset{v}{\omega}_i$, $\overset{h}{\omega}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ равенствами

$$\overset{v}{\omega}_i = (-1)^{i-1} g\,d\xi^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi^i} \wedge \ldots \wedge d\xi^n \wedge dx, \tag{3.3}$$

$$\overset{h}{\omega}_i = g\Big[(-1)^{n+i-1} d\xi \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \Gamma^j_{ip}\xi^p d\xi^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi^j} \wedge \ldots \wedge d\xi^n \wedge dx\Big]. \tag{3.4}$$

Знак $\widehat{\ }$ над символом означает, что этот символ пропускается. При замене координат каждая из совокупностей $(\overset{v}{\omega}_i)$ и $(\overset{h}{\omega}_i)$ преобразуется по тому же правилу, что и компоненты полубазисного поля типа (0, 1). Следовательно, для любого полубазисного векторного поля u (т. е. поля типа (1, 0)) формы $u^i\overset{v}{\omega}_i$ и $u^i\overset{h}{\omega}_i$ определены глобально на T.

Непосредственным вычислением убеждаемся, что каждая из форм $\overset{v}{\omega}_i$, $\overset{h}{\omega}_i$ замкнута и для полубазисного векторного поля u справедливы равенства $d\left(u^i\overset{v}{\omega}_i\right) = \overset{v}{\nabla}_i u^i dV^{2n}$, $d\left(u^i\overset{h}{\omega}_i\right) = \overset{h}{\nabla}_i u^i dV^{2n}$. Здесь d — оператор внешнего дифференцирования. Применяя теорему Стокса, получаем формулы Гаусса — Остроградского для вертикальной и горизонтальной дивергенций:

$$\int\limits_D \overset{v}{\nabla}_i u^i dV^{2n} = \int\limits_{\partial D} u^i\overset{v}{\omega}_i, \qquad \int\limits_D \overset{h}{\nabla}_i u^i dV^{2n} = \int\limits_{\partial D} u^i\overset{h}{\omega}_i, \tag{3.5}$$

справедливые для компактной области $D\subset T$ с кусочно-гладкой границей ∂D. Для одного важного для нас частного вида области D эти формулы могут быть существенно упрощены.

Пусть G — компактная область в M с кусочно-гладкой границей ∂G. Для $0<r_0<r_1$ обозначим через $T_{r_0,r_1}G$ шаровой слой над G, т. е. область в T, определяемую равенством $T_{r_0,r_1}G = \left\{(x, \xi)\in T \mid x\in G, r_0\leqslant\|\xi\| = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}\leqslant r_1\right\}$. Граница этой области состоит из трех кусочно-гладких многообразий

$$\partial\left(T_{r_0,r_1}G\right) = \Omega_{r_1}G - \Omega_{r_0}G + T_{r_0,r_1}(\partial G), \tag{3.6}$$

где $\Omega_rG = \{(x, \xi)\in T\mid x\in G, \|\xi\| = r\}$, $T_{r_0,r_1}(\partial G) = \{(x, \xi)\in T\mid x\in\partial G, r_0\leqslant \|\xi\|\leqslant r_1\}$. Существует канонический диффеоморфизм $\mu : \Omega_{r_0}G\to\Omega_{r_1}G$, $\mu(x, \xi)=(x, r_1\xi/r_0)$. Минус перед вторым слагаемым в равенстве (3.6) поставлен, чтобы подчеркнуть, что оно входит в $\partial\left(T_{r_0,r_1}G\right)$ с ориентацией, противоположной той, которая индуцирована диффеоморфизмом μ.

В окрестности любой точки гладкости границы ∂G можно так выбрать систему координат, чтобы $dx^n=0$ на $T_{r_0,r_1}(\partial G)$. Поэтому из (3.3) вытекает, что все формы $\overset{v}{\omega}_i$ обращаются в нуль на $T_{r_0,r_1}(\partial G)$. Проверим, что форма $\overset{h}{\omega}_i$ обращается в нуль на Ω_rG $(r>0)$. Действительно, дифференцируя определяющее это многообразие равенство $g_{ij}\xi^i\xi^j=r^2$, получим $\Gamma^i_{jk}\xi_i\xi^j dx^k + \xi_k d\xi^k = 0$. Для любой точки $(x, \xi)\in\Omega_rG$ найдется такой номер l, что $\xi^l\neq 0$. Из последнего равенства имеем $d\xi^l = -\left(\sum\limits_{k\neq l}\xi_k d\xi^k + \Gamma^i_{jk}\xi_i\xi^j d\xi^k\right)\Big/\xi^l$. Подставляя это выражение для $d\xi^l$ в соотношение (3.4), убеждаемся, что все $\overset{h}{\omega}_i$ обращаются в нуль на Ω_rG. Таким образом, для шарового слоя формулы (3.5) выглядят так:

$$\int\limits_{T_{r_0,r_1}G} \overset{v}{\nabla}_i u^i dV^{2n} = \int\limits_{\Omega_{r_1}G-\Omega_{r_0}G} u^i\overset{v}{\omega}_i, \qquad \int\limits_{T_{r_0,r_1}G} \overset{h}{\nabla}_i u^i dV^{2n} = \int\limits_{T_{r_0 r_1}(\partial G)} u^i\overset{h}{\omega}_i. \tag{3.7}$$

Проведем дальнейшее преобразование этих формул. Рассмотрим определенную при $\xi\neq 0$ $(2n-1)$-форму $d\Sigma^{2n-1} = \xi^i\overset{v}{\omega}_i/\|\xi\|$. Ее естественно назвать *элементом объема многообразия* Ω_rG, поскольку $d\|\xi\|\wedge d\Sigma^{2n-1} = dV^{2n}$. На Ω_rG справедливо равенство $u^i\overset{v}{\omega}_i = u^i\xi_i d\Sigma^{2n-1}/r$, поэтому первая из формул (3.7) приобретает следующий окончательный вид:

$$\int\limits_{T_{r_0,r_1}G} \overset{v}{\nabla}_i u^i dV^{2n} = \frac{1}{r_1} \int\limits_{\Omega_{r_1}G} u^i \xi_i d\Sigma^{2n-1} - \frac{1}{r_0} \int\limits_{\Omega_{r_0}G} u^i \xi_i d\Sigma^{2n-1}. \tag{3.8}$$

Пусть $x_0 \in \partial G$ — точка гладкости ∂G. В некоторой окрестности этой точки можно так выбрать систему координат, что $g_{in} = \delta_{in}$ $(i = 1, \ldots, n)$, ∂G задается уравнением $x^n = 0$ и $x^n > 0$ вне G. Как видно из (3.4), в этой системе координат $\overset{h}{\omega}_\alpha = 0$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant n-1)$ на $T_{r_0,r_1}(\partial G)$. Форма $dV^{2n-1} = \overset{h}{\omega}_n = -g d\xi \wedge dx^1 \wedge \ldots dx^{n-1}$ не зависит от произвола в выборе указанной системы координат и, следовательно, определена глобально на $T_{r_0,r_1}(\partial G)$. Эту форму естественно назвать *элементом объема многообразия* $T_{r_0,r_1}(dG)$, поскольку $dx^n \wedge dV^{2n-1} = dV^{2n}$. Таким образом, вторая из формул (3.7) записывается так:

$$\int\limits_{T_{r_0,r_1}G} \overset{h}{\nabla}_i u^i dV^{2n} = \int\limits_{T_{r_0,r_1}(\partial G)} (u, \nu)\, dV^{2n-1}, \tag{3.9}$$

где $\nu = \nu(x)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂G.

§ 4. Геодезический поток

Векторное поле H на многообразии T, определяемое в координатах равенством

$$H(x, \xi) = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^i_{jk}(x)\, \xi^j \xi^k \frac{\partial}{\partial \xi^i} = \xi^i \overset{h}{\nabla}_i,$$

не зависит от выбора системы координат и, следовательно, определено глобально на T. Это поле называется *геодезическим потоком риманова многообразия* M [12].

Лемма 4.1. *Для любой гладкой на T функции $u(x, \xi)$ справедливо тождество*

$$2 \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{v}{\nabla}_i (Hu) = \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u - R_{ijkl} \xi^i \xi^k \overset{v}{\nabla}{}^j u \overset{v}{\nabla}{}^l u + \overset{h}{\nabla}_i v^i + \overset{v}{\nabla}_i w^i, \tag{4.1}$$

где

$$v^i = \xi^i \overset{v}{\nabla}{}^j u \overset{h}{\nabla}_j u - \xi^j \overset{h}{\nabla}_j u \overset{v}{\nabla}{}^i u, \tag{4.2}$$

$$w^i = \xi^j \overset{h}{\nabla}_j u \overset{h}{\nabla}{}^i u. \tag{4.3}$$

Доказательство. Имеем

$$2 \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i (Hu) = 2 \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{v}{\nabla}_i \left(\xi^j \overset{h}{\nabla}_j u\right) = 2 \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u + 2 \xi^j \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{v}{\nabla}_i \overset{h}{\nabla}_j u. \tag{4.4}$$

Преобразуем второе слагаемое из правой части равенства (4.4). Для этого определим функцию $\varphi(x, \xi)$, исходя из равенства

$$2 \xi^j \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{v}{\nabla}_i \overset{h}{\nabla}_j u = \overset{v}{\nabla}_i \left(\xi^j \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_j u\right) + \overset{h}{\nabla}_j \left(\xi^j \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{v}{\nabla}_i u\right) - \overset{h}{\nabla}{}^i \left(\xi^j \overset{v}{\nabla}_i u \overset{h}{\nabla}_j u\right) - \varphi. \tag{4.5}$$

Покажем, что φ не зависит от вторых производных функции u. Действительно, выражая производные произведений, стоящие в правой части (4.5), через производные сомножителей, придем к равенству

$$\varphi = \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u + \xi^j \Big[\overset{v}{\nabla}{}^i u \left(\overset{h}{\nabla}_j \overset{h}{\nabla}_i - \overset{h}{\nabla}_i \overset{h}{\nabla}_j\right) u + \overset{h}{\nabla}{}^i u \left(\overset{h}{\nabla}_j \overset{v}{\nabla}_i - \overset{v}{\nabla}_i \overset{h}{\nabla}_j\right) u + {}$$
$$+ \overset{h}{\nabla}_j u \left(\overset{v}{\nabla}_i \overset{h}{\nabla}{}^i - \overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}_i\right) u \Big].$$

Используя формулы коммутации из предыдущего параграфа, получим

$$\varphi = \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u + R_{ijkl}\xi^i\xi^k \overset{v}{\nabla}{}^j u \overset{v}{\nabla}{}^l u.$$

Подставив это выражение в (4.5), а затем подставив равенство (4.5) вместо второго слагаемого в формулу (4.4), придем к тождеству (4.1).

§ 5. Доказательство теоремы 2.2

Установим сначала, что теорема 2.2 вытекает из следующего более слабого утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть M компактно и не содержит геодезических бесконечной длины, край ∂M строго выпуклый, секционные кривизны M неположительны. Тогда для любого $f \in C^\infty(S^mT')$, удовлетворяющего условию*

$$\delta f = 0, \tag{5.1}$$

выполняется неравенство

$$\|f\|_0^2 \leqslant C\left(m\|j_\nu f|_{\partial M}\|_0\|If\|_0 + \|If\|_1^2\right) \tag{5.2}$$

с постоянной C, не зависящей от f.

Действительно, пусть для $f \in H^1(S^mT')$

$$f = \tilde f + dv \tag{5.3}$$

— разложение, существующее в силу теоремы 1.1, где $\tilde f \in H^1(S^mT')$, $\delta\tilde f = 0$, $v \in \mathring{H}^2(S^{m-1}T')$. Согласно теореме 1.1 справедлива оценка

$$\|\tilde f\|_1 \leqslant C_1\|f\|_1. \tag{5.4}$$

Выберем последовательность $f_k \in C^\infty(S^mT')$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к f в $H^1(S^mT')$. Применив теорему 1.1 к f_k, получим разложение

$$f_k = \tilde f_k + dv_k \tag{5.5}$$

с некоторым $\tilde f_k \in C^\infty(S^mT')$, $v_k \in C^\infty(S^{m-1}T')$, причем $\delta\tilde f_k = 0$, $v_k|_{\partial M} = 0$. В силу установленной в теореме 1.1 непрерывной зависимости $\tilde f$ из (5.3) от f, можно утверждать, что

$$\tilde f_k \to \tilde f \text{ при } k \to \infty \text{ в } H^1(S^mT'). \tag{5.6}$$

Ввиду непрерывности оператора следа $H^1(S^mT') \to H^0(S^mT'|_{\partial M})$ отсюда вытекает, что

$$\tilde f_k|_{\partial M} \to \tilde f|_{\partial M} \text{ при } k \to \infty \text{ в } H^0(S^mT'|_{\partial M}). \tag{5.7}$$

Как мы знаем (см. абзац после формулировки теоремы 2.1), из утверждений $v_k|_{\partial M} = 0$, $v \in \mathring{H}^2(S^{m-1}T')$ следует, что $I(dv_k) = I(dv) = 0$. Поэтому из формул (5.3), (5.5) выводим

$$If = I\tilde f, \qquad If_k = I\tilde f_k. \tag{5.8}$$

Применив к $\tilde f_k$ лемму 5.1, имеем

$$\|\tilde f_k\|_0^2 \leqslant C\left(m\|j_\nu\tilde f_k|_{\partial M}\|_0\|I\tilde f_k\|_0 + \|I\tilde f_k\|_1^2\right),$$

что в силу равенств (5.8) можно переписать так:

$$\|\tilde f_k\|_0^2 \leqslant C\left(m\|j_\nu\tilde f_k|_{\partial M}\|_0\|If_k\|_0 + \|If_k\|_1^2\right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $k \to \infty$, учитывая соотношения (5.6), (5.7) и доказанную в теореме 2.1 непрерывность I, получим

$$\|\tilde f\|_0^2 \leqslant C\left(m\|j_\nu\tilde f|_{\partial M}\|_0\|If\|_0 + \|If\|_1^2\right). \tag{5.9}$$

Используя оценку (5.4) и непрерывность оператора следа $H^1(S^mT') \to H^0(S^mT'|_{\partial M})$, находим

$$\|j_\nu \tilde{f}|_{\partial M}\|_0 \leqslant C_2\|\tilde{f}|_{\partial M}\|_0 \leqslant C_3\|\tilde{f}\|_1 \leqslant C_4\|f\|_1. \tag{5.10}$$

Неравенства (5.9), (5.10) дают утверждение теоремы 2.2.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству леммы 5.1. Для этого достаточно установить справедливость этой леммы для действительного поля $f \in C^\infty(S^mT')$.

Пусть M компактно и не содержит геодезических бесконечной длины, поле $f \in C^\infty(S^mT')$ действительно и удовлетворяет условию (5.1).

Введем обозначения: $T^* = \{(x, \xi) \in T \mid \xi \neq 0\}$, $T_0^*(\partial M) = \{(x, \xi) \in T^* \mid x \in \partial M, (\xi, \nu(x)) = 0\}$. Функцию $u(x, \xi)$ на многообразии T^* определим равенством

$$u(x, \xi) = \int\limits_{t_0(x,\xi)}^{0} f_{i_1 \ldots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t))\, \dot{\gamma}_{x,\xi}^{i_1}(t) \ldots \dot{\gamma}_{x,\xi}^{i_m}(t)\, dt. \tag{5.11}$$

Определение $\gamma_{x,\xi}$ и $t_0(x, \xi)$ для $(x, \xi) \in T^*$ см. в начале § 2. Сравнивая равенства (5.11) и (2.1), видим, что

$$u|_{\Omega_+(\partial M)} = If. \tag{5.12}$$

Поскольку $\gamma_{x,\lambda\xi}(t) = \gamma_{x,\xi}(\lambda t)$ для $\lambda > 0$, функция $u(x, \xi)$ является однородной по ξ:

$$u(x, \lambda\xi) = \lambda^{m-1}u(x, \xi). \tag{5.13}$$

Так же как и в § 2, убеждаемся, что $u(x, \xi)$ является гладкой в тех точках, в которых $t_0(x, \xi)$ гладкая. Последнее справедливо в случае выпуклости ∂M (что далее будет предполагаться) во всех точках множества $T^* \setminus T_0^*(\partial M)$.

Покажем, что функция u удовлетворяет на множестве $T^* \setminus T_0^*(\partial M)$ уравнению

$$Hu(x, \xi) = f_{i_1 \ldots i_m}(x)\, \xi^{i_1} \ldots \xi^{i_m}, \tag{5.14}$$

где H — геодезический поток. Действительно, пусть $(x, \xi) \in T^* \setminus T_0^*(\partial M)$, обозначим $\gamma = \gamma_{x,\xi}$, $t_0 = t_0(x, \xi)$. Для $t_0 \leqslant \tau \leqslant 0$ определены $x_\tau = \gamma(\tau)$, $\xi_\tau = \dot{\gamma}(\tau)$ и имеют место равенства $\gamma_{x_\tau, \xi_\tau}(t) = \gamma(t + \tau)$, $t_0(x_\tau, \xi_\tau) = t_0(x, \xi) - \tau$. Следовательно,

$$u(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) = u(x_\tau, \xi_\tau) = \int\limits_{t_0(x_\tau,\xi_\tau)}^{0} f_{i_1 \ldots i_m}(\gamma_{x_\tau,\xi_\tau}(t))\, \dot{\gamma}_{x_\tau,\xi_\tau}^{i_1}(t) \ldots \dot{\gamma}_{x_\tau,\xi_\tau}^{i_m}(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0(x,\xi)}^{\tau} f_{i_1 \ldots i_m}(\gamma(t))\, \dot{\gamma}^{i_1}(t) \ldots \dot{\gamma}^{i_m}(t)\, dt.$$

Дифференцируя это равенство по τ и полагая $\tau = 0$, получим

$$\dot{\gamma}^i(0) \frac{\partial u}{\partial x^i} + \ddot{\gamma}^i(0) \frac{\partial u}{\partial \xi^i} = f_{i_1 \ldots i_m}(\gamma(0))\, \dot{\gamma}^{i_1}(0) \ldots \dot{\gamma}^{i_m}(0). \tag{5.15}$$

Но $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = \xi$ и согласно уравнению геодезических [7] $\ddot{\gamma}^i(0) = -\Gamma_{jk}^i(x)\xi^j\xi^k$. Подставляя эти выражения в (5.15), приходим к уравнению (5.14).

Применим теперь к функции u лемму 4.1. Пользуясь равенством (5.14), преобразуем левую часть тождества (4.1)

$$2\overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{u}{\nabla}_i (Hu) = 2\overset{h}{\nabla}{}^i u \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(f_{i_1\ldots i_m}\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_m}\right) = 2m\overset{h}{\nabla}{}^i u f_{ii_2\ldots i_m}\xi^{i_2}\ldots\xi^{i_m} =$$

$$= \overset{h}{\nabla}{}^i\left(2muf_{ii_2\ldots i_m}\xi^{i_2}\ldots\xi^{i_m}\right) - 2mu\left(\overset{h}{\nabla}{}^i f_{ii_2\ldots i_m}\right)\xi^{i_2}\ldots\xi^{i_m} =$$

$$= \overset{h}{\nabla}_i z^i - 2m(\delta f)_{i_1\ldots i_{m-1}}\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_{m-1}}, \tag{5.16}$$

где

$$z^i = 2mug^{ip}f_{pi_1\ldots i_{m-1}}\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_{m-1}}. \tag{5.17}$$

Второе слагаемое в правой части равенства (5.16) равно нулю в силу условия (5.1). Таким образом, применение леммы 4.1 к функции (5.11) дает следующее тождество на $T^*\setminus T_0^*(\partial M)$:

$$\overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u - R_{ijkl}\xi^i\xi^k\overset{v}{\nabla}{}^j u\overset{v}{\nabla}{}^l u = \overset{h}{\nabla}_i(z^i - v^i) - \overset{v}{\nabla}_i w^i, \tag{5.18}$$

в котором v^i, w^i, z^i определяются формулами (4.2), (4.3), (5.17).

Обозначим через ρ: $M \to R$ функцию расстояния до края ∂M. Она гладкая в некоторой окрестности ∂M, поэтому для достаточно малого $\rho_0 > 0$ многообразие $M_{\rho_0} = \{x \in M \mid \rho(x) \geqslant \rho_0\}$ имеет гладкий край ∂M_{ρ_0}. Выберем $r > 1$ и обозначим $T_{1,r}M_{\rho_0} = \{(x, \xi) \in T \mid x \in M_{\rho_0}, 1 \leqslant \|\xi\| \leqslant r\}$. Функция u гладкая на $T_{1,r}M_{\rho_0}$, поскольку $T_{1,r}M_{\rho_0} \subset T^*\setminus T_0^*(\partial M)$. Проинтегрируем тождество (5.18) по $T_{1,r}M_{\rho_0}$ и преобразуем правую часть получившегося равенства в соответствии с формулами Гаусса — Остроградского (3.8), (3.9):

$$\int\limits_{T_{1,r}M_{\rho_0}} \left(\overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u - R_{ijkl}\xi^i\xi^k\overset{v}{\nabla}{}^j u\overset{v}{\nabla}{}^l u\right) dV^{2n} + \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega_r M_{\rho_0}} w^i\xi_i d\Sigma^{2n-1} -$$

$$- \int\limits_{\Omega M_{\rho_0}} w^i\xi_i d\Sigma^{2n-1} = \int\limits_{T_{1,r}(\partial M_{\rho_0})} (z - v, \nu)\, dV^{2n-1}. \tag{5.19}$$

Здесь $\Omega M_{\rho_0} = \{(x, \xi) \in \Omega \mid x \in M_{\rho_0}\}$, остальные обозначения см. в § 3.

Равенство (5.19) можно несколько упростить, пользуясь однородностью (5.13) функции $u(x, \xi)$ по переменной ξ. Действительно, поскольку $d\Sigma^{2n-1} = \xi^i \overset{v}{\omega}_i/\|\xi\|$, из (3.3), (4.3), (5.13) вытекает, что подынтегральное выражение во втором слагаемом левой части равенства (5.19) имеет по ξ степень однородности $n + 2m - 1$, т. е. $\mu^*(w^i\xi_i d\Sigma^{2n-1}) = r^{n+2m-1}w^i\xi_i d\Sigma^{2n-1}$, где μ: $\Omega M_{\rho_0} \to \Omega_r M_{\rho_0}$ — диффеоморфизм, определяемый равенством $\mu(x, \xi) = (x, r\xi)$. Делая во втором слагаемом из левой части (5.19) замену переменных интегрирования, соответствующую μ, получим

$$\frac{1}{r}\int\limits_{\Omega_r M_{\rho_0}} w^i\xi_i d\Sigma^{2n-1} = r^{n+2m-2}\int\limits_{\Omega M_{\rho_0}} w^i\xi_i d\Sigma^{2n-1}. \tag{5.20}$$

Заметим, что согласно формуле (4.3) $w^i\xi_i = \xi^i\overset{h}{\nabla}_i u \xi^j \overset{h}{\nabla}_j u = (Hu)^2$. Поэтому соотношение (5.20) дает равенство

$$\frac{1}{r}\int\limits_{\Omega_r M_{\rho_0}} w^i\xi_i d\Sigma^{2n-1} - \int\limits_{\Omega M_{\rho_0}} w^i\xi_i d\Sigma^{2n-1} = (r^{n+2m-2} - 1)\int\limits_{\Omega M_{\rho_0}} (Hu)^2 d\Sigma^{2n-1}. \tag{5.21}$$

Подынтегральное выражение в правой части (5.19) согласно равенствам (3.2), (4.2), (5.17) и равенству $d\rho \wedge dV^{2n-1} = dV^{2n}$ имеет по ξ степень однородности $n+2m-2$, т. е. $\chi^*((z-v,\nu)\,dV^{2n-1}) = \lambda^{n+2m-3}(z-v,\nu)d\lambda \wedge$ $\wedge\, d\Sigma^{2n-2}$, где $\chi([0, r]\times\Omega(\partial M_{\rho_0})) \to T_{1,r}(\partial M_{\rho_0})$ — диффеоморфизм, определяемый равенством $\chi(\lambda, x, \xi) = (x, \lambda\xi)$, $\Omega(\partial M_{\rho_0}) = \{(x,\xi)\in\Omega \mid x \in$ $\in \partial M_{\rho_0}\}$, $d\Sigma^{2n-2}$ — элемент объема на $\Omega(\partial M_{\rho_0})$, связанный с $d\Sigma^{2n-1}$ равенством $d\rho \wedge d\Sigma^{2n-2} = d\Sigma^{2n-1}$. Поэтому

$$\int\limits_{T_{1,r}(\partial M_{\rho_0})} (z-v,\nu)\, d\Sigma^{2n-1} = \int\limits_1^r \lambda^{n+2m-3} d\lambda \int\limits_{\Omega(\partial M_{\rho_0})} (z-v,\nu)\, d\Sigma^{2n-2}. \quad (5.22)$$

Аналогичным образом преобразуется первое слагаемое из левой части (5.19):

$$\int\limits_{T_{1,r}M_{\rho_0}} \left(\overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u - R_{ijk}\xi^i\xi^k \overset{v}{\nabla}{}^j u \overset{v}{\nabla}{}^l u\right) dV^{2n} =$$

$$= \int\limits_1^r \lambda^{n+2m-3} d\lambda \int\limits_{\Omega\mu_{\rho_0}} \left(\overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u - R_{ijkl}\xi^i\xi^k \overset{v}{\nabla}{}^j \overset{v}{\nabla}{}^l u\right) d\Sigma^{2n-1}. \quad (5.23)$$

Подставив (5.21)—(5.23) в (5.19), разделив полученное равенство на r и перейдя к пределу по $r \to 1$, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega M_{\rho_0}} \left[\overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u - R_{ijkl}\xi^k \overset{v}{\nabla}{}^j u \overset{v}{\nabla}{}^l u + (n+2m-2)(Hu)^2\right] d\Sigma^{2n-1} =$$

$$= \int\limits_{\Omega(\partial M_{\rho_0})} (v-z,\nu)\, d\Sigma^{2n-2}. \quad (5.24)$$

Теперь мы хотим в этом равенстве сделать предельный переход по $\rho_0 \to 0$. Подынтегральные выражения в (5.24) являются гладкими на $\Omega\backslash\Omega_0(\partial M)$ и, следовательно, сходятся к своим значениям при $\rho_0 \to 0$ почти всюду на $\Omega(\partial M)$. Заметим также, что первое и третье слагаемые в левой части (5.24) неотрицательны. Поэтому для возможности применения теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла остается установить, что 1) второе слагаемое в левой части (5.24) суммируемо на Ω и 2) подынтегральное выражение в правой части (5.24) мажорируется функцией, не зависящей от ρ и суммируемой на $\Omega(\partial M)$. Предположив, что край ∂M строго выпуклый, мы докажем несколько больше, а именно: подынтегральные выражения в правой части (5.24) и во втором слагаемом из левой его части ограничены постоянной, не зависящей от ρ. Действительно, введем в окрестности точки $x_0 \in \partial M$ систему координат $x^1, \ldots, x^n$ так, чтобы $x^n = \rho$, $g_{in} = \delta_{in}$. Тогда $\nu^i = -\delta^i_n$ и из (4.2), (5.17) следует, что

$$(z-v,\nu) = \xi^n \overset{h}{\nabla}{}^\alpha u \overset{v}{\nabla}_\alpha u - \xi^\alpha \overset{h}{\nabla}_\alpha u \overset{v}{\nabla}{}^n u - 2mf_{ni_1\ldots i_{m-1}}\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_{m-1}}, \quad (5.25)$$

причем в этой формуле (и в формуле (5.27)) действует обычное соглашение о суммировании от 1 до $n-1$ по одноименным повторяющимся сверху и снизу индексам. Исходя из леммы 2.2, с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были приведены при доказательстве теоремы 2.1 (см. замечание, сделанное в ходе доказательства этой теоремы), можно показать, что производные $\overset{h}{\nabla}_\alpha u\,(1 \leqslant \alpha \leqslant n-1)$, $\overset{v}{\nabla}_i u\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ ограничены постоянной, не зависящей от ρ.

Итак, в равенстве (5.24) возможен предельный переход по $\rho_0 \to 0$. Заметим, что $u|_{\Omega_-(\partial M)} \equiv (v-z)|_{\Omega_-(\partial M)} \equiv 0$, $\Omega_-(\partial M) = \{(x,\xi) \in \Omega \mid x \in \partial M,$

$(\xi, \nu) \leqslant 0\}$. С учетом этого замечания и утверждения (5.12) равенство (5.24) после предельного перехода по $\rho_0 \to 0$ приводит к равенству

$$\int\limits_{\Omega}\left[\overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u - R_{ijkl}\xi^i\xi^k \overset{v}{\nabla}{}^j u \overset{v}{\nabla}{}^l u + (n+2m-2)(Hu)^2\right] d\Sigma^{2n-1} =$$
$$= \int\limits_{\Omega_+(\partial M)} \left[L(If) - 2m(If)(j_\nu f)_{i_1\ldots i_{m-1}}\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_{m-1}}\right] d\Sigma^{2n-2}, \tag{5.26}$$

где

$$Lu = \xi^n \overset{h}{\nabla}{}^\alpha u \overset{v}{\nabla}_\alpha u - \overset{v}{\nabla}{}^n u \xi^\alpha \overset{h}{\nabla}_\alpha u. \tag{5.27}$$

Если ввести на $\Omega_+(\partial M)$ локальную систему координат $y^1, \ldots, y^{2n-2}$, то Lu выразится квадратичной формой от переменных u, $\partial u/\partial y^i$ и $\partial u/\partial\|\xi\|$. Ввиду однородности функции (5.13), $\partial u/\partial\|\xi\| = (m-1)u$ и, следовательно, L является квадратичным дифференциальным оператором 1-го порядка на многообразии $\Omega_+(\partial M)$. Поэтому модуль правой части неравенства (5.26) не превосходит $C\left(m\|If\|_0\|j_\nu f|_{\partial M}\|_0 + \|If\|_1^2\right)$. Если секционные кривизны M неположительны, то последние два слагаемых из подынтегрального выражения в левой части (5.26) неотрицательны, и мы получаем

$$\int\limits_{\Omega} \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u d\Sigma^{2n-1} \leqslant C\left(m\|If\|_0\|j_\nu f|_{\partial M}\|_0 + \|If\|_1^2\right). \tag{5.28}$$

Из уравнения (5.14) следует, что $\left|f_{i_1\ldots i_m}\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_m}\right|^2 = \left|\xi^i \overset{h}{\nabla}_i u\right|^2 \leqslant$ $\leqslant \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u$. Интегрируя это неравенство по Ω, имеем

$$\|f\|_0^2 \leqslant C_1 \int\limits_{\Omega} \overset{h}{\nabla}{}^i u \overset{h}{\nabla}_i u d\Sigma^{2n-1}. \tag{5.29}$$

Из соотношений (5.28), (5.29) вытекает неравенство (5.2). Доказательство леммы 5.1 закончено.

Авторы благодарят Р. С. Сакса за полезное обсуждение предмета работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мухометов Р. Г.* К задаче восстановления анизотропной римановой метрики в n-мерной области.— Новосибирск, 1978.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислит. центр; 136).
2. *Бернштейн И. Н., Гервер М. Л.* О задаче интегральной геометрии для семейства геодезических и об обратной кинематической задаче сейсмики // Докл. АН СССР.— 1978.— Т. 243, № 2.— С. 302—305.
3. *Аниконов Ю. Е., Романов В. Г.* Об однозначности определения формы первого порядка ее интегралами по геодезическим // Некорректные математические задачи и проблемы геофизики.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979.— С. 22—27.
4. *Шарафутдинов В. А.* Задача интегральной геометрии для тензорных полей и Уравнение Сен-Венана // Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, № 6.— С. 176—187.
5. *Шарафутдинов В. А.* Задача интегральной геометрии для тензорных полей на евклидовом пространстве // Методы решения некорректных задач и проблемы геофизики.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.— С. 135—148.
6. *Шарафутдинов В. А.* Задача интегральной геометрии для обобщенных тензорных полей на $\mathbf{R}^n$ // Методы исследования неклассических задач математической физики.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.— С. 122—131.
7. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия.— М.: ИЛ, 1948.
8. *Шарафутдинов В. А.* О симметрических тензорных полях на римановом многообразии.— Новосибирск, 1984.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислит. центр; 539).
9. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе.— М.: Мир, 1970.
10. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб.— 1965.— Т. 68, № 3.— С. 373—416.
11. *Милнор Дж.* Теория Морса.— М.: Мир, 1965.
12. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.— М.: Мир, 1973.

г. Новосибирск

Статья поступила 12 февраля 1986 г.