L. V. Katzarkov, D. O. Orlov, Prym varieties of hyperelliptic curves and their applications to nonlinear equations, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1989, Number 2, 43–47

(ii) *в H существует подгруппа H_0 индекса $2n-1$, содержащая стабилизатор некоторого элемента из* $\binom{X}{2}$.

Лемма 5. *Пусть P — некоторый параллелизм и H — подгруппа в* $\mathrm{Aut}_P\binom{X}{2}$. *Тогда H оставляет неподвижным либо одну, либо четное число точек.*

Лемма 6. *Существуют единственные с точностью до изоморфизма параллелизмы P (12) и P (28) на множествах соответственно из 12 и 28 точек, допускающие 2-транзитивную на точках группу автоморфизмов.*

Пользуясь тем, что по модулю классификации конечных простых групп все 2-транзитивные группы известны, с помощью лемм 4—6 и предложения 1 получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть H — группа автоморфизмов параллелизма P множества* $\binom{X}{2}$, *где $|X|\geqslant 8$, и H действует 2-транзитивно на X. Тогда либо P является аффинно-линейным параллелизмом, либо P изоморфен P (12) или P (28).*

Теоремы 2 и 3 дают полную классификацию E-разложений алгебр Ли типа D_n, $n\geqslant 4$, допускающих конечное число классов подобных инвариантных подрешеток.

Автор благодарен А. И. Кострикину, под руководством которого выполнена эта работа, а также В. П. Буриченко, указавшему автору на наличие параллелизма P (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кострикин А. И., Кострикин И. А., Уфнаровский В. А. Ортогональные разложения простых алгебр Ли (тип A_n)//Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1981. **158**. 105—120.
2. Кострикин А. И., Кострикин И. А., Уфнаровский В. А. Инвариантные решетки типа G_2 и их группы автоморфизмов//Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1984. **165**. 79—97.
3. Кострикин А. И., Кострикин И. А., Уфнаровский В. А. О разложениях классических алгебр Ли//Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1984. **166**. 107—120.
4. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., 1969.
5. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М., 1972.
6. Cameron P. J. Parallelisms of complete designs//London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 1976. N 23. 105—114.

Поступила в редакцию
27.01.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1989. № 2

УДК 513.6

Л. В. Кацарков, Д. О. Орлов

ПРИМИАНЫ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ

1. Пусть C — приведенная полная кривая с не более чем обыкновенными двойными точками (необязательно неприводимая) над $\mathbf{C}$ и $\pi:\tilde{C}\to C$ — двулистное накрытие, нетривиальное на каждой неприводимой компоненте и удовлетворяющее следующему условию Бовиля:

(B) $\pi(\mathrm{Sing}\,\tilde{C})=\mathrm{Sing}\,C;\ \mathrm{Fix}\,i_{\tilde{C}}:=\{x\in\tilde{C}\,|\,i_{\tilde{C}}(x)=x\}=\mathrm{Sing}\,\tilde{C},$

где $i_{\widetilde{C}}$ — инволюция накрытия π, а $\mathrm{Fix}\, i_{\widetilde{C}}$ — множество неподвижных точек этой инволюции. Из первого равенства следует, что инволюция $i_{\widetilde{C}}$ сохраняет ветви в окрестности каждой особой точки. В такой ситуации говорят, что задана пара Бовиля $(\widetilde{C}, C)$ и определено главнополяризованное многообразие Прима (примиан) $P(\widetilde{C}, i_{\widetilde{C}})$ (см. [1, 2]).

В этой заметке мы изучаем случай, когда C — гиперэллиптическая кривая, т. е. существует конечный морфизм степени два $\alpha: C \to \mathbf{P}^1$. Согласно [2] возможны два варианта: (а) кривая C неприводимая с k особыми точками; (б) C состоит из двух компонент A_1, A_2, каждая из которых есть гладкая рациональная кривая, и они пересекаются по $2g+2$ точкам.

В случае (б) примиан изучен в работе [3], где доказан следующий результат.

Теорема 1 (Пантазис). $P(\widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2, i_{\widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2}) \cong P(\widetilde{B}_1 \cup \widetilde{B}_2, i_{\widetilde{B}_1 \cup \widetilde{B}_2})$ *как главнополяризованные абелевы многообразия.*

Здесь $\widetilde{A}_i$, $i=1, 2$, двулистно накрывают рациональные кривые A_i, $i=1, 2$, и $\beta: A_1 \cup A_2 \to \mathbf{P}^1$ имеет точки ветвления $\beta(Q_1), \ldots, \beta(Q_{2g+2})$; $\{Q_1, \ldots, Q_{2g+2}\} = A_1 \cap A_2$; $\widetilde{B}_i$, $i=1, 2$, двулистно накрывают гиперэллиптические кривые B_i, $i=1, 2$, $R(B_i) = \mathbf{C}(t)\left(\sqrt{(t-\beta(Q_1)) \ldots (t-\beta(Q_{2g+2}))}\right)$, где $R(B_i)$ — поле функции кривой B_i, $B_1 \cap B_2 = \{S_1, S_2\}$ и если $\beta: B_i \to \mathbf{P}^1$, $i=1, 2$, то $\beta_1(S_1) = \beta_1(S_2) = \beta_2(S_1) = \beta_2(S_2)$. В этой работе доказываются следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть C — гиперэллиптическая кривая, неприводимая, имеющая k особых точек, $\pi: \widetilde{C} \to C$ — двулистное накрытие C, такое, что $(\widetilde{C}, C)$ — пара Бовиля. Тогда $P(\widetilde{C}, i_{\widetilde{C}}) \cong JC_1 \oplus JC_2$ как главнополяризованные абелевы многообразия.*

Здесь JC_1, JC_2 — якобианы гиперэллиптических кривых C_1, C_2. Пусть $n: N \to C$ — нормализация кривой C и $R(N) = \mathbf{C}(t)\left(\sqrt{f(t)}\right)$, где $f(t) = (t-y_1) \ldots (t-y_{2g+2})$; $\tilde{n}: \widetilde{N} \to \widetilde{C}$ — нормализация кривой $\widetilde{C}$ и π': $\widetilde{N} \to N$ — двулистное накрытие N, которое соответствует присоединению $g(t) = (t-y_1) \ldots (t-y_l)(t-z_1) \ldots (t-z_k)$, где $l \leqslant 2g+2$, $l+k=2m$; $\alpha': N \to \mathbf{P}^1$, $\{z_1, \ldots, z_k\} = \alpha' \circ n^{-1} \circ \pi(\mathrm{Fix}\, i_{\widetilde{C}})$. Тогда

$$R(C_1) = \mathbf{C}(t)\left(\sqrt{f(t)\, g(t)}\right), \quad R(C_2) = \mathbf{C}(t)\left(\sqrt{g(t)}\right).$$

Теорема 3. *Пусть C — неприводимая кривая и род C не больше 3, $(\widetilde{C}, C)$ — пара Бовиля. Если $P(\widetilde{C}, i_{\widetilde{C}}) \cong E_1 \oplus E_2$ как главнополяризованные абелевы многообразия, где E_1, E_2 — эллиптические кривые, то пара $(\widetilde{C}, C)$ имеет один из следующих видов:*

(1) *$C = N$ — неособая гиперэллиптическая кривая рода 3, $\pi': \widetilde{N} \to N$ — неразветвленное накрытие, отвечающее $g(t) = (t-\alpha'(p_1)) \ldots (t-\alpha'(p_4))$, где p_1, p_2, p_3, p_4 — точки Вейерштрасса на N;*

(2) *N — неособая гиперэллиптическая кривая рода 2, $\pi': \widetilde{N} \to N$ — накрытие, разветвленное в точках q_1, q_2; $z = \alpha'(q_1) = \alpha'(q_2)$; $q_1 + q_2 \equiv g_2^1 \in N$ отвечает $g(t) = (t-\alpha'(p_1)) \ldots (t-\alpha'(p_3))(t-z)$;*

(3) *N — неособая эллиптическая кривая, $\pi': \widetilde{N} \to N$ — накрытие с точками ветвления q_1, q_2, r_1, r_2; $z_1 = \alpha'(q_1) = \alpha'(q_2)$, $z_2 = \alpha'(r_1) = \alpha'(r_2)$; $q_1 + q_2 \equiv r_1 + r_2 \equiv g_2^1$ на N, отвечающее $g(t) = (t-\alpha'(p_1))(t-\alpha'(p_2)) \times (t-z_1)(t-z_2)$.*

Таким образом, теоремы 1—3 позволяют получить полную классификацию примианов всех гиперэллиптических кривых.

2. Рассмотрим нормализацию $\tilde{n}: \widetilde{N} \to \widetilde{C}$. Пусть V^- — подпространство $H^0(\widetilde{N}, \omega_{\widetilde{N}})$, в которое входят все дифференциалы, антиинвариантные относительно инволюции $i_{\widetilde{N}}$ на $\widetilde{N}$, индуцированной $i_{\widetilde{C}}$. Из

[4] следует, что всегда можно выбрать базис H_1 $(\tilde{N}, \mathbf{Z})$ со свойствами:

$(a_i, a_j)=(b_i, b_j)=0$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2g$; $(a_i, b_j)=\delta_{ij}$; $(\rho_s, \rho_r)=(\sigma_s, \sigma_r)=$ $=0$; $(\rho_r, \sigma_s)=\delta_{rs}$, $1\leqslant s\leqslant r\leqslant k-1$, $(\ ,\ )$ — индекс перечисления в $H_1(\tilde{N}, \mathbf{Z})$.

Если точки $Q_1, \ldots, Q_k$ — особые точки на $\tilde{C}$, такие, что $\tilde{n}^{-1}\{Q_l\}=$ $=\{P_l^0, P_l^1\}$, $1\leqslant l\leqslant k$, то циклы ρ_l соответствуют разрезам $P_l^0P_l^1$ на $\tilde{N}$ (см. [4]). Рассмотрим решетку $\Lambda=\{a_1-a_{g+1}, \ldots, a_g-a_{2g}, b_1-b_{g+1}, \ldots$ $\ldots, b_g-b_{2g}, \rho_1, \ldots, \rho_{k-1}, 2\sigma_1, \ldots, 2\sigma_{k-1}\}$ и возьмем фактормногообразие $P_M=V^-/\Lambda$, которое называется примианом Мазиевицкого. Для доказательства теоремы 2 воспользуемся двумя результатами из [4].

Предложение 1. *P_M является главнополяризованным абелевым многообразием, изоморфным $P(\tilde{C}, C)$.*

Предложение 2. *Пусть X — абелево многообразие и существует отображение $\varphi: N\to X$ со свойствами:* 1) $\varphi(P_l^0)=\varphi(P_l^1)$; 2) $\varphi(i_{\tilde{N}}\, x)=-\varphi(x)$, $x\in\tilde{N}$; 3) $\varphi(\tilde{N})=\dfrac{\Xi^{(p-1)}}{(p-1)!}$, где Ξ — тета-дивизор на X и $\dim X=p$. Тогда $P_M=X$ как главнополяризованные абелевы многообразия.

Из [5] следует, что всегда существует башня типа

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{N} \arrow[dl, "\varphi_2"'] \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
C_2 \arrow[dr] & N \arrow[d, "\alpha'"] & C_1 \arrow[dl] \\
& P^1 &
\end{tikzcd}$$

Доказательство теоремы 2. Достаточно построить отображение φ, обладающее тремя свойствами из предложения 2. Строим φ следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \arrow[r, "t"] & JC_1 \\
\varphi: \tilde{N} \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \\
& C_2 \arrow[r, "t"] & JC_2
\end{tikzcd}
\qquad \varphi=t\circ(\varphi_1(x)\oplus\varphi_2(x))$$

где $x\in\tilde{N}$ и φ_1, φ_2 — соответствующие двулистные накрытия, t — отображение Абеля—Якоби.

Положим $X=JC_1\oplus JC_2$. Свойство 1) выполняется, поскольку пары точек P_l^0, P_l^1, $1\leqslant l\leqslant k$, отображаются в точках Вейерштрасса кривых C_1 и C_2. Свойство 2) выполняется, так как оно эквивалентно условию: $\varphi(i_{\tilde{N}}x+x)=0$. Но $\varphi_1(i_{\tilde{N}}(x)+x)=g_2^1$ на C_1 и $t\circ\varphi_1(i_{\tilde{N}}(x)+x)=0$ на JC_1. Аналогично $t\circ\varphi_2(i_{\tilde{N}}(x)+x)=0$ на JC_2. Свойство 3 доказывается как формула Пуанкаре. Нужно учесть, что $\varphi_i: \tilde{N}\to C_i$, $i=1, 2$, — двулистные накрытия.

Доказательство теоремы 3. Пусть $g=g(C)=3$. Ясно, что $\deg L=4$ для всех $L\in\operatorname{Sing}\Xi\subset P(\tilde{c}, i_{\tilde{C}})$. Но $h^0(L, C)=2$ или 3, и если $L\in\operatorname{Sign}\Xi$, то $L=\pi^*(M)$, $M\in\operatorname{Pic} C$. Учитывая, что для $g\leqslant 3$ все особенности $\Xi\subset P(\tilde{C}, i_{\tilde{C}})$ имеют мамфордский тип (см. [2]), а также тот факт, что если $L \in \operatorname{Sing} \Xi$, то $h^0(L, C)=2$, мы получаем $M \equiv g_2^1$ на C; отсюда следует утверждение теоремы.

3. Приложения к нелинейным уравнениям. Дальше будем пользоваться принятыми в [6] обозначениями. Построим конечно-зонные решения уравнения Ландау—Лифшица:

$$S_t = S \times S_{xx} + S \times JS,\ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1, \quad J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3),$$

$$S = (S_1, S_2, S_3),\ J_1 \leqslant J_2 \leqslant J_3.$$

Решения строятся по кривой C, которая двулистно накрывает эллиптическую кривую E с восемью точками ветвления и записывается в тета-функциях Прима следующим образом (см. [6]):

$$S_1 = \frac{CD - AB}{AD - BC},\quad S_2 = -i\frac{CD + AB}{AD - BC},\quad S_3 = \frac{AD + BC}{AD - BC},\quad i = \sqrt{-1};$$

$$A = \theta(z + d \mid \Pi);\ B = \theta(z + d + r \mid \Pi);$$

$$C = \theta(z + d + \Delta \mid \Pi);\ D = \theta(z + d + r + \Delta \mid \Pi).$$

Если точки ветвления $P_1, \ldots, P_8$ попарно принадлежат слоям накрытия $\pi: C \to E$ и накрытие соответствует точке $O_E(p-q)$, то $P(\tilde{C}, i_{\tilde{C}}) = JC_1 \oplus JC_2$, где C_1, C_2 — гиперэллиптические кривые рода 2. Используя формулу (3.11) из [6], мы получаем следующие уравнения:

$$A = [\theta_3(z_0' + d_0' + z_1' + d_1' \mid 2\Pi') \times \theta_3(z_0' + d_0' \mid 2B_0') +$$

$$+ \theta_2(z_0' + d_0' + z_1' + d_1' \mid 2\Pi') \times \theta_2(z_0' + d_0' \mid 2B_0')] +$$

$$+ [\theta_3(z_0'' + d_0'' + z_1'' + d_1'' \mid 2\Pi'') \times \theta_3(z_0'' + d_0'' \mid 2B_0'') +$$

$$+ \theta_2(z_0'' + d_0'' + z_1'' + d_1'' \mid 2\Pi'') \times \theta_2(z_0'' + d_0'' \mid 2B_0'')],$$

где $(z_0' + d_0', z_1' + d_1') = (z' + d')$; $(z_0'' + d_0'', z_1'' + d_1'') = (z'' + d'')$; $(z' + d', z'' + d'') = (z + d)$ и Π', Π'', B_0', B_0'' — матрицы периодов соответственно $P(C_1, i_{C_1})$, $P(C_2, i_{C_2})$, JE_1, JE_2. Мы сделали эти преобразования, применив формулу (3.11), рассматривая C_1, C_2 как двулистные накрытия над эллиптическими кривыми E_1, E_2, где θ_2, θ_3 — соответствующие тета-функции Якоби (ср. [6]).

Аналогично выводятся формулы и для B, C, D.

Отсюда легко получить

Утверждение. *Для любого рода n можно построить кривую C так, что решения уравнения Ландау—Лифшица, отвечающие ей, записывались бы в тета-функциях Якоби.*

Авторы приносят искреннюю благодарность за постановку задачи и ценные советы В. А. Исковских, В. В. Шокурову, Б. А. Дубровину, А. П. Веселову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beauville A. Prim varieties and Schottky problems//Invent. math. 1977. **41**. 149—196.
2. Шокуров В. В. Многообразия Прима: теория и приложения//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1983. **47**, № 4. 785—855.
3. Pantazis S. Prim varieties and the geodesic flow on $SO(n)$//Math. Ann. 1986. **273**. 297—315.
4. Канев В. И., Кацарков Л. В. Совпадение примианов Прима и Мазиевицкого. Препринт Ин-та математики Болг. АН.

5. Д а л а л я н С. Г. Многообразия Прима двулистного накрытия гиперэллиптической кривой с двумя точками ветвления//Матем. сб. 1975. **98**, вып. 2. 255—267.
6. Б е л о к о л о с Е. Д., Б о б е н к о А. И., М а т в е е в В. Б., Э н о л ь с к и й В. З. Алгеброгеометрические принципы суперпозиции конечно-зонных решений интегрируемых нелинейных уравнений//Успехи матем. наук. 1986. **41**, вып. 2 (248). 3—42.

Поступила в редакцию
09.02.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1989. № 2

УДК 513.6

А. В. Пухликов

МАКСИМАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ ФАНО V_6^3

1. В работе В. А. Исковских [1] описана группа бирациональных автоморфизмов многообразия Фано V_6^3 — гладкого полного пересечения квадрики и кубики в $\mathbf{P}^5$. Этот результат, полученный методом выделения и исключения или откручивания максимальных особенностей, является одним из наиболее ярких достижений современной бирациональной геометрии в размерности три. К сожалению, данное в [1] доказательство содержит пробел (в шаге 3 доказательства теоремы 4.8, с. 216–218). Настоящая заметка посвящена его устранению. Не вдаваясь в детали, остановимся на ключевых моментах рассуждений, продемонстрируем общую логику исключения максимальных кривых, стягивающихся в точку.

2. Дадим набросок доказательства следующего утверждения. (Мы находимся в ситуации, описанной в § 4 [1], и пользуемся всеми введенными в [1] понятиями и обозначениями.)

П р е д л о ж е н и е 1. *Предположим, что*: (i) *всякая прямая на* V — *общего типа, т. е. ее нормальный пучок изоморфен* $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$, (ii) *на* V *нет трех прямых, проходящих через одну точку и лежащих в одной плоскости. Тогда если на самом многообразии* V *нет максимальных кривых и точек, то нет и бесконечно близких максимальных особенностей.*

З а м е ч а н и е. Простой счет констант показывает, что для общего многообразия V_6^3 условия (i) и (ii) выполнены. § 4 работы [1] вместе со сформулированным предложением 1 дает полное доказательство теоремы об образующих и соотношениях группы $\mathrm{Bir}\, V_6^3$.

3. Пусть B_{a-1} — максимальная кривая, стягивающаяся в точку $B_0\in V$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Имеет место один из следующих случаев.*

А. *Не существует прямой на* V, *проходящей через* B_0.

Б. *Через* B_0 *проходит по меньшей мере одна прямая на* V и либо (i) граф Γ_a содержит только одну вершину-плоскость E_1, т. е. $I_2(S)=\{1\}$, либо (ii) $\# I_2(S)\geqslant 2$, граф Γ_a начинается так: $1\leftarrow 2\leftarrow\ldots$, где B_1 — точка, $E_2\cong\mathbf{P}^2$ и для любой прямой $Z\subset V$, $B_0\in Z$ имеем $B_1\notin Z^1$ (верхний индекс i у цикла обозначает, как всегда, его собственный прообраз на V_i).

В. $\# I_2(S)\geqslant 2$, существует в точности одна прямая $Z\subset V$, такая, что $B_0\in Z$, $B_1\in Z^1$ (B_1 — точка) и либо (i) $I_2(S)=\{1, 2\}$, т. е. Γ_a содержит только две вершины-плоскости E_1 и E_2, а дальше идут линейчатые поверхности, либо (ii) $\# I_2(S)\geqslant 3$, Γ_a начинается так: $1\leftarrow 2\leftarrow 3\leftarrow\ldots$ (возможно, $1\leftarrow 3$), B_2 — точка и $B_2\notin Z^2$.