Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. П. Ильин, К вопросу о неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных, *Докл. АН СССР*, 1963, том 150, номер 5, 975–977

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
22 января 2025 г., 06:49:44

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 150, № 5

МАТЕМАТИКА

В. П. ИЛЬИН

К ВОПРОСУ О НЕРАВЕНСТВАХ МЕЖДУ НОРМАМИ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 12 I 1963)

1. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция, заданная в некоторой области D n-мерного эвклидова пространства E^n точек $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, имеющая непрерывные производные любого порядка.

Пусть заданы $n+1$ целых неотрицательных векторов $\mathrm{r}_i = (l_1^i, \ldots, l_n^i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ l_j^i \geqslant 0$ — целые), относительно которых мы требуем, чтобы

$$\begin{vmatrix} 1 & l_1^0 \ldots l_n^0 \\ 1 & l_1^1 \ldots l_n^1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 & l_1^n \ldots l_n^n \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Положим

$$D^{\mathrm{r}} f = \frac{\partial^{l_1}}{\partial x_1^{l_1}} \cdots \frac{\partial^{l_n} f}{\partial x_n^{l_n}},$$

где $\mathrm{r} = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_j \geqslant 0$ — целые.

Предположим, что

$$\|D^{\mathrm{r}_i} f\|_{L_p(D)} \leqslant \infty \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где $p \geqslant 1$.

Ставится задача нахождения множества целых неотрицательных векторов $\vec{\rho} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ и соответствующих им значений параметра $q \geqslant p$, для которых будет иметь место неравенство

$$\|D^{\vec{\rho}} f\|_{L_q(D)} \leqslant C \sum_{i=0}^{n} \|D^{\mathrm{r}_i} f\|_{L_p(D)}, \tag{3}$$

где C — константа, не зависящая от f.

Неравенства типа неравенства (3) для того случая, когда векторы r_i являются векторами вида $\mathrm{r}_0 = (0, \ldots, 0)$, $\mathrm{r}_i = (0, \ldots, l_i^i, \ldots, 0)$ $(i = 1, \ldots, n)$, а область D совпадает со всем пространством E^n или является прямоугольным параллелепипедом с ребрами, параллельными осям координат, впервые изучались С. М. Никольским ([1]) *; при $l_i^i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ результаты типа неравенства (3) вытекают из еще более ранних работ С. Л. Соболева ([2]).

Условимся обозначать через Δ_R прямоугольный параллелепипед в пространстве E^n точек $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, характеризуемый неравенствами $0 < x_i < R$ $(i = 1, \ldots, n)$.

В настоящей заметке формулируются необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на векторы r_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и $\vec{\rho}$ для того, чтобы неравенство (3) имело место для $D = \Delta_R$ с каким-либо показателем $q > p$, а также приводится ряд результатов отрицательного характера.

2. Будем говорить, что неравенство (3) для данных r_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $\vec{\rho}$, p, q и D не имеет места, если, какую бы ни взять константу C, найдется функция f, имеющая в D непрерывные производные любого порядка и удов-

* С. М. Никольский допускал не только целые, но и дробные значения l_i^i $(i=1,\ldots n)$.

летворяющая условиям (2), для которой неравенство (3) с этой константой не имеет места.

Будем писать $\mathrm{r}_1 = (l_1^1, \ldots, l_n^1) \geqslant \mathrm{r}_2 = (l_1^2, \ldots, l_n^2)$, если $l_j^1 \geqslant l_j^2$ $(j = 1, \ldots, n)$.

В дальнейшем нам иногда удобнее будет интерпретировать векторы $\mathrm{r}_i = (l_1^i, \ldots, l_n^i)$ и $\vec{\rho} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, как точки $M_i\ (l_1^i, \ldots, l_n^i)$ и соответственно $N\ (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ эвклидова пространства E^n. Множество точек $M\ (l_1, \ldots, l_n)$ пространства E^n, координаты которых удовлетворяют условиям: $0 \leqslant l_i \leqslant \nu_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, будем обозначать через $\delta\ (N)$.

Лемма 1. *Пусть заданы целые неотрицательные векторы* $\mathrm{r}_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *и* $\vec{\rho} \geqslant 0$. *Если существует вектор* $\vec{\varkappa} = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$ (*не обязательно целый положительный*) *такой, что*

$$(\mathrm{r}_i, \vec{\varkappa}) = \sum_{j=1}^{n} l_j^i \varkappa_j = C_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad (\vec{\rho}, \vec{\varkappa}) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \varkappa_j = C$$

и $C_i > C$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *или* $C_i < C$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, *то для* $D = \Delta_R$ *неравенство* (3) *не имеет места ни при каком* $q \geqslant p$.

Следствие. *Если точка* N *находится вне* n*-мерного симплекса с вершинами в* M_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, *то для* $D = \Delta_R$ *неравенство* (3) *не имеет места ни при каком* $q \geqslant p$.

Лемма 2. *Пусть выполнено одно из следующих условий*:

1) *точки* $M_i\ (l_1^i, \ldots, l_n^i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *содержатся в* $\delta\ (N)$;

2) *точки* M_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *находятся вне* $\delta\ (N)$.

Тогда для $D = \Delta_R$ *неравенство* (3) *не имеет места ни при каком* $q \geqslant p$.

Пусть теперь k точек $M_0, \ldots, M_{k-1}$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, содержатся в $\delta\ (N)$, а $n + 1 - k$ точек $M_k, \ldots, M_n$ — вне $\delta\ (N)$ (точка M_0, следовательно, всегда будет считаться точкой $\delta\ (N)$). Пусть

$$l_1\varkappa_1 + \ldots + l_n\varkappa_n = C \geqslant 0 \tag{4}$$

уравнение гиперплоскости, проходящей через точки $M_1, \ldots, M_n$ (таким образом, она проходит через все точки, внешние по отношению к $\delta\ (N)$). Положим

$$\nu_1\varkappa_1 + \ldots + \nu_n\varkappa_n = C_1, \tag{5}$$

$$l_1^0\varkappa_1 + \ldots + l_n^0\varkappa_n = C_2. \tag{6}$$

Лемма 3. *Пусть* $N\ (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — *точка симплекса с вершинами в* M_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, *не принадлежащая грани* (4) $(C_1 \neq C)$.

Если среди коэффициентов $\varkappa_i$ *уравнения* (4) *имеются неположительные, например, если* $\varkappa_i > 0$ $(i = 1, \ldots, k)$, $\varkappa_i = 0$ $(i = k + 1, \ldots, m)$, $\varkappa_i < 0$ $(i = m + 1, \ldots, n)$, *то для* $D = \Delta_R$ *неравенство* (3) *возможно лишь при* $q = p$ *и только в одном из следующих случаев*:

1) $C_2 < C_1 < C$, *причем точка* M_0 *находится в гиперплоскости* $l_{k+1} = \nu_{k+1}, \ldots, l_n = \nu_n$;

2) $C_2 > C_1 > C$, *причем точка* M_0 *находится в гиперплоскости* $l_1 = \nu_1, \ldots, l_m = \nu_m$.

Лемма 4. *Если точка* $N\ (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ *находится на грани симплекса* (*с вершинами в* M_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$), *содержащей точки* $M_1, \ldots, M_n$ $(C_1 = C)$, *то, каковы бы ни были коэффициенты* $\varkappa_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *уравнения* (4), *неравенство* (3) *для* $D = \Delta_R$ *не имеет места при* $q > p$.

Заметим, что утверждение, аналогичное данному, вообще говоря, не имеет места относительно точек других граней рассматриваемого симплекса.

Лемма 5. *Пусть у каждой точки* M_i $(i = k, \ldots, n)$, *внешней по отношению к* $\delta\ (N)$, *хоть одна из координат* $l_1, \ldots, l_s$, *где* $s < n$, *больше соответствующей координаты точки* $N\ (\nu_1, \ldots, \nu_n)$.

Тогда неравенство (3) *для* $D = \Delta_R$ *может иметь место только при* $q = p$ *и лишь в том случае, когда хоть одна из точек* $M_0, \ldots, M_{k-1}$, *содержащихся в* $\delta\ (N)$, *находится в гиперплоскости* $l_{s+1} = \nu_{s+1}, \ldots, l_n = \nu_n$.

С л е д с т в и е. *Из леммы* 5 *вытекает, что неравенство* (3) *при* $q > p$ *может иметь место лишь тогда, когда в* δ (N) *находится одна точка* M_0, *а вне* δ (N) — n *точек* $M_1, \ldots, M_n$, *причем у каждой точки* M_i ($i = 1, \ldots, n$) *лишь одна координата больше соответствующей координаты точки* N *и у всех точек эти координаты разные.*

Т е о р е м а. *Для того чтобы для* $D = \Delta_R$ *имело место неравенство* (3) *при каком-либо* $q > p$, *необходимо и достаточно, чтобы*:

1) *координаты векторов* $\mathbf{r}_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) и $\vec{\rho}$ *удовлетворяли неравенствам*:

$$l_j^0 \leqslant \nu_j \ (j = 1, \ldots, n),$$

$$l_j^i \leqslant \nu_j \ (j = 1, \ldots, n, \ j \neq i), \quad l_i^i > \nu_i \ \text{при} \ i = 1, \ldots, n;$$

2) *существовали числа* $\varkappa_j > 0$ ($j = 1, \ldots, n$) *такие, что*

$$l_1^i \varkappa_1 + \ldots + l_n^i \varkappa_n = A \quad (i = 1, \ldots, n);$$

3) $\nu_1 \varkappa_1 + \ldots + \nu_n \varkappa_n = A_1 < A$.

Если указанные условия выполнены, то существует интервал значений параметра q, *для которых имеет место* (3), *определяемый из соотношений*

$$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty, \quad A - A_1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j = \varepsilon \geqslant 0,$$

причем, если $\varepsilon = 0$, *то предполагается* $1 < p < q < \infty$.

Необходимость условий 1) — 3) вытекает из лемм 5, 3, 4, а достаточность доказывается методом интегральных представлений.

Отметим, что если векторы $\mathbf{r}_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) удовлетворяют условиям С. М. Никольского, то условие 2) выполнено автоматически и для каждой точки N ($\nu_1, \ldots, \nu_n$) симплекса с вершинами в M_i справедливы неравенства 1).

3. Ниже для случая $n = 2$ приведены примеры различных симплексов с вершинами в M_i ($i = 0, 1, 2$), обладающих разными, в смысле рассматриваемого в статье вопроса, свойствами.

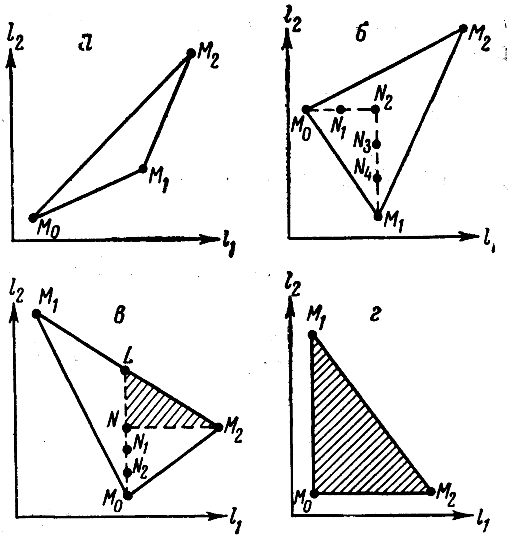

Рис. 1

На рис. 1*а* приведен случай, когда неравенство (3) для $D = \Delta_R$ не имеет места ни для какого вектора $\vec{\rho}$, отличного от $\mathbf{r}_i$ ($i = 0, 1, 2$). На рис. 1 *б*, *в*, *г* точкам N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) отвечают векторы $\vec{\rho}_i$, для которых неравенство (3) имеет место при $q = p$, а точкам треугольников LNM_2 (рис. 1*в*) и $M_0M_1M_2$ (рис. 3*г*), за исключением точек отрезков LM_2 и M_1M_2, отвечают неравенства с $q > p$. Эти результаты устанавливаются методом интегральных представлений. На основании приведенных выше лемм легко установить, что ни для каких других векторов $\vec{\rho}$ неравенство (3) для $D = \Delta_R$ не имеет места.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
3 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Н и к о л ь с к и й, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 38, 244 (1951). [2] С. Л. С о б о л е в, Матем. сборн., 4 (46), 3, 471 (1938).