



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Рохлин, Асимптотика фундаментального решения уравнения распространения возмущений в двумерной среде с малой вязкостью, *Прикл. мех. техн. физ.*, 1995, том 36, выпуск 1, 121–129

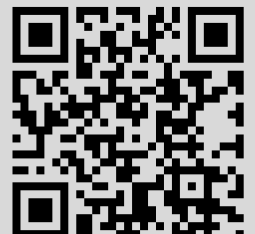
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

3 декабря 2024 г., 08:34:32



ЛИТЕРАТУРА

1. Бувевич Ю.А., Казенин Д.А. Предельные задачи о переносе тепла или массы к цилиндру и сфере, погруженным в инфильтруемый зернистый слой // ПМТФ. — 1977. — № 5. — С. 94—102.
2. Brinkman H.C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Scient. Res. — 1947. — V. A1, N 1. — P. 27—34.
3. Мухин В.А., Смирнова Н.Н. Исследование процессов тепломассообмена при фильтрации в пористых средах. — Новосибирск, 1978. — (Препр. / ИТ СО АН СССР; № 26—78).
4. Жак В.Д., Мухин В.А., Накоряков В.Е., Сафонов С.А. Распространение затопленной струи в узкой щели // ПМТФ. — 1985. — № 3. — С. 69—77.
5. Горин А.В., Хоруженко А.Г., Чупин В.М. Естественная конвекция от источника теплоты в узкой щели // Гидродинамика и тепломассообмен в неподвижных зернистых слоях / Сб. науч. тр. ИТ СО АН СССР. — Новосибирск, 1991. — С. 128—138.
6. Vorontsov S.S., Gorin A.V., Nakoryakov V.E. et al. Natural convection in a Hele — Shaw cell // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1991. — V. 34, N 3. — P. 703—709.
7. Швец М.Е. О решении одной задачи для уравнения параболического типа // ПММ. — 1954. — Т. 18, вып. 2. — С. 243—244.
8. Thompson B.W. Secondary flow in a Hele — Shaw cell // J. Fluid Mech. — 1968. — V. 31, pt 2. — P. 379—395.
9. Накоряков В.Е., Бурдуков А.П., Кашинский О.Н., Гешев П.И. Электродиффузионный метод исследования локальной структуры турбулентных течений. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1986.
10. Nakoryakov V.E., Zhak V.D., Safonov S.A. Flow in a Hele — Shaw cell at large velocities // Russian Journal of Engineering Thermophysics. — 1991. — V. 1, N 1. — P. 1—23.
11. Gordon S.L., Newman J.S., Tobias C.W. The role of ionic migration in electrolytic mass transport diffusivities of $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ and $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$ in KOH and NaOH solutions // Ber. Buns. Gesel. Phys. Chemic. — 1966. — V. 70, N 4. — P. 414—420.
12. Мухин В.А., Воропаев А.А., Балугев В.В. Экспериментальное исследование поверхностного трения при поперечном обтекании цилиндра в зернистой среде // Гидродинамика и тепломассообмен в неподвижных зернистых слоях / Сб. науч. тр. ИТ СО АН СССР. — Новосибирск, 1991. — С. 14—21.
13. Накоряков В.Е., Мухин В.А., Балугев В.В., Воропаев А.А. Процессы переноса при поперечном обтекании цилиндра фильтрационным потоком в неподвижной зернистой среде // Там же. — С. 3—13.
14. Аэров М.Э., Тодес О.М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. — Л.: Химия, 1968.
15. Волков В.И., Мухин В.А., Накоряков В.Е. Исследование структуры течения в пористой среде // ЖПХ. — 1981. — № 4. — С. 838—842.

г. Новосибирск

Поступила 15/VII 1993 г.,
в окончательном варианте — 28/II 1994 г.

УДК 532.516

Д.Б. Рохлин

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДВУМЕРНОЙ СРЕДЕ С МАЛОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Примем, что процесс распространения возмущений в вязкой среде описывается уравнением

$$P\zeta = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) \zeta = f(x, y, t).$$

Это справедливо, в частности, для вязкого газа.

При $\epsilon = 0$ фундаментальное решение оператора P имеет особенность на фронте:

$$\zeta = \frac{\theta(t - R)}{2\pi(t^2 - R^2)^{1/2}}$$

($R = (x^2 + y^2)^{1/2}$, θ — функция Хевисайда). В случае $\epsilon \neq 0$ оно непрерывно и, следовательно, должно быть функцией типа пограничного слоя в окрестности фронта при $\epsilon \rightarrow 0$. В данной работе построены асимптотические разложения фундаментального решения оператора P по параметру $\omega = t/\epsilon^2 \rightarrow \infty$ в трех областях: перед фронтом, за фронтом и в окрестности фронта.

1. Интегральное представление. Применим к уравнению $P\zeta = \delta(x, y, t)$ преобразование Фурье по пространственным переменным, найдем решение соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения аналогично [1, с. 200] и обратим по Фурье:

$$\zeta = \frac{\theta(t)^{+\infty}}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2} r^2 t\right) \frac{\text{sh}\alpha_0(r)t}{\alpha_0(r)} r J_0(rR) dr$$

($\alpha_0(r) = \left(\frac{\epsilon^4}{4} r^4 - r^2\right)^{1/2}$, J_0 — функция Бесселя). Применяя к этому соотношению преобразование Лапласа, получим

$$\int_0^{+\infty} \exp(-pt) \zeta dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{r J_0(rR) dr}{p^2 + (1 + \epsilon^2 p) r^2} = \frac{1}{2\pi(1 + \epsilon^2 p)} K_0\left(\frac{pR}{(1 + \epsilon^2 p)^{1/2}}\right)$$

(K_0 — функция Макдональда). Здесь использована теорема Фубини и формулы [2, с. 264] и (6.532.4) из [3, с. 692]. Далее, по формуле обращения с учетом замены переменных

$$(1.1) \quad p = (z^2 - 1)/\epsilon^2$$

и формулы (9.238.3) из [3, с. 1077] находим

$$(1.2) \quad \zeta = \frac{\omega}{2\pi^{3/2} i} \int_C \frac{\exp(\omega q(z))}{z} \Psi\left(\frac{1}{2}, 1; 2\lambda\omega\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz,$$

где Ψ — вырожденная гипергеометрическая функция; $\lambda = R/t$; $\omega = t/\epsilon^2$ — большой параметр; контур C — образ вертикальной прямой при замене (1.1); $q(z) = z^2 - 1 - \lambda(z - 1/z)$.

Функция $w = z - 1/z$ отображает область $d_1 = \{z: \text{Re}z > 0, |z| > 1\}$ на область $d'_1 = \{z: \text{Re}z > 0\}$, область $d_2 = \{z: \text{Re}z > 0, |z| < 1, z \notin (0, 1)\}$ на область $d'_2 = \{z: \text{Re}z < 0, z \notin (-\infty, 0)\}$, границу области d_1 на мнимую ось, интервал $(0, 1)$ на луч $(-\infty, 0)$. Поэтому правая полуплоскость с разрезом $[0, 1]$ является областью голоморфности подынтегральной функции, а точка $z = 1$ — логарифмической точкой ветвления.

2. Перевальная точка и линия наибыстрейшего спуска (ЛНС). Точки перевала удовлетворяют уравнению $q'(z) = 0$:

$$(2.1) \quad z^3 - \frac{\lambda}{2} z^2 - \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Уравнение (2.1) имеет единственный вещественный корень $z_1 > 0$ (правило знаков Декарта) и два комплексно-сопряженных корня в левой полуплоскости (теорема Рауса—Гурвица). Эти последние не будут в дальнейшем рассматриваться. Отметим следующие легко проверяемые свойства корня z_1 :

- а) точка перевала z_1 простая: $q''(z_1) > 0$;
- б) при $\lambda = 1$ $z_1 = 1$;
- в) функция $z_1 = z_1(\lambda)$ является монотонно возрастающей;
- г) $q(z_1) < 0$ при $\lambda \neq 1$;

д) пусть $\text{Im } z = 0, z > z_1$, тогда $q'(z) > 0$.

Явно z_1 можно вычислить по формулам Кардано. С помощью диаграммы Ньютона находим

$$(2.2) \quad z_1 = 1 + (\lambda - 1)/2 + \dots, \lambda \rightarrow 1.$$

Пусть $z = \xi + i\eta$. Уравнение ЛНС определяем из соотношений $\text{Im}q(z) = \text{Im}q(z_1), \text{Re}q(z) < \text{Re}q(z_1)$:

$$(2.3) \quad (2\xi - \lambda)(\xi^2 + \eta^2) - \lambda = 0.$$

Из уравнения (2.3) следует, что $\xi > \lambda/2$, ЛНС симметрична относительно вещественной оси и допускает явное представление $\xi = \xi(\eta)$. Функция $\xi = \xi(\eta)$ является монотонно возрастающей при $\eta < 0$ и монотонно убывающей при $\eta > 0$. Заметим также, что $\xi(\eta) \rightarrow \lambda/2$ при $\eta \rightarrow \pm \infty$.

Обозначим ЛНС через L . Пусть $\rho = |z|, \varphi = \arg(z)$. Как нетрудно проверить, на дугах окружностей C_ρ^1, C_ρ^2 , расположенных между C и L ,

$$\text{Re}q(z) = \rho^2 \cos(2\varphi) - \lambda \rho \cos(\varphi) + O(1) < 0$$

при достаточно большом ρ . В соответствии с формулой (13.5.2) из [4, с. 325] вырожденная гипергеометрическая функция имеет степенную асимптотику при больших значениях аргумента:

$$(2.4) \quad \Psi\left(\frac{1}{2}, 1; z\right) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k}{k! z^{k+1/2}} + R_N(z).$$

Здесь $R_N(z) = O(z^{-N-1/2})$ при $|z| \rightarrow \infty, |\varphi| < \frac{3\pi}{2}; \left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(1/2)}$ — символ Похгаммера. Поэтому при $z_1 > 1$ контур C можно деформировать в L . Другие деформации контура, которые будут производиться в дальнейшем, обосновываются аналогично.

Выпишем теперь в общем виде основное представление функции ξ , которое затем будет конкретизировано. Допустим, что мы деформировали контур C в некоторый контур $K = K_\delta \cup (K \setminus K_\delta)$ и интеграл I_δ по $K \setminus K_\delta$ экспоненциально мал по сравнению с интегралом по K_δ . Раскладывая функцию Ψ по формуле (2.4) и подставляя это разложение в (1.2), получаем

$$(2.5) \quad \xi = \frac{1}{2\pi^{3/2}it} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!(2\lambda)^{k+1/2} \omega^{k-1/2}} J^{k-1/2} + I_N + I_\delta;$$

$$(2.6) \quad J^\nu = \int_{K_\delta} \frac{\exp(\omega q(z))}{z} \left(z - \frac{1}{z}\right)^\nu dz;$$

$$(2.7) \quad I_N = \frac{\omega}{2\pi^{3/2}it} \int_{K_\delta} \frac{\exp(\omega q(z))}{z} R_N \left(2\lambda \omega \left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz.$$

Назовем J^ν эталонным интегралом.

3. Асимптотика перед фронтом: $\lambda > 1, \omega \rightarrow \infty$. В данном случае будем интегрировать по ЛНС. Пусть $L_\delta \ni z_1$ — участок ЛНС длины δ . Положим $K = L, K_\delta = L_\delta$. Тогда по основному свойству ЛНС имеем $I_\delta = O(\exp(\omega q(z_1)) - \omega\gamma), \gamma > 0$.

Для вычисления эталонного интеграла (2.6) сделаем замену переменных

$$(3.1) \quad q(z) - q(z_1) = -w^2.$$

По теореме об обратной функции в некоторой окрестности начала координат на плоскости w определена голоморфная функция $z = z(w)$, обращающая формулу (3.1) в тождество:

$$z = z(w) = z_1 + i(2/q''(z_1))^{1/2}w + \dots$$

Обратное отображение имеет вид

$$(3.2) \quad w = w(z) = (q(z_1) - q(z))^{1/2} = -i(q''(z_1)/2)^{1/2}(z - z_1) + \dots$$

Образом контура L_δ при отображении (3.2) является отрезок вещественной оси $[-\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta > 0$:

$$J^\nu = \int_{-\alpha}^{\beta} \exp(\omega q(z_1) - \omega w^2) G(w, \nu) dw, \quad G(w, \nu) = \frac{(z^2(w) - 1)^\nu}{z^{\nu+1}(w)} \frac{dz}{dw}(w).$$

По лемме Ватсона [5, с. 57] находим

$$(3.3) \quad J^\nu \sim \exp(\omega q(z_1)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + 1/2)}{\omega^{n+1/2} (2n)!} \frac{\partial^{2n} G}{\partial w^{2n}}(0, \nu).$$

Формула (3.3) показывает, что члены ряда (2.5) образуют асимптотическую шкалу. Для обоснования этого разложения достаточно следующей грубой оценки остатка (2.7):

$$|I_N| \leq A \exp(\omega q(z_1)) \omega^{-N+1/2}.$$

Здесь A не зависит от ω .

Коэффициенты в разложении (3.3) определим по формуле Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n G}{\partial w^n}(0, \nu) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(w, \nu)}{w^{n+1}} dw = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma''} \frac{(z^2 - 1)^\nu}{w^{n+1}(z) z^{\nu+1}} dz = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^n}{dz^n} \left(\left(\frac{z - z_1}{w(z)} \right)^{n+1} \frac{(z^2 - 1)^\nu}{z^{\nu+1}} \right), \end{aligned}$$

где γ' — замкнутый контур, окружающий начало координат на плоскости w , а γ'' — его образ на плоскости z . Воспользовавшись этой формулой, выпишем главный член разложения (2.5):

$$(3.4) \quad \xi = \frac{\exp(\omega q(z_1))}{2\pi(z_1(z_1^2 - 1)q''(z_1)Rt)^{1/2}} + O(\omega^{-1} \exp(\omega q(z_1))).$$

Очевидно, что полученное разложение неравномерно при $\lambda \rightarrow 1 + 0$.

4. Асимптотика за фронтом: $\lambda < 1$, $\omega \rightarrow \infty$. Учитывая, что $z_1 < 1$, составим контур интегрирования S из нижней части ЛНС, отрезка $[z_1, 1 - \delta]$, идущего по нижнему берегу разреза $[0, 1]$, окружности S_δ с центром в точке $z = 1$ радиуса δ , отрезка $[1 - \delta, z_1]$, идущего по верхнему берегу разреза, и верхней части ЛНС. Здесь δ — некоторое малое положительное число.

Положим в формулах (2.5) — (2.7) $K = S$, $K_\delta = S_\delta$. Из свойств функции $q(z)$ следует, что точка $z = 1$ лежит на рельефной поверхности $\text{Re } q(z)$ выше контура $S \setminus S_\delta$. Поскольку $q(1) = 0$, имеем $I_\delta = O(\exp(-\omega\gamma))$, $\gamma > 0$. Для вычисления эталонного интеграла (2.6) сделаем замену $q(z) - q(1) = w$. Получим

$$J^\nu = \int_{S'_\delta} \exp(\omega w) w^\nu Q(w, \nu) dw, \quad Q(w, \nu) = \frac{(z^2(w) - 1)^\nu}{w^\nu z^{\nu+1}(w)} \frac{dz}{dw}(w).$$

Замкнутый контур S'_δ окружает начало координат на плоскости w и обходится в положительном направлении (против часовой стрелки). Функция

$Q(w, \nu)$ голоморфна в окрестности точки $w = 0$. Аналогично предыдущему по формуле Коши находим

$$(4.1) \quad \frac{\partial^n Q}{\partial w^n}(0, \nu) = \frac{d^n}{dz^n} \Big|_{z=1} \left(\frac{z^n}{(z-\lambda)^{\nu+n+1}(z+1)^{n+1}} \right) = \\ = \sum_{r+j+s=n} (-1)^{r+j} \frac{(n+j)!n!}{r!j!s!(n-s)!} \frac{1}{2^{n+j+1}(1-\lambda)^{\nu+n+r+1}} \frac{\Gamma(\nu+n+r+1)}{\Gamma(\nu+n+1)}$$

(r, j, s — неотрицательные целые числа).

Разложим $Q(w, \nu)$ в ряд Тейлора в окрестности начала координат и воспользуемся леммой Ватсона для интегралов по петле [5, с. 272]:

$$(4.2) \quad I_M^1 = 2\pi i \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\omega^{-n-\nu-1}}{n! \Gamma(-\nu-n)} \frac{\partial^n Q}{\partial w^n}(0, \nu) + I_M^1.$$

Здесь $I_M^1 = O(\omega^{-M-\nu-1})$. Из формулы (4.2) следует, что все члены ряда (2.5) имеют порядок $\omega^0 = 1$. После подстановки (4.2) в (2.5) и перегруппировки имеем

$$(4.3) \quad \zeta = \frac{i}{\pi^{1/2} t} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_n^k \omega^{-n} + I_N + I_{M,N}^2 + I_0,$$

$$\text{где } \alpha_n^k = (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k \frac{\partial^n Q}{\partial w^n}(0, -k-1/2)}{k!n!(2\lambda)^{k+1/2} \Gamma(k+1/2-n)}; \quad I_{M,N}^2 = O(\omega^{-M}).$$

Предположим, что $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{M,N}^2 = O(\omega^{-M})$. Тогда, переходя в (4.3) к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим асимптотическое разложение

$$(4.4) \quad \zeta \sim \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \omega^{-n};$$

$$(4.5) \quad \xi_n = \frac{1}{\pi^{1/2} t} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^k.$$

При $1/3 < \lambda < 1$ ряды (4.5) сходятся и выражаются через гипергеометрическую функцию:

$$(4.6) \quad \xi_n = \frac{\left(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\right)^{1/2}}{\pi^{1/2} t 2^{n+1} (1-\lambda)^{n+1}} \sum_{r+j+s=n} (-1)^j \frac{(n+j)!}{r!j!s!(n-s)!} \times \\ \times \frac{1}{2^r (1-\lambda) \Gamma(1/2-n-r)^2} F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - n - r; \frac{\lambda-1}{2\lambda} \right), \\ {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k, \quad |z| < 1.$$

Положив в (4.6) $n = 0$ и воспользовавшись формулой (5.2.11.16) из [6, с. 710], находим

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi t} \frac{1}{(2\lambda)^{1/2} (1-\lambda)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} \left(\frac{\lambda-1}{2\lambda}\right)^k = \frac{1}{2\pi (t^2 - R^2)^{1/2}}.$$

Таким образом, ξ_0 совпадает с фундаментальным решением вырожденной задачи.

Итак, если верно предположение о поведении остатков I_N, I_{N+1}^2 , то справедливо асимптотическое разложение (4.4), (4.5) при $1/3 < \lambda < 1$.

Независимо от предыдущего теперь получим аналогичные формулы в случае $0 < \lambda < 1/3$. Для этого преобразуем подынтегральное выражение (1.2). Пусть $f_0(z)$ — целая функция. В соответствии с формулой (13.1.6) из [4, с. 322] имеем

$$(4.8) \quad \Psi\left(\frac{1}{z}, 1; z\right) = -\pi^{-1/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 1; z\right) \ln(z) + f_0(z);$$

$$(4.9) \quad {}_1F_1(a; b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

Будем интегрировать по контуру S . Поскольку интеграл от голоморфной функции по замкнутому контуру S равен нулю, после подстановки (4.8) в (1.2) и почленного интегрирования ряда (4.9) получим

$$(4.10) \quad \zeta = -\frac{\omega}{2\pi^2 i t} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{(k!)^2} (2\lambda\omega)^k \frac{\partial J^r}{\partial \nu} \Big|_{\nu=k} + I_N^2 + I_\delta.$$

Здесь I_N^1 — интеграл от остатка ряда. Заметим, что $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N^1 = 0$. Дифференцируя по ν асимптотику (4.2), находим

$$(4.11) \quad \frac{\partial J^r}{\partial \nu} \Big|_{\nu=k} = 2\pi i \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^{n+k+1} \frac{(n+k)!}{n! \dots n+k+1} \frac{\partial^n Q}{\partial w^n}(0, k) + I_M^4,$$

где $I_M^4 = O(\omega^{-M-k-1})$ и использованы следующие формулы:

$$\frac{1}{\Gamma(-k-n)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \Big|_{\nu=k} \frac{1}{\Gamma(-\nu-n)} = (-1)^{n+k+1} (n+k)!.$$

Из формулы (4.11) вытекает, что все члены ряда (4.10) имеют порядок $\omega^n = 1$. Подставим (4.11) в (4.10):

$$(4.12) \quad \zeta = \frac{1}{\pi t} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} \beta_n^k \omega^{-n} + I_N^2 + I_{M,N}^5 + I_\delta.$$

Здесь

$$\beta_n^k = (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{n!(k!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)_k (2\lambda)^k \frac{\partial^n Q}{\partial w^n}(0, k).$$

Предположим, что $\lim_{N \rightarrow \infty} I_{M,N}^5 = O(\omega^{-m})$. После перехода в (4.12) к пределу при $N \rightarrow \infty$ приходим к разложению (4.4), где

$$(4.13) \quad \zeta_{\infty} = \frac{1}{\pi t} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_n^k.$$

С помощью формулы (4.1) аналогично предыдущему находим, что при $0 < \lambda < 1/3$ ряд для ζ_0 сходится к фундаментальному решению вырожденной задачи, а остальные ряды (4.13) выражаются через гипергеометрическую функцию:

$$(4.14) \quad \zeta_{\infty} = \frac{(-1)^n}{\pi t 2^{n+1} (1-\lambda)^{n+1}} \sum_{r+j+s=n} (-1)^{r+j} \frac{(n+j)!}{r! j! (n-s)!} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(n+r+1)}{2^r(1-\lambda)^r} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, n+r+1; 1; \frac{2\lambda}{\lambda-1}\right).$$

Принимая во внимание формулу (15.3.7) из [4, с. 373]

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, n+r+1; 1; \frac{2\lambda}{\lambda-1}\right) = \frac{\Gamma(n+r+1/2)}{\pi^{1/2}\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\right)^{1/2} \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - n - r; \frac{\lambda-1}{2\lambda}\right),$$

закключаем, что функции (4.14) являются аналитическими продолжениями по λ функций (4.6) на интервал $(0, 1/3)$. Этот факт, а также правильная формула для ζ_0 в определенной степени подтверждают правильность предположений о поведении остатков I_N, I_{MN}^2, I_{MN}^5 .

5. Равномерное разложение в окрестности фронта: $\lambda \approx 1, \omega \rightarrow \infty$. Положим в формулах (2.5)–(2.7) $K_\delta = C_\delta, K = C_\delta \cup (L \setminus L_\delta)$. Здесь C_δ — малая дуга, пересекающая вещественную ось правее точки перевала z_1 и точки ветвления $z = 1$, а контур L_δ определен в п. 3.

Эталонный интеграл вычислим по методу Блайстейна [7]. Нам будет удобно интегрировать в (2.6) по полному контуру K , а соответствующую экспоненциальную ошибку отнести к I_δ .

Рассмотрим уравнение

$$(5.1) \quad q(z) = -(w^2/2 + bw),$$

где $b = i(2|q(z_1)|)^{1/2} \text{sign}(\lambda - 1)$. В некоторой окрестности ЛНС, содержащей контур C_δ и точку $z = 1$, определена голоморфная функция, обращающая (5.1) в тождество:

$$(5.2) \quad w - w(z) = -b + (b^2 - 2q(z))^{1/2}.$$

Знак корня в формуле (5.2) достаточно определить на ЛНС:

$$\text{sign}((b^2 - 2q(z))^{1/2}) = \text{sign}(\text{Re}z), z \in L.$$

При отображении (5.2) точка $z = 1$ переходит в начало координат, точка $z = z_1$ — в точку $w = -b$, контур K — в контур K_1 , совпадающий с прямой $\text{Im } w = -b$ вне некоторой окрестности начала координат. Эталонный интеграл преобразуется:

$$(5.3) \quad J^r = \int_{K_1} \exp\left(-w\left(\frac{w^2}{z} + bw\right)\right) w^r g(w, \nu) dw.$$

Здесь $g(w, \nu) = \frac{(z^2(w) - 1)^\nu}{z(w)^{\nu+1}} \frac{1}{w^r} \frac{dz}{dw}$ — голоморфная функция.

Для вычисления интеграла (5.3) представим функцию $g(w, \nu)$ в виде

$$g(w, \nu) = \gamma_0(\nu) + \gamma_1(\nu)w + w(w+b)g_1(w, \nu).$$

Тогда

$$J^r = \omega^{-(\nu+1)/2} \gamma_0(\nu) U_\nu(b\omega^{1/2}) + \omega^{-(\nu+2)/2} \gamma_1(\nu) U_{\nu+1}(b\omega^{1/2}) + J_1^r;$$

$$(5.4) \quad U_\nu(s) = \int_{K_1} \exp\left(-\left(\frac{w^2}{2} + sw\right)\right) w^r dw = (2\pi)^{1/2} \exp\left(-b\nu\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(\frac{s^2}{4}\right) D_\nu(-is),$$

где D_ν — функция параболического цилиндра. Здесь использована формула (3.462.3) из [3, с. 352] с учетом того, что при $\text{Re } \nu > -1$ контур K можно деформировать на вещественную ось. При $\text{Re } \nu \leq -1$ формула (5.4) справедлива по принципу аналитического продолжения.

Интегрируя по частям, находим

$$J_1^{\nu} = \int_{\kappa_1} \exp\left(-\omega\left(\frac{w^2}{2} + bw\right)\right) w^{\nu+1}(w+b)g_1(w,\nu)dw = \\ = \omega^{-1} \int_{\kappa_1} \exp\left(-\omega\left(\frac{w^2}{2} + bw\right)\right) w^{\nu}((\nu+1)g_1(w,\nu) + w\frac{dg_1}{dw}(w,\nu))dw.$$

Используя представление $(\nu+1)g_1 + w\frac{dg_1}{dw} = \gamma_2 + \gamma_3w + (w+b)wg_2$ и продолжая итерационный процесс, приходим к разложению [7]

$$(5.5) \quad J^{\nu} = \frac{U_{\nu}(b\omega^{1/2})}{\omega^{(\nu+1)\gamma_2}} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{\gamma_{2m}}{\omega^m} + O(\omega^{-M}) \right] + \frac{U_{\nu+1}(b\omega^{1/2})}{\omega^{(\nu+2)\gamma_2}} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{\gamma_{2m+1}}{\omega^m} + O(\omega^{-M}) \right];$$

$$(5.6) \quad \gamma_0(\nu) = g(0,\nu), \quad \gamma_1(\nu) = (g(0,\nu) - g(-b,\nu))/b, \\ \gamma_{2m}(\nu) = (\nu+1)g_m(0,\nu),$$

$$\gamma_{2m+1}(\nu) = (\nu+1)(g_m(0,\nu) - g_m(-b,\nu))/b + \frac{dg_m}{dw}(-b,\nu).$$

Функции $g_{m+1}(w)$, $m \geq 1$ определяются по рекуррентной формуле

$$(\nu+1)g_m(w,\nu) + w\frac{dg_m}{dw}(w,\nu) = \gamma_{2m}(\nu) + \gamma_{2m+1}(\nu)w + w(w+b)g_{m+1}(w,\nu).$$

Для того чтобы определить порядки величин в формуле (2.5), найдем асимптотические разложения функций $U_{\nu}(b\omega^{1/2})$, $\omega \rightarrow \infty$. В соответствии с формулами (9.246.1), (9.246.2) из [3, с. 1079] имеем

$$(5.7) \quad U_{\nu}(b\omega^{1/2}) \sim (2\pi)^{1/2} \exp\left(-i\nu\frac{\pi}{2}\right) \exp(-\omega|b|^2/2) |b|^{\nu}\omega^{\nu/2}, \quad \lambda > 1;$$

$$(5.8) \quad U_{\nu}(b\omega^{1/2}) \sim \frac{2\pi}{\Gamma(-\nu)} \exp\left(-i\nu\frac{\pi}{2}\right) |b|^{-\nu-1}\omega^{-(\nu+1)/2}, \quad \lambda < 1.$$

Поскольку $b = O(\lambda - 1)$ (см. (2.2)) и коэффициенты γ_n являются ограниченными функциями при малых b , заключаем, что члены ряда (2.5) образуют асимптотическую шкалу на интервале $\lambda \in [1 - \omega^{-\mu}, 1 + \lambda_0]$, где $\lambda_0 = \text{const}$, μ — произвольное положительное число. Действительно, по формулам (5.5), (5.7), (5.8) находим

$$a) \quad \omega^{-k+1/2} J^{-k-1/2} \sim B_1(b) \exp(-\omega|b|^2/2) \omega^{-k}, \quad \lambda - 1 \in (0, \lambda_0];$$

$$б) \quad \omega^{-k+1/2} J^{-k-1/2} \sim B_2 |b|^{k-1/2}, \quad \lambda - 1 \in [-\omega^{-\mu_1}, -\omega^{-\mu_2}];$$

$$в) \quad \omega^{-k+1/2} J^{-k-1/2} \sim B_3 \omega^{-k+1/4}, \quad \lambda - 1 \in [-\omega^{-\mu_3}, 0],$$

где

$$\mu_1 > 0, \quad \mu_1 < \mu_2 < 1/2, \quad \mu_3 \geq 1/2,$$

$$B_1(b) = (2\pi)^{1/2} \exp\left(i\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right) |b|^{-k-1/2} \left(\gamma_0\left(-k - \frac{1}{2}\right) - b\gamma_1\left(-k - \frac{1}{2}\right) \right),$$

$$B_2 = 2\pi / \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \exp\left(i\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right) \gamma_0\left(-k - \frac{1}{2}\right),$$

$$B_3 = \gamma_0\left(-k - \frac{1}{2}\right) U_{-k-1/2}(-ic_0), \quad c_0 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |b|\omega^{1/2}.$$

Ограничиваясь главными членами разложения в (2.5), (5.5), имеем

$$(5.9) \xi \sim \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \lambda^{1/2} i t} \left(\gamma_0 \left(-\frac{1}{2} \right) U_{-1/2}(b\omega^{1/2}) \omega^{1/4} + \gamma_1 \left(-\frac{1}{2} \right) U_{1/2}(b\omega^{1/2}) \omega^{-1/4} \right).$$

Коэффициенты $\gamma_0(-1/2)$, $\gamma_1(-1/2)$ вычислим по формуле (5.6):

$$(5.10) \quad \gamma_0 \left(-\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{-b}{2q'(1)} \right)^{1/2},$$

$$\gamma_1 \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{h} \left(\left(\frac{-b}{2q'(1)} \right)^{1/2} - \frac{i}{z_1^{1/2} (z_1^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{-b}{q'(z_1)} \right)^{1/2} \right).$$

Формула (5.9) определяет главный член равномерного разложения ξ на промежутке $\lambda \in [1 - \omega^{-\mu}, 1 + \lambda_0]$, $\mu > 0$. Из нее можно вывести формулу (3.4), но не формулы п. 4, поскольку в последних $\lambda < 1$ фиксировано.

Отметим, что на самом фронте наблюдается рост решения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, раскрывая неопределенность в (5.10) и используя формулу (19.3.5) из [4, с. 496], получим

$$\xi \sim \frac{\omega^{1/4}}{(2\pi)^{3/2} i t} \gamma_0 \left(-\frac{1}{2} \right) U_{-1/2}(0) = \frac{\omega^{1/4}}{2^{9/4} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) t}, \quad \lambda = 1, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. — М.: Наука, 1971.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. — М.: Наука, 1971.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
5. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981.
7. Bleistein N. Uniform asymptotic expansions of integrals with stationary point near algebraic singularity // *Comm. Pure and Appl. Math.* — 1966. — V. 19, N 4.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 3/III 1994 г.

УДК 539.3 + 622.83

Л.А. Назаров, Е.Н. Шер

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ НАРУШЕНИЙ СПЛОШНОСТИ

Общепризнанным является факт, что массив горных пород имеет блочное строение [1], причем межблочные контакты во многом определяют поведение массива в целом. Как показано в [1], динамические явления не могут быть связаны только с разрушением материала блоков, а в основном происходит переупаковка системы блоков без их разрушения. Поэтому для адекватного описания деформационных процессов, происходящих как в горном массиве, так и в земной коре в целом, чрезвычайно важно определить характеристики межблочных контактов.

© Л.А. Назаров, Е.Н. Шер, 1995