



Общероссийский математический портал

Е. М. Бронштейн, А. А. Давлетбаев, Нестационарная задача управления маршрутом транспортного средства,
Пробл. управл., 2014, выпуск 3, 23–28

<https://www.mathnet.ru/pu847>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

25 мая 2025 г., 08:40:56





НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ МАРШРУТОМ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА¹

Е.М. Бронштейн, А.А. Давлетбаев

Рассмотрена задача построения циклического маршрута, по которому можно доставить однородный груз от некоторого множества производителей потребителям с минимальными затратами, используя транспортное средство ограниченной вместимости. Предполагается, что стоимость транспортировки груза между пунктами зависит от времени. Построена соответствующая линейная целочисленная модель. Проведен вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: маршрутизация, нестационарность, линейное целочисленное программирование, метод ветвей и границ.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая задача. Транспортное средство (ТС) должно доставить однородный груз от некоторых производителей потребителям. Процесс погрузки и разгрузки весьма трудоемкий, поэтому в каждом пункте производства (потребления) ТС загружается (разгружается) один раз. В течение одного дня ТС может посетить несколько пунктов, их число находится в заданных пределах. Перевозку необходимо осуществить за заданное число дней. Состояние дорог изменяется, т. е. стоимость проезда между пунктами зависит от времени. В начальный момент ТС находится на базе, на которую должно вернуться по окончании перевозок. Требуется сформировать график перевозок с минимальной суммарной стоимостью.

Впервые оптимизационная задача транспортной логистики VRP (Vehicle Routing Problem) была сформулирована в работе [1]. За прошедшие полвека сформулировано множество подобных задач, в постановке которых отражаются различные ограничения, диктуемые практикой. Классификация таких задач приведена, например, в статье [2]. На сайте [3] аккумулируется информация об этой области исследований. Применяется множество методов решения, как точных, так и эвристических.

Задача, сформулированная в настоящей работе, является синтезом нескольких оптимизационных задач транспортной логистики:

— CVRP (Capacitated VRP), в этих задачах учитываются ограничения на вместимость ТС (см., например, работу [4]);

— MDVRP (Multiple Depot VRP), в отличие от классической задачи предполагается наличие нескольких баз, откуда товар нужно доставить (см., например, работу [5]);

— multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes, в этих задачах предполагается, что ТС может догружаться по пути [6];

— TDVRP (Time Dependent Vehicle Routing Problem) — нестационарные задачи: предполагается, что характеристики транспортировки зависят от времени. Впервые такие задачи поставлены в работе [7], обычно предполагается, что эти параметры сохраняются в течение некоторого времени. Надо построить маршрут, обеспечивающий доставку грузов за минимальное время [8, 9].

Нестационарность в данной работе понимается аналогично нестационарной задаче коммивояжера [10, 11].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Обозначения:

N — число пунктов, занумерованных числами $0, 1, \dots, N - 1$ (база имеет номер 0);

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00005).

a_i — масса груза в пункте производства (в этом случае $a_i > 0$) или потребность в грузе в пункте потребления, равная $|a_i|$ (в этом случае $a_i < 0$); предполагается, что $a_0 \geq 0$, $a_i \neq 0$ при $i = 1, \dots, N-1$; считаем, что выполняется условие баланса (спрос равен предложению)

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i = 0; \quad (1)$$

S — вместимость ТС;

c_{ij}^k , $i, j = 0, \dots, N-1$; $k = 1, \dots, N$, — стоимость проезда из i -го пункта в j -й в k -й день;

K_{\min} и K_{\max} — минимальное и максимальное число пунктов, которые можно обслужить за день;

P — число дней, за которое надо произвести доставку.

В качестве неизвестных аналогично работе [12] примем булевы переменные X_{ij}^k , $i, j = 0, \dots, N-1$; $k = 1, \dots, N$, равные единице тогда и только тогда, когда при k -м по порядку переезде ТС переезжает из i -го пункта в j -й.

Ограничения:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{N-1} X_{ij}^k = 1, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

(из каждого пункта ТС после погрузки или разгрузки выезжает один раз);

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{N-1} X_{ij}^k = 1, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

(в каждый пункт ТС для погрузки или разгрузки прибывает один раз);

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} X_{ij}^k = 1, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4)$$

(k -й переезд всего один);

$$\sum_{i=0}^{N-1} X_{i0}^N = 1 \quad (5)$$

(на N -м переезде ТС должно вернуться на базу из какого-нибудь другого пункта);

$$\sum_{j=0}^{N-1} X_{0j}^N = 1 \quad (6)$$

(в первый день ТС выезжает с базы в какой-нибудь другой пункт);

$$\sum_{i=0}^{N-1} X_{ij}^k = \sum_{p=0}^{N-1} X_{jp}^{k+1}, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (7)$$

(из j -го пункта ТС совершит $(k+1)$ -й по порядку переезд тогда и только тогда, когда в k -й переезд в этот пункт ТС прибывает).

Предложение 1. Любое решение системы (2)–(7) порождает цикл, содержащий все вершины по одному разу (гамильтонов цикл), в котором k есть номер дуги в порядке прохождения.

Доказательство. Из условия (5) следует, что существует единственный пункт $i_1 \neq 0$, для которого

$X_{0i_1}^1 = 1$. Пусть по индукции построена цепь $(0, i_1, \dots, i_k)$ такая, что $X_{i_{s-1}i_s}^s = 1$, $s = 1, \dots, k < N$, $i_0 = 0$. Из условия

(2) и равенства $X_{i_{k-1}i_k}^k = 1$ следует, что $\sum_{i=0}^{N-1} X_{ii}^k = 1$. Из

равенства (6) $\sum_{p=0}^{N-1} X_{i_k p}^{k+1} = 1$, т. е. существует единствен-

ный пункт i_{k+1} , для которого $X_{i_k i_{k+1}}^{k+1} = 1$. Проверим, что

$i_{k+1} \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Если бы выполнялось обратное, то существовал бы пункт i_s , $s < k+1$, для которого $X_{i_s i_{k+1}}^s = 1$.

Но это противоречит условию (2). Таким образом строится цепь $(0, i_1, \dots, i_{N-1})$, которая содержит все пункты.

В силу условий (4) и (2) $X_{i_{N-1}0}^N = 1$. Тем самым, построен цикл с нужными свойствами. ♦

Следующее ограничение отражает недопустимость переполнения ТС и неотрицательность загрузки ТС на каждом шаге:

$$0 \leq \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} X_{ij}^k a_i \leq S, \quad p = 1, \dots, N-1. \quad (8)$$

В общем случае система (2)–(8) несовместна. Можно найти величину S_{\min} — минимальную допустимую вместимость ТС — как решение линейной частично целочисленной задачи (2)–(7) с целевой функцией $S \rightarrow \min$ (для этого можно воспользоваться и более простой задачей, см. работу [13]). Справедливо

Предложение 2 [13]. Если $S \geq 2 \max\{|a_i|\}$, то система (2)–(8) совместна, т. е. $S_{\min} \leq 2 \max\{|a_i|\}$.

Доказательство. Докажем, что всегда, пока не весь груз доставлен потребителям, найдется пункт производства, из которого ТС может вывезти груз, или пункт потребления, в который ТС может груз завезти. В первый день, поскольку $a_0 \leq S$, груз из базы вывезти



можно. Пусть в некоторый день загрузка ТС равна b . Возможны три ситуации.

а) $b \leq S/2$, и груз вывезен из всех пунктов производства; в силу условия (1) потребность в каждом из оставшихся пунктов потребления не превосходит b , т. е. маршрут можно продолжить;

б) $b \leq S/2$, и груз не вывезен из всех пунктов производства. В этом случае $S - b \geq S/2 \geq \max\{a_i\}$, т. е. груз можно вывезти из любого оставшегося с грузом пункта производства;

в) $b \geq S/2$: аналогично случаю б), груз можно завезти в любой пункт потребления. Предложение доказано. ♦

Далее определим отображение $\varphi: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, P\}$, которое каждому переезду сопоставляет порядковый номер дня, в который этот переезд осуществляется. Эта функция неубывающая, причем $K_{\min} \leq |\varphi^{-1}(s)| \leq K_{\max}$, $s = 1, \dots, P$. Целевой функцией служит общая стоимость перевозок:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} X_{ij}^k c_{ij}^{\varphi(k)} \rightarrow \min. \quad (8)$$

Легко проверить, что для допустимости задачи (1)–(9) необходимо и достаточно совместное выполнение условий $S \geq S_{\min}$, $PK_{\min} \leq N \leq PK_{\max}$.

Частным случаем поставленной задачи (при $a_0 = N - 1$, $a_1 = \dots = a_{N-1} = -1$, c_{ij}^k не зависит от k , $P = N$, $K_{\min} = K_{\max} = 1$) является классическая задача коммивояжера, которая относится к классу NP-трудных. Задача (2)–(8), таким образом, относится к тому же классу.

В § 2 описано приведение задачи к линейной булевой форме. При этом размерность задачи возрастает.

2. ЛИНЕЙНАЯ БУЛЕВА МОДЕЛЬ

Введем булевы переменные y^{ks} , $k = 1, \dots, N$; $s = 1, \dots, P$, равные единице тогда и только тогда, когда в s -й день осуществляется k -й переезд. Ограничения на эти переменные имеют вид:

$$\sum_{s=1}^P y^{ks} = 1, \quad k = 1, \dots, N, \quad (10)$$

(каждый отрезок пути проезжается в некоторый день);

$$K_{\min} \leq \sum_{k=1}^N y^{ks} \leq K_{\max}, \quad s = 1, \dots, P, \quad (11)$$

(ограничения на число отрезков пути, проезжаемых за один день);

$$y^{ks} + y^{(k+1)t} - 1 \leq [s \leq t], \quad s, t = 1, \dots, P; \\ k = 1, \dots, N - 1, \quad (12)$$

(если k -й отрезок пути проезжается в s -й день, а $(k + 1)$ -й — в t -й, то $s \leq t$. Здесь $[L]$ — булево числовое значение логической функции L).

Целевая функция примет вид:

$$\sum_{s=1}^P \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_{ij}^k y^{ks} c_{ij}^s \rightarrow \min. \quad (13)$$

Для исключения квадратичной нелинейности в целевой функции введем еще одно семейство булевых переменных $z_{ij}^{ks} = x_{ij}^k y^{ks}$, $i, j = 0, \dots, N - 1$; $k = 1, \dots, N$; $s = 1, \dots, P$.

Они задаются линейными ограничениями:

$$z_{ij}^{ks} \geq x_{ij}^k + y^{ks} - 1, \quad z_{ij}^{ks} \leq x_{ij}^k, \quad z_{ij}^{ks} \leq y^{ks}, \\ i, j = 0, \dots, N - 1; k = 1, \dots, N; s = 1, \dots, P. \quad (14)$$

Целевая функция (13) принимает вид:

$$\sum_{s=1}^P \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} z_{ij}^{ks} c_{ij}^s \rightarrow \min. \quad (15)$$

Окончательно получаем следующую задачу.

Найти булевы переменные z_{ij}^{ks} , x_{ij}^k , y^{ks} , $i, j = 0, \dots, N - 1$; $s = 1, \dots, P$; $k = 1, \dots, N - 1$, удовлетворяющие условиям (2)–(7), (9)–(12), (14), при которых достигается минимум целевой функции (15).

Число переменных и ограничений имеет порядок $O(N^3P)$. Полиномиальность числа ограничений существенна для использования стандартных решателей.

В частном случае допустимости посещения ежедневно только одного пункта для погрузки или разгрузки (т. е. при $P = N$, $K_{\min} = K_{\max} = 1$) постановка задачи упрощается. Отпадает необходимость введения переменных y^{ks} .

Задача принимает следующий вид. Найти булевы переменные X_{ij}^k , $i, j = 0, \dots, N - 1$; $k = 1, \dots, N$, удовлетворяющие условиям (2)–(7), при которых минимальна функция

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} X_{ij}^k c_{ij}^k \rightarrow \min.$$

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Вычисления проводились в пакете IBM ILOG CPLEX Optimization studio 12.2, установленном на компьютере с процессором Intel Core (тактовая частота 3,1 ГГц, ОЗУ 4 Гб).

Задача решалась двумя методами, реализованными в пакете:

- динамического поиска;
- ветвей и отсечений.

Первый метод — это «ноу-хау» фирмы IBM, никакие подробности не разглашаются. Применяемый в пакете метод ветвей и отсечений основан на непрерывных релаксациях.

При организации процесса вычислений задача модифицировалась для исключения из рассмотрения заведомо нулевых переменных $X_{ij}^k, i = 0, \dots, N - 1; k = 1, \dots, N$. Для этого вводились булевы переменные трех видов: $(X')_i = X_{0i}^1, i = 1, \dots, N - 1,$

$$(X'')_{ij}^k = \begin{cases} X_{i(j+1)}^k & \text{при } i \leq j, \\ X_{ij}^k & \text{при } i > j, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N - 1; \\ j = 1, \dots, N - 2; \quad k = 2, \dots, N - 1,$$

$$(X''')_i = X_{i0}^N, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Например, для перестановки (2, 4, 3, 1, 0) при $N = 4$ равны единице следующие из введенных переменных: $(X')_2, (X'')_{23}^1, (X'')_{43}^2, (X'')_{31}^3, (X''')_1$.

Соответственно вводились булевы переменные $(Z')_p, (Z'')_{ij}^k, (Z''')_i$ и модифицировались ограничения.

Исследовалась зависимость среднего времени решения задачи, числа итераций и числа ветвлений от параметров задачи. Исходные данные генерировались с помощью датчика псевдослучайных чисел.

Массы грузов $a_1 - a_{N-1}$ генерировались целыми из отрезка $[-20; 20]$, значение a_0 определялось из условия (1), нули исключались. Если оказывалось, что $a_0 < 0$, то все значения умножались на (-1) .

Величины c_{ij}^k при $i \neq j$ генерировались целыми из отрезка $[1; 20]$.

В соответствии с предложением 2, вместимость S принималась равной $2 \max\{a_i\}$.

Для каждого числа пунктов генерировались 10 примеров.

1. Исследовалась зависимость характеристик решения от K_{\max} при $K_{\min} = 0$, допустимое число дней P принималось равным N . Для каждого набора па-

Таблица 1

Характеристики решения в зависимости от изменения K_{\max} при различных N

K_{\max}	N				
	5	6	7	8	9
1	1,5/0/0,38	16/0/0,52	48/0/1	105/1/1,73	215/4,6/3,2
2	1,5/0/0,38	16/0/0,56	48/0/1	102/0/1,66	190/3,4/3,5
3	132/7/0,60	$3,3 \cdot 10^3/220/1,4$	$1,5 \cdot 10^4/650/5,4$	$8,7 \cdot 10^4/2,7 \cdot 10^3/16$	$5,2 \cdot 10^5/1,0 \cdot 10^4/133$
4	84/9/0,66	$2,5 \cdot 10^3/193/1,7$	$1,2 \cdot 10^4/608/3,8$	$8,1 \cdot 10^4/3,0 \cdot 10^3/13$	$7,2 \cdot 10^5/2,1 \cdot 10^4/103$
5	158/10/0,53	$3,8 \cdot 10^3/259/1,6$	$1,7 \cdot 10^4/706/4,6$	$1,3 \cdot 10^5/4,6 \cdot 10^4/22$	$7,1 \cdot 10^5/1,4 \cdot 10^4/221$
6	142/6/0,70	$3,8 \cdot 10^3/287/1,8$	$1,3 \cdot 10^4/764/4,0$	$9,8 \cdot 10^4/3,5 \cdot 10^4/14$	$8,0 \cdot 10^5/2,1 \cdot 10^4/121$
7	140/7/0,64	$4,4 \cdot 10^3/298/1,4$	$2,0 \cdot 10^4/821/6,2$	$1,4 \cdot 10^5/4,5 \cdot 10^3/21$	$7,8 \cdot 10^5/1,5 \cdot 10^4/286$
8	120/4/0,66	$3,4 \cdot 10^3/256/1,8$	$1,2 \cdot 10^3/648/3,7$	$1,0 \cdot 10^5/3,8 \cdot 10^3/16$	$9,3 \cdot 10^5/2,5 \cdot 10^4/153$
9	145/6/0,58	$4,2 \cdot 10^3/275/1,5$	$2,1 \cdot 10^4/877/7,2$	$1,2 \cdot 10^5/4,0 \cdot 10^3/25$	$8,1 \cdot 10^5/1,5 \cdot 10^4/311$
10	11/2/0,67	$3,3 \cdot 10^3/248/1,9$	$1,3 \cdot 10^3/737/4,0$	$9,8 \cdot 10^4/3, \cdot 10^3/15$	$8,8 \cdot 10^5/2,2 \cdot 10^4/147$
11	—	$5,0 \cdot 10^3/317/1,5$	$2,3 \cdot 10^4/879/7,2$	$1,2 \cdot 10^5/3,8 \cdot 10^3/25$	$8,2 \cdot 10^5/2,3 \cdot 10^4/345$
12	—	$2,8 \cdot 10^3/203/1,7$	$1,4 \cdot 10^4/743/4,3$	$1,4 \cdot 10^5/4,7 \cdot 10^3/20$	$8,3 \cdot 10^5/2,2 \cdot 10^4/136$
13	—	—	$1,8 \cdot 10^4/724/4,8$	$1,2 \cdot 10^5/4,3 \cdot 10^3/29$	$9,0 \cdot 10^5/1,4 \cdot 10^4/412$
14	—	—	$1,4 \cdot 10^4/764/4,6$	$1,4 \cdot 10^5/4,5 \cdot 10^4/21$	$9,3 \cdot 10^5/2,4 \cdot 10^4/181$
15	—	—	—	$1,2 \cdot 10^5/4,0 \cdot 10^3/27$	$8,8 \cdot 10^5/1,4 \cdot 10^4/370$
16	—	—	—	$1,2 \cdot 10^5/4,2 \cdot 10^3/19$	$1,1 \cdot 10^6/2,7 \cdot 10^4/210$
17	—	—	—	—	$9,2 \cdot 10^5/1,6 \cdot 10^4/410$
18	—	—	—	—	$1,1 \cdot 10^6/2,7 \cdot 10^4/202$



Таблица 2

Характеристики решения в зависимости от изменения K_{\min} при различных N

N	K_{\min}		
	0	1	2
5	41/0/0,43	18/0/0,47	6/0/0,41
	36/0/0,48	14/0/0,46	6/0/0,44
6	$1,2 \cdot 10^3/83/0,91$	279/15/0,80	21/0/0,52
	981/65/1,19	254/6/1,01	21/0/0,52
7	$3,3 \cdot 10^3/122/2,18$	$1,1 \cdot 10^3/57/1,55$	90/1/0,86
	$3,1 \cdot 10^3/107/3,02$	695/15/1,80	93/0/0,85
8	$2,9 \cdot 10^4/682/6,61$	$1,0 \cdot 10^4/525/4,73$	99/2/1,80
	$3,3 \cdot 10^4/1,3 \cdot 10^3/7,10$	$1,0 \cdot 10^4/478/4,42$	95/2/1,82
9	$1,2 \cdot 10^5/2,0 \cdot 10^3/23,10$	$6,9 \cdot 10^4/1,5 \cdot 10^3/15,33$	$4,2 \cdot 10^3/278/3,07$
	$1,9 \cdot 10^5/5,4 \cdot 10^3/25,23$	$1,0 \cdot 10^5/3,1 \cdot 10^3/14,66$	$1,0 \cdot 10^3/19/3,44$

раметров N , K_{\max} генерировалось по 10 примеров. Результаты эксперимента отражены в табл. 1, в ячейках приведены последовательно среднее число итераций, среднее число ветвей в дереве решений и среднее время выполнения (в секундах). Значения в верхних строках ячеек относятся к методу динамического поиска, в нижних — ветвей и отсечений.

Из табл. 1 видно, что в среднем время решения задачи, число итераций и число ветвей в дереве решений быстро возрастают с увеличением N . Поведение трех перечисленных показателей при изменении K_{\max} не имеет ярко выраженной тенденции. При $N = 5, 6$ существенной разницы в среднем времени выполнения задачи двумя методами не наблюдается; при больших N более эффективным оказался метод ветвей и отсечений.

2. Исследовалась зависимость параметров решения от K_{\min} . При этом принималось $K_{\max} = P = \lfloor N/2 \rfloor$. Соответственно, $K_{\min} \leq 2$ (табл. 2). Здесь также в ячейках приведены последовательно среднее число итераций, среднее число ветвей в дереве решений и среднее время выполнения (в секундах), верхние строки относятся к методу динамического поиска, нижние — ветвей и отсечений.

Вывод: время выполнения, число итераций и число ветвлений с увеличением N возрастают, а с увеличением K_{\min} уменьшаются; оба метода одинаково эффективные. Отметим, что влияние роста K_{\min} на вычислительные характеристики задачи вполне естественное: с ростом K_{\min} сужается диапазон возможных значений числа пунктов, посещаемых в течение дня, это приводит к сокращению переборных процедур.

3. Отдельно исследовался случай $K_{\min} = K_{\max} = 1$ при $P = N$. Содержательно это означает, что ежедневно ТС должно посетить в точности один пункт. Из табл. 3 видно, что для числа пунктов от 5 до 15 существенной разницы во времени выполнения задачи двумя методами не наблюдается; для остальных N более эффективным оказался метод ветвей и отсечений.

Отмечается сильная зависимость эффективности решения от параметров конкретной задачи. Разница между максимальными и минимальными

Таблица 3

Характеристики решения в зависимости от изменения N

N	Характеристики решения
5	2/0/0,31
	2/0/0,30
10	639/16/1,09
	574/18/1,17
15	$2,0 \cdot 10^4/475/6,74$
	$2,2 \cdot 10^4/610/6,11$
20	$2,5 \cdot 10^5/4,3 \cdot 10^3/59,17$
	$2,7 \cdot 10^5/5,1 \cdot 10^3/47,87$
21	$5,8 \cdot 10^5/8,8 \cdot 10^3/225,99$
	$7,5 \cdot 10^5/1,3 \cdot 10^4/149,64$
22	$6,9 \cdot 10^5/9,0 \cdot 10^3/182,91$
	$8,7 \cdot 10^5/1,4 \cdot 10^4/169,21$
23	$1,2 \cdot 10^6/1,4 \cdot 10^4/834,25$
	$1,8 \cdot 10^6/2,9 \cdot 10^4/516,92$

значениями характеристик решений имеет значительный разброс при одной и той же размерности. Так, минимальное время решения при $N = 23$ меньше максимального при $N = 20$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована нестационарная задача доставки однородного груза от семейства производителей потребителям с ограничениями на число посещений пунктов потребления в один день. Построена соответствующая линейная целочисленная модель.

Проведен сравнительный анализ эффективности решения задачи двумя методами, реализованными в пакете IBM ILOG CPLEX Optimization studio 12.2. Дальнейшие направления исследований связаны с разработкой эффективных эвристических методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dantzig G.B., Ramser R.H.* The Truck Dispatching Problem // *Management Science*. — 1959. — N 6. — P. 80–91.
2. *Бронштейн Е.М., Заико Т.А.* Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики // *Автоматика и телемеханика*. — 2010. — № 10. — С. 133–147.
3. *URL:* <http://neo.lcc.uma.es/vrp/> (дата обращения: 07.01.2014).
4. *Ralphs T.K., Kopman L., Pulleyblank W.R., Trotter L.E. Jr.* On the Capacitated Vehicle Routing Problem // *Math. Program., Ser. B*. — 2003. — Vol. 94. — P. 343–359.
5. *Laporte G., Nobert Y., Taillefer S.* Solving a family of multi-depot vehicle routing and location-routing problems // *Transportation Science*. — 1988. — Vol. 22. — P. 161–172.
6. *Crevier B., Cordeau J.-F., Laporte G.* The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes // *European Journal of Operational Research*. — 2007. — Vol. 176. — P. 756–773.
7. *Malandraky C., Daskin M.S.* Time Dependent Vehicle Routing Problems: Formulations, Properties and Heuristic Algorithms // *Transportation Science*. — 1992. — Vol. 26. — P. 185–200.
8. *Ichoua S., Gendreau M., Potvin J.-Y.* Vehicle Dispatching With Time-Dependent Travel Times // *European Journal of Operational Research*. — 2003. — Vol. 144. — P. 379–396.
9. *Stegers E.* A Solution Method for Vehicle Routing Problems with Time-Dependent Travel Times. — Delft: Delft University of Technology, 2009. — 83 p.
10. *Picard J.-C., Queyranne M.* The time-dependent traveling salesman problem and its application to the tardiness problem in one-machine scheduling // *Operations Research*. — 1978. — Vol. 26. — N 1. — P. 86–110.
11. *Gouveia L., Vob S.* A classification of formulations for the (time-dependent) traveling salesman problem // *European Journal of Operational Research*. — 1995. — Vol. 83. — P. 69–82.
12. *Picard J.C., Queyranne M.* The time-dependent travelling salesman problem and its application to the tardiness in one-machine scheduling // *Operations Research*. — 1978. — Vol. 26. — P. 86–110.
13. *Бронштейн Е.М., Гиндуллин Р.В.* Об одном классе задач маршрутизации // *Математическое моделирование*. — 2011. — Т. 23, № 6. — С.123–132.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Бронштейн Ефим Михайлович — д-р физ.-мат. наук, профессор, ☎ (347) 273-79-67, ✉ bro-efim@yandex.ru,

Давлетбаев Арвид Артурович — аспирант, ✉ Arvid_NF@mail.ru, Уфимский государственный авиационный технический университет.

Содержание сборника "Управление большими системами", 2014, вып. 47

- ✓ **Усков А.А.** Сетевой график с продолжительностями работ в виде нечетких чисел LR-типа. — С. 6–17.
- ✓ **Емельянова Ю.П.** Экспоненциальная устойчивость нелинейных дискретных 2D-систем. — С. 18–44.
- ✓ **Зуев А.С.** О подходе к реализации виртуальных четырехмерных сред человеко-компьютерного взаимодействия. — С. 45–76.
- ✓ **Буре В.М., Мазалов В.В., Плаксина Н.В.** Вычисление характеристик пассажиропотоков в транспортных системах. — С. 77–91.
- ✓ **Антоненко А.В., Угольницкий Г.А.** Модели мотивационного управления в электроэнергетике и проблемы их идентификации. — С. 92–124.
- ✓ **Шумов В.В.** Модель социального влияния и ее применение при анализе пограничной безопасности государства. — С. 125–166.
- ✓ **Гусев С.С.** Построение модифицированного алгоритма идентификации динамического объекта управления по экспериментальным данным ядерной энергетической установки. — С. 167–186.
 - ✓ **Кочетков С.А., Уткин А.В., Уткин В.А.** Робастное управление электромагнитным подвесом на основе вихревых алгоритмов. — С. 187–211.
 - ✓ **Мелентьев В.А.** Вложение подсистем, лимитирующих длину и число путей между вершинами графа вычислительной системы. — С. 212–246.

Тексты статей доступны на сайте <http://ubs.mtas.ru/>

