W. P. Odinets, The norms of linear and nonlinear metric projections,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1976, Number 7, 56–64

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1976 МАТЕМАТИКА № 7 (170)

УДК 513.88

В. П. Одинец

О НОРМАХ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

1. Пусть B — банахово пространство над полем R вещественных чисел, а M — его чебышевское подпространство [1]), т. е. такое подпространство, что для каждого $x \in B$ существует единственный элемент $x' \in M$, такой, что $\|x - x'\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Отображение $x \to x'$ называется метрической проекцией, ассоциированной с M, и будет обозначаться через φ_M. Известно, что метрическая проекция есть однородный идемпотентный ограниченный (точнее, $1 \leqslant \|\varphi_M\| \leqslant 2$ при $M \neq [\theta]$, где θ — нулевой элемент в B) оператор (см., напр., [1]). В общем случае оператор φ_M не является линейным и, более того, φ_M не всегда является непрерывным оператором [2], [3], [5].

Как известно, для того, чтобы оператор φ_M был линейным, необходимо и достаточно, чтобы множество $\ker \varphi_M = \{z \in B: \varphi_M(z) = \theta\}$ было подпространством в B, или, что эквивалентно (см. [2]), чтобы оператор $(I - \varphi_M)$, где I — тождественный оператор в B, был линейным и $\|I - \varphi_M\| = 1$, в частности, напр., если либо $\operatorname{codim} M = 1$, либо в $\ker \varphi_M$ есть подпространство N: $B = M + N$, $M \cap N = [\theta]$, то φ_M — линейный оператор. Более детальные необходимые и достаточные условия линейности оператора φ_M были получены Андо [4] для подпространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$, где $1 < p \neq 2$, и Моррисом [5] — для $L_1(S, \Sigma, \mu)$ (последний требовал еще конечномерности подпространства M [2]).

Пусть φ_M — линейная метрическая проекция, а $\ker \varphi_M$ — чебышевское подпространство в B. Тогда существует метрическая проекция $\varphi_{\ker \varphi_M}$. В настоящей работе изучается связь между нормами операторов φ_M и $\varphi_{\ker \varphi_M}$ в случаях, когда оператор $\varphi_{\ker \varphi_M}$ линейный и нелинейный. Для произвольной нелинейной метрической проекции дается достаточное условие того, что ее норма будет строго больше 1. В примере 4.2 указывается нелинейная метрическая проекция с нормой, равной 1.

---

[1]) Подпространства везде предполагаются замкнутыми. Обозначения классических пространств следуют [6].

[2]) Из работ, посвященных линейности оператора φ_M в конечномерных пространствах, можно указать на работы Хиршфельда, Рудина и Смита (см., напр., [17], [18]).

По-видимому, первый результат в изучении связи норм операторов φ_M и $\varphi_{\ker\varphi_M}$ содержится в работе [2], где доказано следующее утверждение (А): *если* φ_M — *линейная метрическая проекция, и* $\ker\varphi_M$ — *чебышевское подпространство, то* $\|\varphi_M\|=1$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi_{\ker\varphi_M}=I-\varphi_M$, *т. е.* $\ker\varphi_{\ker\varphi_M}=M$.

Отсюда, очевидно, следует, что $\|\varphi_{\ker\varphi_M}\|=1$, когда $\|\varphi_M\|=1$. Обратное, как показывает уже следующий пример, вообще говоря, неверно.

Пример 1.1. Пусть E^2 — евклидова плоскость с координатами $(x;\ y)$, и точка $O=(0;\ 0)$ — начало координат. Банахово пространство B^2 получим из E^2 перенормировкой E^2 с помощью метрики Минковского относительно некоторой замкнутой выпуклой центрально-симметричной кривой $\varkappa$ единичной сферы в B^2. Пусть часть кривой $\varkappa$ задается в E^2 при $y\geqslant 0$ уравнениями:

$$\begin{cases} y^2+(x-3)^2=5^2 & \text{при } -2\leqslant x\leqslant -1;\\ (y+3/2)^2+(x+5/2)^2=(3\sqrt{5/2})^2 & \text{при } -1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$$

Очевидно, что B^2 — строго нормированное рефлексивное пространство, и потому любое его подпространство чебышевское (см. [7]). Возьмем на кривой $\varkappa$ точки A_1, A_2, A_3 с координатами: $A_1=(0;\ (\sqrt{65}-3)/2)$, $A_2=(2;\ 0)$, $A_3=(-1;\ 3)$ (см. рис. 1). Отождествим векторы $\overrightarrow{OA_i}$ из E^2 с элементами из B^2, которые обозначим соответственно через $e_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$. Пусть $M=\{\lambda e_1\colon \lambda\in R\}$. Легко видеть, что: 1) φ_M — линейная проекция, т. к. $\operatorname{codim} M=1$; 2) $\ker\varphi_M=\{\lambda e_2\colon \lambda\in R\}$; 3) $\varphi_{\ker\varphi_M}$ есть также линейная проекция, т. к. $\operatorname{codim}\ker\varphi_M=1$; 4) $\ker\varphi_{\ker\varphi_M}=\{\lambda e_3\colon \lambda\in R\}$; 5) $\|\varphi_M(e_3)\|>1$, и, значит, $\|\varphi_M\|>1$; 6) прямая $\{e_2+\lambda e_3\colon \lambda\in R\}$ — опорная гиперплоскость (но не единственная) к единичному шару $U^{(1)}$ из B^2 в точке e_2, и, следовательно, $\|\varphi_{\ker\varphi_M}\|=1$.

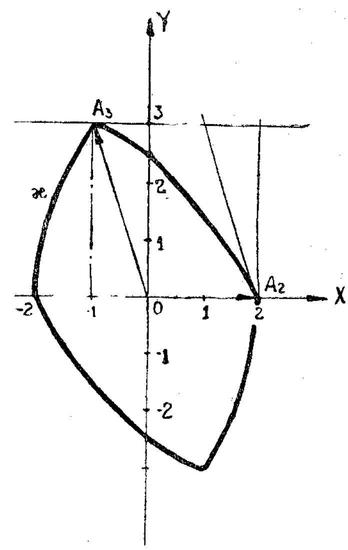

Рис. 1.

2. Пусть B — банахово пространство. Через S (далее везде) будем обозначать единичную сферу в B, а через $U^{(1)}$ — единичный шар в B. Пусть $x\in B\setminus[\theta]$. Через $\mathfrak{G}_x$ будем обозначать множество элементов из B, в направлении которых норма $\|\cdot\|$ дифференцируема в точке x, т. е. множество $\{y\in B\colon$ существует $g(x,\ y)=\lim\limits_{t\to 0}t^{-1}(\|x+ty\|-\|x\|)\}$.

Пусть далее M и N — подпространства в B. Будем писать $B=M\oplus N$, если $M\cap N=[\theta]$, $M+N=B$. Если $B=M\oplus N$, то проекцию (т. е.

линейный ограниченный идемпотентный оператор) из B на M вдоль N будем обозначать через P_M^N.

Если на подпространстве M пространства B существует проекция, по норме равная 1, то подпространство M будем называть правильным. Если при этом такая проекция единственная, то будем говорить, что пара (B, M) обладает свойством (γ). (Необходимые и достаточные условия того, что пара (B, M) обладает свойством (γ), содержатся в работе [9]).

Пусть $\{x_i\}$ — последовательность элементов из B. Через $[x_1, x_2, \dots]$ будем обозначать наименьшее подпространство в B, натянутое на элементы $x_1, x_2, \dots$ и пусть M — чебышевское подпространство в B. Из определения метрической проекции и множества $\ker \varphi_M$ следует, что $\ker \varphi_M$ есть замкнутое множество, состоящее из тех и только тех элементов $z \in B$, которые ортогональны[1)] M (или, кратко, $z \perp M$).

Для дальнейшего нам понадобится хорошо известная

Лемма 2.1. *Пусть M — подпространство банахова пространства B, P_M — линейная проекция на $M: \|P_M\| = 1$, $N = P_M^{-1}(\theta)$. Тогда $M \perp N$*[2)]. *Наоборот, если $B = M \oplus N$ и $M \perp N$, то $\|P_M^N\| = 1$.*

Теорема 2.1. *Пусть M — чебышевское подпространство банахова пространства B, φ_M — линейный оператор, и $N = \ker \varphi_M$ также чебышевское подпространство в B. Пусть φ_N — линейный оператор. Для того, чтобы $\|\varphi_N\| > 1$, необходимо, а когда пара (B, N) обладает свойством (γ), то и достаточно, чтобы $\|\varphi_M\| > 1$.*

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из (А). Предположим теперь, что $\|\varphi_M\| > 1$, а $\|\varphi_N\| = 1$. Так как $N \perp M$, то в силу леммы 2.1 $\|P_N^M\| = 1$. В силу линейности метрической проекции φ_M оператор $I - \varphi_M$ есть линейная проекция на N, аннулирующаяся на M, и, следовательно, $I - \varphi_M = P_N^M$. В силу нашего предположения, учитывая, что пара (B, N) обладает свойством (γ), получаем $\varphi_N = I - \varphi_M$. В силу же (А) тогда $\|\varphi_M\| = 1$ вопреки предположению. Значит, $\|\varphi_N\| > 1$.

Определение 2.1. Пусть M — подпространство банахова пространства B $(M \neq [\theta]$, $M \neq B)$. Будем говорить, что M есть rPU-подпространство [9], если для любого $x \in S \cap M$ любой функционал f из M^* (подпространства, сопряженного к M) такой, что $f(x_f) = \|f\| \neq 0$ имеет единственное расширение на B с сохранением нормы. (Достаточное, а когда M конечномерно, то и необходимое условие того, что M есть rPU-подпространство в B, содержится в [11] и [12] (см. ниже условие 2°)).

Определение 2.2. Пусть M — подпространство банахова пространства $B (M \neq [\theta]$, $M \subseteq B)$. Точку $x \in M \setminus [\theta]$ будем называть конической в M [13], если $\mathfrak{G}_x \cap M = [x]$. Например, точка e_2 в примере 1.1 коническая в B^2.

---

1) $z \perp M \Leftrightarrow \|z\| = \inf\limits_{\lambda \in R,\, y \in M} \|z + \lambda y\|$ (см. [10].

2) $M \perp N \Leftrightarrow z \perp N$ для любого $z \in M$).

Следствие 2.1. *Пусть M — чебышевское подпространство банахова пространства B, φ_M — линейный оператор, причем $\|\varphi_M\| > 1$, $N = \operatorname{Ker}\varphi_M$ — чебышевское подпространство в B, $A\ \varphi_N$ — линейная проекция. Если выполнено одно из следующих условий:*

1°. *подпространство N есть rPU-подпространство;*

2°. *для любого $x \in N \cap S$ имеет место соотношение $\overline{N + \mathfrak{G}_x} = B$* [1];

3°. *пространство B — гладкое пространство;*

4°. *пространство B^* — строго нормированное пространство;*

5°. *в подпространстве N есть коническая в N точка x_0: $\overline{N + \mathfrak{G}_{x_0}} = B$,*

то $\|\varphi_N\| > 1$.

Доказательство. В силу линейности оператора φ_M существует линейная проекция на N с нормой, равной 1. Условия 1°—5° являются тогда, (каждое в отдельности) достаточными (см. [9], теоремы 2.1 и 3.4) для того, чтобы пара (B, N) обладала свойством (γ).

Замечание 2.1. Любое из условий 1°—4° следствия 2.1 влечет предыдущие (см., напр., [9]). Обратное, вообще говоря, неверно [9], [14]. Из классических пространств, для которых справедливо свойство 4°, можно назвать, напр., L_p [2] $(1 < p < \infty)$, $l_p^n (1 < p < \infty;\ n \geqslant 2)$ и рефлексивные гладкие пространства Орлича.

Заметим также, что в гладких рефлексивных строго нормированных пространствах (как и во всех рефлексивных строго нормированных пространствах) любое подпространство чебышевское. Поэтому легко строятся иллюстрирующие следствие 2.1 примеры, в которых реализуется любое из условий 1°—4°. Сейчас же мы дадим пример, в котором для доказательства неравенства $\|\varphi_N\| > 1$ существенно используется условие 5°.

Пример 2.1. Пусть E^3 — евклидово пространство с координатами $(x;\ y;\ z)$, и точка $O = (0;\ 0;\ 0)$. Банахово пространство B^3 получим из E^3 перенормировкой с помощью метрики Минковского относительно некоторой замкнутой, ограниченной, строго выпуклой [3] центрально-симметричной поверхности F единичной сферы в B^3. Пусть часть центрально-симметричной кривой ν задается при $y \geqslant 0$ уравнениями:

$$\begin{cases} (x - 3/2)^2 + (y + 3/2)^2 = (3\sqrt{5/2})^2 & \text{при } -3 \leqslant x \leqslant 0; \\ (x + 3/2)^2 + (y + 3/2)^2 = (3\sqrt{5/2})^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 3; \\ z = 0. \end{cases}$$

Пусть F_1 — поверхность вращения всей кривой ν вокруг оси Oy (см. рис. 2). Очевидно, F_1 — строго выпуклая (но не гладкая), замкнутая, центрально-симметричная поверхность, являющаяся границей

---

[1] $\overline{N + \mathfrak{G}_x}$ означает замыкание линейной оболочки подпространств N и $\mathfrak{G}_x$.

[2] Пространства $L_p\,(1 < p < \infty)$ и $l_p^n\,(1 < p < \infty;\ n \geqslant 2)$ не только гладкие, но и строго нормированные (см., напр., [8]).

[3] Поверхность $F \subset E^3$ называется строго выпуклой, если F принадлежит границе $\partial\mathfrak{B}$ некоторого строго выпуклого множества $\mathfrak{B} \subset E^3$, т. е. замкнутого множества, пересечение которого с каждой опорной плоскостью есть одноточечное множество. Поверхность F ограничена, если существует шар U (конечного радиуса), такой, что $F \subset U$.

ограниченного множества $\mathfrak{B}_1$. Положим $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \cap U_1 \cap U_2$, где U_1 и U_2 — замкнутые шары радиуса 100 с центрами соответственно в точках $C_1 = (-1; 0; \sqrt{8} - 100)$ и $C_2 = (1; 0; 100 - \sqrt{8})$. Очевидно, что $F = \partial \mathfrak{B}_2$ есть строго выпуклая замкнутая ограниченная центрально-симметричная поверхность. Пусть точка $A_1 \in F \cap \{\text{ось } Oz\}$, $A_2 = (3; 0; 0)$, $A_3 = (-1; 0; \sqrt{8})$, $A_4 = (0; 3; 0)$.

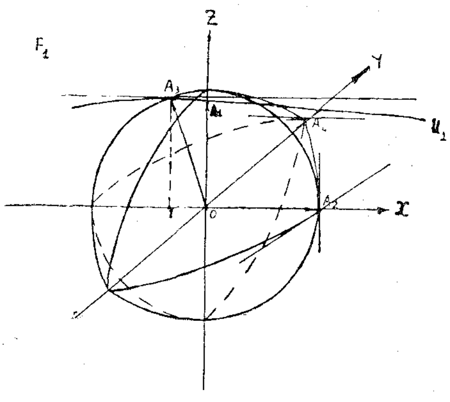

Рис. 2.

Отождествим векторы $\overrightarrow{OA_i}$ из E^3 с элементами из B^3, которые обозначим соответственно через e_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Заметим, что $\|e_i\| = 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Кроме того, отождествим плоскость (xOy) с подпространством в B^3, которое обозначим через N. Пусть $M = [e_1]$. Тогда легко видеть, что 1) $N \subseteq \ker \varphi_M$, а $B^3 = M \oplus N$, и, значит, φ_M — линейная проекция; 2) φ_N — линейная проекция (т. к. $\operatorname{codim} N = 1$); 3) $\|\varphi_M(e_3)\| > 1$, и потому $\|\varphi_M\| > 1$; 4) точка e_2 коническая в N, $\mathfrak{G}_{e_2} \supset M$, и, значит, выполнено условие 5° следствия 2.1. Следовательно, $\|\varphi_N\| > 1$. Так как точка e_4 является, очевидно, конической в B^3, то функционал f из N^* такой, что $f^{-1}(0) = [e_2]$, $f(e_4) = \|f\| = 1$, имеет, как легко видеть, не единственное расширение на B^3 с сохранением нормы. Поэтому не выполняется условие 1°, и, следовательно, в силу замечания 2.1 не выполняется ни одно из условий 2°—4° следствия 2.1.

3. Теорема 3.1. *Пусть N — правильное чебышевское подпространство банахова пространства B, а φ_N — нелинейная метрическая проекция. Если для любого подпространства K, $N \subset K \subseteq B$, $\operatorname{codim} N|_K = 1$, пара (K, N) обладает свойством* (γ), *то* $\|\varphi_N\| > 1$.

Доказательство. Предположим, что $\|\varphi_N\| = 1$. В силу условия теоремы 3.1 существует линейная проекция P_N из B на N, причем $\|P_N\| = 1$. Положим $M = P_N^{-1}(\theta)$. Пусть e_1 — произвольный вектор из $M \cap \overset{\circ}{S}$. Рассмотрим подпространство L, натянутое на N и e_1. Пусть $\overset{\circ}{\varphi}_N = \varphi_N|_L$. Очевидно, что $\overset{\circ}{\varphi}_N$ есть метрическая проекция в L „на“ N, и притом линейная. В силу нашего предположения, учитывая, что $1 \leqslant \|\overset{\circ}{\varphi}_N\| \leqslant \|\varphi_N\|$, получим $\|\overset{\circ}{\varphi}_N\| = 1$. Пусть элемент $e_2 \in \ker \overset{\circ}{\varphi}_N \cap S$; тогда $\|P_N^{e_2}\| = \|\overset{\circ}{\varphi}_N\| = 1$. С другой стороны, так как $P_N^{e_1} = P_N^M|_L$, то $\|P_N^{e_1}\| = 1$. Учитывая, что пара (L, N) обладает свойством (γ), а следовательно, $P_N^{e_1} = P_N^{e_2}$, получаем $[e_1] = [e_2]$. Отсюда $e_1 \in \ker \overset{\circ}{\varphi}_N$ и, значит, $e_1 \in \ker \varphi_N$. Но элемент e_1 взят из $M \cap S$ произвольно. Поэтому $M \subseteq \ker \varphi_N$. Так как $B = N \oplus M$, то φ_N — линейная метрическая проекция вопреки условию теоремы. Из полученного противоречия следует, что $\|\varphi_N\| > 1$.

Определение 3.1. Пусть N — подпространство банахова пространства B. Будем говорить, что пара (B, N) *достаточно гладкая*, если для подпространства N и пространства B справедливо хоть одно из двух условий: 1° или 5°, указанных в следствии 2.1.

Заметим, что если пара (B, N) достаточно гладкая, то пара (K, N), где $N \subset K \subset B$, тоже достаточно гладкая. При этом, если N — правильное подпространство в B, то любая пара (D, N), где $N \subset D \subseteq B$, обладает свойством (γ) (см. [9])[1].

Из теоремы 3.1, определения 3.1, а также теорем 2.1 и 3.4 из [9] непосредственно получаем

Следствие 3.1. *Пусть N — правильное чебышевское подпространство пространства B, а φ_N — нелинейная метрическая проекция. Если пара (B, N) достаточно гладкая, то $\|\varphi_N\| > 1$.*

Пример 3.1. Пусть D — подпространство пространства l_1, такое, что $D = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_1 : \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 = 0\}$. Как доказал Моррис ([5], с. 807), подпространство D чебышевское, а метрическая проекция φ_D нелинейная (но непрерывная). Покажем, что D — правильное подпространство, а пара (l_1, D) достаточно гладкая. Тогда в силу следствия 3.1 получим, что $\|\varphi_D\| > 1$. Доказательство разобъем на три этапа: а), б) и в).

а) Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — естественный нормированный базис в l_1, т. е. $e_i = (\underbrace{0; 0; \ldots}_{i-1}; 1; 0; \ldots)$. Пусть $D^{(k)} = [e_1, \ldots, e_k]$, а $D_{(k)} = [e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots]$ $(k \geqslant 1)$.

Возьмем в $D^{(k)} \cap S$ произвольный элемент x. Положим $\mathfrak{C}^x = [x] \oplus D_{(k)}$. Тогда точка x является конической в $\mathfrak{C}^x$. Действительно, ведь в любом двумерном подпространстве $[x, y]$, где $x \in D^{(k)} \cap S$, $y \in D_{(k)} \cap S$, прямые, проходящие через точки x, y и x, $(-y)$, являются, очевидно, различными опорными гиперплоскостями к единичному шару $U^{(1)} \cap [x, y]$, проходящими через точку x. Следовательно, точка x есть коническая в $[x, y]$. Так как любой элемент из $\mathfrak{C}^x$ принадлежит некоторому подпространству $[x, y]$ $(y \in D_{(k)} \cap S)$, то точка x есть коническая в $\mathfrak{C}^x$.

б) Докажем теперь, что подпространство $\mathfrak{C}^x$ правильное в l_1. Заметим, что, в силу леммы 2.1 и теоремы 2.2 из [10], любое одномерное подпространство любого банахова пространства правильное. Поэтому существует проекция $P_x : D^{(k)} \to [x]$, $\|P_x\| = 1$. Возьмем произвольный элемент $z \in l_1$. Положим

$$P(z) = P_x\left(P^{D_{(k)}}_{D^{(k)}}(z)\right) + P^{D^{(k)}}_{D_{(k)}}(z). \qquad (*)$$

Очевидно, что оператор P, определенный формулой $(*)$, есть проекция „на“ $\mathfrak{C}^x$, являющаяся расширением проекции P_x на l_1. Так как $\|P(z)\| \leqslant \|P_x\| \|P^{D_{(k)}}_{D^{(k)}}(z)\| + \|P^{D^{(k)}}_{D_{(k)}}(z)\| = \|z\|$, то, очевидно, что $\|P\| = 1$.

в) Пусть $x_0 = (1/3; -1/3; -1/3; 0; 0; \ldots)$. Тогда легко видеть, что $D = \mathfrak{C}^{x_0}$ и, следовательно, в силу п. б) D — правильное подпространство в l_1. Очевидно также, что $\mathfrak{G}_{x_0} \supseteq D^{(3)}$, ибо точка x_0 есть

[1] Обратное, вообще говоря, неверно (см. [9], пример 3.6).

точка гладкости в $D^{(3)}$. Следовательно, $\overline{\mathfrak{G}_{x_0}+D}=l_1$. Учитывая п. а), получаем, что пара (l_1, D) достаточно гладкая.

Замечание 3.1. Если отказаться от требования достаточной гладкости пары (B, N), то утверждение следствия 3.1 будет неверно (см. ниже пример 4.2).

Следствие 3.2. *Пусть M — чебышевское подпространство банахова пространства B, а метрическая проекция φ_M линейна и пусть далее $N=\ker\varphi_M$ — тоже чебышевское подпространство, но оператор φ_N нелинейный. Если пара (B, N) достаточно гладкая, то $\|\varphi_N\|>1$.*

Доказательство. Достаточно вспомнить, что в силу линейности оператора φ_M подпространство N правильное.

Из (А), следствий 2.1 и 3.2 непосредственно получаем

Следствие 3.3. *Пусть M — подпространство* рефлексивного *гладкого строго нормированного банахова пространства B, и φ_M — линейная проекция. Для того, чтобы $\|\varphi_{\ker\varphi_M}\|>1$, необходимо и достаточно, чтобы $\|\varphi_M\|>1$.*

4. Пусть B — рефлексивное строго нормированное пространство, M — подпространство в B, а φ_M — линейная проекция. Если $N=\ker\varphi_M$, то из (А) непосредственно следует, что условие $\|\varphi_M\|>1$ является необходимым для нелинейности φ_N, но, как показывает уже пример 1.1, далеко не достаточным. В случае, когда $\dim B\geqslant 3$, а $\operatorname{codim} N=m$ $(m\geqslant 2)$, практически удобный признак нелинейности φ_N содержится в следующем утверждении (С): *Пусть в M существуют m линейно-независимых векторов $\{e_i\}_{i=1}^m$ таких, что $e_i\perp N$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ и, кроме того, пусть $\|\varphi_M\|>1$. Тогда φ_N — нелинейный оператор.*

Действительно, если бы φ_N была линейной проекцией, то, очевидно, $\ker\varphi_N=M$ и, значит, $M\perp N$. А тогда в силу леммы 2.1 получили бы, что $\|\varphi_M\|=1$.

Если N — одномерное подпространство в B^n $(n\geqslant 3)$, $x_0\in N\cap S$, а M — гиперподпространство, сдвиг $\{M+x_0\}$ которого является опорной гиперплоскостью к шару $U^{(1)}$ в точке x_0, то, используя результат М. Г. Крейна, М. А. Красносельского и Д. П. Мильмана [15], легко показать, что в M всегда существует по крайней мере $n-2$ линейно-независимых векторов, ортогональных N. Нетрудно построить примеры, когда $\|\varphi_M\|>1$, в M существует ровно $n-2$ линейно-независимых векторов, ортогональных N, а метрическая проекция φ_N может быть как линейной, так и нелинейной, даже если B^n — гладкое строго нормированное пространство [1)].

В заключение рассмотрим два примера нелинейных метрических проекций.

1) Заметим, что если φ_N — линейная проекция для любого одномерного N из B, то B изометрически изоморфно гильбертову пространству, и, следовательно, $\|\varphi_M\|=1$ (см., напр., [17], [18].)

Пример 4.1. Пусть $B^3 = l_p^3$ $(1 < p \neq 2)$ — пространство последовательностей из трех чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ с нормой $\|x\| = \left\{\sum_{i=1}^{3} |\alpha_i|^p\right\}^{1/p}$.

Пусть $e_1 = (2^{-1/p}; 2^{-1/p}; 0)$, $e_2 = (0; 2^{-1/p}; 2^{-1/p})$, $e_3 = ((1/3)^p; -(1/3)^p; (1/3)^p)$.

Нетрудно проверить, что $\|e_i\| = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, $e_3 \perp e_j$[1], $e_j \perp e_3$ $(j = 1, 2)$. Пусть $M = [e_1, e_2]$. Как доказано еще Мерреем [16], любая линейная проекция на подпространство M имеет норму, строго больше 1. Так как $\operatorname{codim} M = 1$, то φ_M — линейная проекция и, следовательно, $\|\varphi_M\| > 1$. Очевидно, что $\ker \varphi_M = [e_3]$. В силу (С) $\varphi_{\ker \varphi_M}$ есть нелинейная метрическая проекция. Из следствия 3.6, учитывая замечание 2.1, получаем $\|\varphi_{\ker \varphi_M}\| > 1$.

Пример 4.2. Пусть E^3 — евклидово пространство с координатами $(x; y; z)$, а точка $O = (0; 0; 0)$ — начало координат. Как и в примере 2.1, пусть F_1 — поверхность вращения центрально-симметричной кривой ν_1, причем часть кривой ν_1 задается при $y \geqslant 0$ уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + (y+4)^2 = 5^2 \text{ при } -3 \leqslant x \leqslant 3; \\ z = 0, \end{cases}$$

но только не вокруг оси Oy, как в примере 2.1, а вокруг оси Ox. Пусть $\mathfrak{B}_3$ — ограниченное множество, граница $\partial\mathfrak{B}_3$ которого есть F_1. Положим $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_3 \cap U_3 \cap U_4$, где U_3 и U_4 — замкнутые шары радиуса 1000 с центрами соответственно в точках $C_3 = (1/100; 0; (\sqrt{249999}/100) - 4 - 1000)$ и $C_4 = (-1/100; 0; 1000 + 4 - (\sqrt{249999}/100))$. Очевидно, что $F = \partial\mathfrak{B}_0$ есть строго выпуклая замкнутая, ограниченная центрально-симметричная поверхность, которая и берется в качестве единичной сферы S в B^3. Рассмотрим точки A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, где $A_1 = (3; 0; 0)$, $A_2 = (0; -1; 0)$, $A_3 = (0; -\sqrt{24}/5; 1/5)$, $A_4 = (1/100; 0; (\sqrt{249999}/100) - 4)$. Отождествим векторы $\overrightarrow{OA_i}$ из E^3 с элементами из B^3, которые обозначим соответственно через e_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Отметим, что $e_i \in S$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Отождествим, кроме того, плоскость (zOy) с подпространством в B^3, которое обозначим через M. Пусть $N = [e_1]$. Легко видеть, что $e_j \perp N$ $(j = 2, 3, 4)$. При этом $e_i \in M$ $(i = 2, 3)$, а $e_4 \notin M$. Значит, $\ker \varphi_N$ не является подпространством, а потому φ_N — нелинейная метрическая проекция. Заметим, что точка e_1 коническая в B^3. Так как N одномерно, то отсюда следует, что пара (B, N) не будет достаточно гладкой. Пусть D — произвольное двумерное подпространство, содержащее N. Так как $\operatorname{codim} N|_D = 1$, то $\overset{\circ}{\varphi}_N = \varphi_N|_D$ — линейная метрическая проекция в D, ассоциированная с N. Пусть $K = \ker \overset{\circ}{\varphi}_N$. В силу достаточно большого радиуса шаров U_i $(i = 1, 2)$ и близости их центров к оси Oz, очевидно, что $\{K + e_1\}$ есть опорная гиперплоскость к единичному шару $U^{(1)} \cap D$ в точке e_1. Значит,

---

[1] Если $x, y \in B$, то $x \perp y$ означает, что $x \perp [y]$.

$$1 \geqslant \|\mathring{\varphi}_N (v)\| = \|\varphi_N (v)\|$$

для любого $v \in D \cap S$. Так как D взято произвольно, то $\|\varphi_N\| = 1$.

Автор благодарит В. Н. Су акова и Д. Ф. Харазова за полезные обсуждения этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Holmes R. On the continuity of best approximation operators. Ann. Math Stud., v. 69, 1972, p. 137—157.
2. Holmes R., Kripke B. Smoothness of approximation. Mich. Math. J., v. 15, № 2, 1968, p. 225—248.
3. Cheney E. W., Wulbert D. E. The existence and unicity of best approximations. Math. scand. Bd. 24, № 1, 1969, s. 113—140.
4. Ando T. Contractive projections in L_p spaces. Pacif. J. Math., v. 17, № 3. 1966, p. 391—405.
5. Morris P. D. Metric projections onto subspaces of finite codimension. Duke Math. J., v. 35, № 4, 1968, p. 799—808.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, т. I. М., ИИЛ, 1962.
7. Phelps R. R. Uniqueness of Hahn-Banach extensions ond unique best approximation. Trans. Amer. Math. Soc., v. 95, № 2, 1960, p. 238—255.
8. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М., ИИЛ, 1961.
9. Одинец В. П. О единственности проекций с нормой, равной 1, в банаховом пространстве. Изв. вузов. Матем., 1974, № 1, с. 82—89.
10. James R. C. Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc., v. 61, № 2, 1947. p. 265—292.
11. Poulsen E. T. Eindeutige Hahn-Banach-Erweiterungen. Math. Ann. Bd. 162, № 2, 1966, S. 225—227.
12. Гаркави А. Л. О единственности решения L-проблемы моментов ИАН СССР. Сер. матем., т. 28, № 3, 1964, с. 553—570.
13. Cudia D. F. The geometry of Banach spaces. Smoothness. Trans. Amer. Math. Soc., v. 110, № 2, 1964, p. 283—314.
14. Троянски С. Л. Пример гладкого пространства, сопряженное к которому не является строго нормированным. Studia math., t. 35, № 3, 1970, s. 305—309.
15. Крейн М. Г., Красносельский М. А., Мильман Д. П. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах. Сб. трудов ин-та матем., АН УССР, № 11, 1948, с. 97—112.
16. Murray F. J. On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p. Trans. Amer. Math. Soc., v. 41, № 1, 1937, p. 138—152.
17. Hirschfèld R. A. On best approximations in normed vector spaces, II. Nieuw arch. wiskunde, v. 6, № 3, 1958, p. 99—107.
18. Rudin W. T., Smith K. T. Linearity of best approximation: a characterization of ellipsoids. Proc. Koninkl. Nederl. akad. wet. A, v. 64, № 1, 1961, p. 97—103.

г. Ленинград

Поступила
21 XI 1972