Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

M. M. Arslanov, Families of recursively enumerable sets and their degrees of unsolvability,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1985, Number 4, 13–19

https://www.mathnet.ru/eng/ivm7327

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.171
January 20, 2026, 05:44:01

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия.— М., 1948.— 316 с.
2. Königs M. G. Sur les géodétiques intégrales quadratiques.— Прилож. II к G. Darboux, Lecons sur la theorie generale des surfaces, 1896, v. 4, p. 368—404.
3. Fubini G. Sui gruppi transformazioni geodetiche.— Mem. Acc. Torino, (2), 1903, v. 53, p. 261—313.
4. Солодовников А. С. Проективные преобразования римановых пространств.— УМН, 1956, т. XI, вып. 4, с. 45—116.
5. Широков П. А. Тензорное исчисление.— 2-е изд.— Казань, 1961.— 447 с.
6. Широков П. А. Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в Riemann'овых пространствах.— Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те, 1925, сер. 2, т. 25, с. 86—114.
7. Аминова А. В. Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности, I.— Тр. Геометрич. семин. М., ВИНИТИ АН СССР, 1974, т. 6, с. 317—346.
8. Жукова Л. И. Проективные преобразования в римановых пространствах V_3.— Кандид. диссерт., Казанск. ун-т, 1971.
9. Аминова А. В. О проективно-групповых свойствах римановых пространств лоренцевой сигнатуры.— Изв. вузов. Матем., 1984, № 6, с. 10—21.

г. Казань

Поступила
13.05.1983

М. М. Арсланов

УДК 510.54

СЕМЕЙСТВА РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ И ИХ СТЕПЕНИ НЕРАЗРЕШИМОСТИ

В работе рассматриваются семейства рекурсивно перечислимых (р. п.) тьюринговых степеней (короче, степеней) неразрешимости, определяются и изучаются их степени неразрешимости. В § 1, который является продолжением одной из предыдущих работ автора [1], приводится несколько теорем о различных неподвижных точках функций в стандартной нумерации всех р. п. множеств. Теорема 2 позволяет обобщить все эти теоремы на новые классы функций и обосновывает общий метод доказательства критериев полноты некоторых классов множеств относительно различных сводимостей. В § 2 результаты предыдущего параграфа используются для изучения степеней неразрешимости различных семейств р. п. степеней.

Условимся об обозначениях и терминологии. Множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \dots\}$ будем обозначать буквой N. Стандартные нумерации всех одноместных частично рекурсивных функций и всех рекурсивно перечислимых множеств соответственно обозначаются через $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и $\{w_n\}_{n\in N}$. Через $\{\varphi_n^X\}_{n\in N}$ обозначается нумерация одноместных частично рекурсивных относительно множества X функций. Если A сводимо по Тьюрингу к B, то пишем $A \leqslant_T B$; $A =_T B$, если $A \leqslant_T B \,\&\, B \leqslant_T A$. Степень множества A обозначается через $\deg(A)$, $A[x] = A \cap \{0, 1, \dots, x\}$.

Если функция f в точке x определена, то пишем $f(x)\downarrow$, в противном случае — $f(x)\uparrow$. $\varphi_{e,s}(x)$ определена и равна $\varphi_e(x)$, если процедура вычисления значения $\varphi_e(x)$ завершается за s шагов. В противном случае $\varphi_{e,s}(x)$ не определена. $A' = \{x \mid \varphi_x^A(x)\downarrow\}$ — скачок множества A. Если $\varphi_e^A(x)\downarrow$, то $\mathrm{use}(A, e, x) = \mu t$ {при вычислении $\varphi_e^A(x)$ вопросы к оракулу A задаются из $A[t]$}. $A \leqslant_{\mathrm{wtt}} B$, если $A = \varphi_e^A$ для некоторого e и существует такая общерекурсивная функция f, что $(\forall x)(\mathrm{use}(B, e, x) \leqslant f(x))$. Здесь и в дальнейшем характеристическую функцию множества A обозначаем той же буквой: $A(x) = 1$, если $x \in A$, и $A(x) = 0$, если $x \notin A$.

Буквы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}, \dots$ обозначают степени. $\boldsymbol{a}'$ — скачок $\boldsymbol{a}$. Σ_n^0, Π_n^0, Δ_n^0 $(n \in N)$ — классы арифметических множеств в иерархии Клини—Мостовского.

Дальнейшее изложение будет существенно использовать следующее утверждение, доказательство которого содержится в доказательстве теоремы 8 из [1].

Теорема (о T-рекурсии). *Пусть f — общерекурсивная относительно $\varnothing''$ функция. Существует общерекурсивная функция g такая, что для любого e $W_{f(e)} =_T W_{g(e)}$. Номер общерекурсивной функции g находится эффективно по номеру f в нумерации $\{\varphi_e^{\varnothing''}\}$.*

§ 1. Теоремы о неподвижной точке и критерии $\varnothing'$-, $\varnothing''$- и $\varnothing'''$- полноты Σ_1^0-, Σ_2^0- и Σ_3^0-множеств

Если f — общерекурсивная функция, то существует натуральное число e такое, что

$$W_{f(e)} = W_e, \tag{1}$$

число e может быть найдено эффективно по номеру f в нумерации $\{\varphi_x\}$. Это утверждение, установленное Клини (см., напр., [2]) в 1938 году, хорошо известно в теории рекурсивных функций как инструмент, позволяющий доказать существование различных неявно заданных функций. Оно является, как было замечено самим Клини, конструктивной версией канторовского диагонального метода и устанавливает существование неподвижной точки функции f, рассматриваемой как отображение множества номеров р. п. множеств в нумерации $\{W_x\}$ в себя. Однако, как часто оказывается при проведении различных конструкций, для успешного применения метода нет необходимости обращаться к неподвижной точке функции, а достаточно иметь число, которое является неподвижной точкой функции с точностью до некоторого отношения эквивалентности, определенного на номерах р. п. множеств. Например, при изучении свойств фактор-решетки р. п. множеств по модулю конечных множеств вместо теоремы о неподвижной точке мы нуждаемся в более слабой теореме о „почти неподвижной точке" функции, т. е. вместо соотношения (1) достаточно иметь соотношение $(\exists x)(W_{f(x)} =^* W_x)$, где $\ldots =^* \ldots$ означает, что „существуют конечные множества A и B такие, что $\ldots \bigcup A = \ldots \bigcup B$". Это позволяет, как показывает следующая теорема, расширить область применения теоремы о неподвижной точке.

Теорема 1 (о почти неподвижной точке). *Пусть f — общерекурсивная относительно $\varnothing'$ функция. Существует такое натуральное число e, что $W_{f(e)} =^* W_e$. Число e может быть найдено эффективно по номеру функции f в нумерации всех одноместных частично рекурсивных относительно $\varnothing'$ функций.*

Доказательство. По лемме о пределе [2] (с. 31) для любого x имеем $f(x) = \lim_s g(s, x)$, где g — общерекурсивная функция. Пусть h — такая общерекурсивная функция, что $W_{h(x)}^{(s)} = \bigcup_{t \leqslant s} W_{g(t, x)}$ для любых s, x. Ясно, что $W_{h(x)} =^* W_{f(x)}$ для любого x. По теореме о неподвижной точке существует такое натуральное число e, что $W_{h(e)} = W_e$. Таким образом, $W_{f(e)} =^* W_e$. Легко видеть, что номера общерекурсивных функций g и h в нумерации $\{\varphi_x\}$ находятся эффективно по номеру f в нумерации $\{\varphi_x^{\varnothing'}\}$. Теорема доказана.

При изучении степеней неразрешимости мы нуждаемся в еще более слабой теореме о T-неподвижной точке функции, где вместо соотношения (1) имеем $(\exists x)(W_x =_T W_{f(x)})$. В [1] было показано, что это позволяет расширить сферу применения теоремы о неподвижной точке на класс функций, принадлежащих уровню Δ_3^0 иерархии Клини—Мостовского: любая функция, общерекурсивная относительно $\varnothing''$, обладает T-неподвижной точкой, т. е. $(\exists e)(W_{f(e)} =_T W_e)$.

Следующее утверждение под названием „обобщенная теорема о рекурсии" анонсировалось в [3].

Теорема 2. *Пусть $=_E$ — отношение эквивалентности на р. п. множествах. Пусть A — р. п. относительно C множество и $C \leqslant_T A <_T C'$. Предположим, что каждая функция g, общерекурсивная относительно C,*

обладает E-неподвижной точкой, которая может быть найдена эффективно по номеру g в нумерации $\{\varphi_e^C\}$. Тогда любая функции f, общерекурсивная относительно A, обладает E-неподвижной точкой: $(\exists e)(W_e =_E W_{f(e)})$.

Доказательство. Пусть $\{A^{(s)}\}$, $\{(C')^{(s)}\}$ — C-рекурсивные перечисления A и C'. Пусть $f = \varphi_e^A$ и $m(x) = \mu x\{x \in (C')^{(s)}\}$, если $x \in C'$; в противном случае $m(x)$ не определена.

Определим $\hat{f}(y, x) = \varphi_{e,t}^{A^{(t)}}(y)$, где t — такое наименьшее число, что $t \geqslant x$ и $\varphi_{e,t}^{A^{(t)}}(y)\downarrow$. Ясно, что $\hat{f} \leqslant_T C$.

Если $x_0 \in C'$, то $\hat{f}(y, m(x_0))$ общерекурсивна относительно C и по предположению обладает E-неподвижной точкой, которая находится эффективно по номеру $\hat{f}$ в нумерации $\{\varphi_e^C\}$. Другими словами, существует общерекурсивная относительно C функция h такая, что для всех x

$$x \in C' \Rightarrow W_{h(x)} =_E W_{\hat{f}(h(x),\, m(x))}. \tag{2}$$

Пусть $g(x) = \mathrm{use}(A, e, x)$, $r(x) = \mu s\{A^{(s)}[gh(x)] = A[gh(x)]\}$. Так как $C \leqslant_T A$, то $r \leqslant_T A$. Далее, т. к. $C \leqslant_T A \,\&\, C' \overset{\text{не}}{\leqslant}_T A$, то существует такое число $x_0 \in C'$, что $m(x_0) < r(x_0)$. Для этого x_0 имеем $\hat{f}(h(x_0), m(x_0)) = f(h(x_0))$, поэтому по (2): $W_{f(h(x_0))} = W_{\hat{f}(h(x_0),\, m(x_0))} =_E W_{h(x_0)}$ и $h(x_0)$ — искомая E-неподвижная точка f. Теорема доказана.

Теорема 2 замечательна тем, что она позволяет унифицировать доказательства критериев A'-полноты относительно различных сводимостей $\leqslant_E$ и различных множеств A классов множеств, перечислимых с оракулом A, опираясь на соответствующие теоремы о E-неподвижной точке. Например, полученные ранее автором ([1], [4]) разными способами критерии $\varnothing'$-, $\varnothing''$- и $\varnothing'''$-полноты Σ_1^0-, Σ_2^0- и Σ_3^0-множеств теперь непосредственно получаются из теоремы 2.

Следствие 2.1 (критерий полноты р. п. множеств). *Пусть A — р. п. множество. $A =_T \varnothing'$ тогда и только тогда, когда существует функция $f \leqslant_T A$ такая, что* $(\forall x)(W_x \neq W_{f(x)})$.

Следствие 2.2 (критерий $\varnothing''$-полноты Σ_2^0-множеств). *Пусть A — р. п. относительно $\varnothing'$ и $\varnothing' \leqslant_T A$. $A =_T \varnothing''$ тогда и только тогда, когда существует функция $f \leqslant_T A$ такая, что* $(\forall x)(W_{f(x)} \neq^* W_x)$.

Следствие 2.3 (критерий $\varnothing'''$-полноты Σ_3^0-множеств). *Пусть A — р. п. относительно $\varnothing''$ и $\varnothing'' \leqslant_T A$. $A =_T \varnothing'''$ тогда и только тогда, когда существует функция $f \leqslant_T A$ такая, что* $(\forall x)(W_{f(x)} \neq_T W_x)$.

Доказательства этих следствий вытекают из теорем о неподвижной, почти неподвижной и T-неподвижной точках и теоремы 2 при $C = \varnothing$, $\varnothing'$, $\varnothing''$ и $=_E$, равном $=$, $=^*$, $=_T$ соответственно.

Замечание. Можно показать, что в следствиях 2.2 и 2.3 условия $\varnothing' \leqslant_T A$ и $\varnothing'' \leqslant_T A$ лишние. Доказательство этого технически более сложного утверждения мы не приводим. Заметим также, что имеют место аналогичные с изложенными критерии E-полноты р. п. множеств для различных сводимостей $\leqslant_E$ (напр., для m-, tt-, wtt-сводимостей). Для wtt-сводимости соответствующий критерий wtt-полноты (р. п. множество A wtt-полно тогда и только тогда, когда $(\exists f \leqslant_{\mathrm{wtt}} A)(\forall e)(W_e \neq W_{f(e)})$) был доказан в [1]. При E, равном m- и tt-сводимостям, критерии E-полноты формулируются аналогично (предполагаем, что по определению $f \leqslant_E A$, если график функции f E-сводится к A). Для m-сводимости похожий критерий получен также В. Д. Соловьевым [5].

§ 2. Семейства р. п. степеней и их степени неразрешимости

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное семейство р. п. степеней. В каких случаях можно говорить, что $\mathfrak{A}$ рекурсивно, рекурсивно перечислимо? Мы можем, напр., назвать рекурсивными такие семейства $\mathfrak{A}$, для которых соответствующее индексное множество $\{x \mid \deg(W_x) \in \mathfrak{A}\}$ рекурсивно. Однако при таком подходе рекурсивными окажутся (по известной теореме Райса [6]) только два тривиальных семейства—пустое и семейство, состоящее из всех р. п. степеней. Семейство, состоящее, напр., из единственной степени $\varnothing'$, вопреки нашему интуитивному представлению, окажется не только нерекурсивным, но даже займет довольно высокую ступень в соответствующей сложностной иерархии: степень индексного множества $\{x \mid W_x =_T \varnothing'\}$ равна $\varnothing^{(4)}$. Поэтому представляется естественным назвать рекурсивными такие семейства $\mathfrak{A}$, для которых $\mathfrak{A} = \{\deg(W_x) \mid x \in A\}$ для некоторого рекурсивного множества A. Аналогично, семейство $\mathfrak{A}$ р. п., если для некоторого р. п. множества A $\mathfrak{A} = \{\deg(W_x) \mid x \in A\}$.

Легко видеть, что все р. п. семейства рекурсивны: если $\mathfrak{A} = \{\deg(W_x) \mid x \in A\}$ и A р. п., $\mathfrak{A} \neq \varnothing$, то существует общерекурсивная функция f такая, что $\mathfrak{A} = \{\deg(W_{f(x)}) \mid x \in N\}$. Пусть g — такая общерекурсивная функция, что $g(0) = f(0)$ и $g(n+1)$ равно некоторому номеру $W_{f(n+1)}$, большему $g(n)$. Ясно, что область значений g рекурсивна и $\mathfrak{A} = \{\deg W_{g(x)}) \mid x \in N\}$. Поэтому $\mathfrak{A}$ рекурсивно.

Из следующей теоремы, которая является непосредственным следствием теоремы о T-рекурсии, неожиданно следует, что рекурсивными являются также и все рекурсивно перечислимые относительно $\varnothing''$ семейства.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — такое семейство р. п. степеней, что $\mathfrak{A} = \{\deg(W_x) \mid x \in S\}$ для некоторого $S \in \Sigma^0_3$ (эквивалентно $\mathfrak{A} = \{\deg(W_{f(x)}) \mid x \in N\}$ для некоторой функции $f \leqslant_T \varnothing''$). Тогда $\mathfrak{A}$ рекурсивно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \{\deg(W_{f(x)}) \mid x \in N\}$ и $f \leqslant_T \varnothing''$. По теореме о T-рекурсии существует общерекурсивная функция g такая, что $(\forall e)(W_{f(e)} =_T W_{g(e)})$. Поэтому $\mathfrak{A}$ р. п. и, следовательно, рекурсивно. Теорема доказана.

Ниже в следствии 4.2 мы увидим, что теорема 3 не может быть усилена; в ней Σ^0_3 нельзя заменить на Σ^0_4. Более того, Л. Уэлш [7] доказал, что: 1) для любого $n \geqslant 3$ найдется такое семейство р. п. степеней $\mathfrak{A}$ и такое Σ^0_{n+1}-множество S, что $\mathfrak{A} = \{\deg(W_e) \mid e \in S\}$; здесь S нельзя заменить на Σ^0_n-множество; 2) для любого $n \geqslant 0$, если $\mathfrak{A} = \{\deg(W_e) \mid e \in S\}$ и $S \in \Pi^0_n$, то $\mathfrak{A} = \{\deg(W_e) \mid e \in S_1\}$ для некоторого Σ^0_{n+1}-множества S_1. Таким образом, в теореме 3 Σ^0_3-множество S нельзя заменить ни на какое Π^0_3-множество.

Получим несколько следствий из теоремы 3. Предварительно докажем следующую технически полезную теорему, ранее анонсированную без доказательства в [3].

Теорема 4. *Пусть $A_0, A_1, \ldots$ — равномерно р. п. последовательность нерекурсивных р. п. множеств. Существует нерекурсивное р. п. множество A такое, что $A_j \overset{\text{не}}{\leqslant}_T A$ для всех j.*

Доказательство. Построим р. п. множество A, удовлетворив для всех e и j следующим требованиям: P_e: φ_e—общерекурсивная функция $\Rightarrow A \neq \varphi_e$; $N_{e,j}$: $A_j \neq \varphi_e^A$.

Искомое множество A строим по шагам, используя метод приоритета с конечными нарушениями. Пусть все требования упорядочены следующим образом:

$$P_0;\ N_{0,0};\ P_1;\ N_{0,1};\ N_{1,0};\ \ldots;\ P_s;\ N_{0,s};\ N_{1,s-1};\ \ldots;\ N_{s,0};\ \ldots \tag{3}$$

Как обычно, требование с меньшим номером обладает большим приоритетом. По мере их удовлетворения требования вида P_e не рассматриваются.

Для удовлетворения требований $N_{e,j}$ используем метод Сакса [9] сохранения равенства.

Пусть $A^{(0)} = \varnothing$.

Шаг $2s$, $s > 0$. Пусть $s = 2^e(2t+1)$. На этом шаге рассматриваем требование P_e. Если P_e к этому шагу уже исключено из рассмотрения, то переходим к шагу $2s+1$, определив $A^{(2s)} = A^{(2s-1)}$. Если же P_e из рассмотрения еще не исключено, то проверяем, существует ли число $p_e^x \leqslant 2s$ (здесь p_e есть e-е простое число), не запрещенное требованиями с большими приоритетами, такое, что $\varphi_{e,s}(p_e^x)\downarrow$ и $\varphi_{e,s}(p_e^x) = 0$. Если такое число существует, то пусть p_e^{x*} — наименьшее из них. Определяем $A^{(2s)} = A^{(2s-1)} \cup \{p_e^{x*}\}$ и исключаем требование P_e из дальнейшего рассмотрения. Если же такого p_e^x не существует, то полагаем $A^{(2s)} = A^{(2s-1)}$ и переходим к следующему шагу.

Шаг $2s+1$. Пусть $s = 2^e 3^j(6t+i)$, $i \in \{1,5\}$. На этом шаге рассматриваем требование $N_{e,j}$. Пусть x_0 — наибольшее число такое, что $A_j^{(2s)}[x_0] = \varphi_{e,2s}^{A^{(2s)}}[x_0]$. Запрещаем с приоритетом t, где t — номер требования $N_{e,j}$ в последовательности (3), класть числа $\leqslant x_0$ в A. Переходим к шагу $2s+2$.

Конструкция закончена. Пусть $A = \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} A^{(s)}$. Ясно, что A р. п. Докажем индукцией по последовательности (3), что каждое требование в конечном итоге удовлетворяется.

Сначала рассмотрим требование P_e. Допустим, что все требования, имеющие больший, чем P_e, приоритет, удовлетворены к шагу $2s$ конструкции. Если φ_e не является общерекурсивной характеристической функцией, то требование P_e удовлетворено. В противном случае должен встретиться шаг $2s_1$, $s_1 \geqslant s$, $s_1 = 2^e(2t+1)$ и для некоторого (наименьшего) числа $p_e^x \leqslant 2s$, большего всех чисел, запрещенных с большими приоритетами, $\varphi_{e,s}(p_e^x)$ определена и равна нулю (в этом случае мы должны по конструкции p_e^x положить в A, тем самым удовлетворив требование P_e), либо к шагу $2s$ требование P_e исключено из рассмотрения (значит, уже удовлетворено), либо $\varphi_{e,s_1}(p_e^x) = 1$ (в этом случае $A(p_e^x) = 0$, т. к. число p_e^x принадлежит A по конструкции только тогда, когда $\varphi_{e,s}(p_e^x) = 0$). Таким образом, в любом случае требование P_e к шагу $2s+1$ удовлетворяется.

Теперь рассмотрим требование $N_{e,j}$. Пусть все требования, находящиеся в последовательности (3) левее $N_{e,j}$, удовлетворены. Если требование $N_{e,j}$ к концу конструкции не удовлетворяется, то отсюда следует, что A_j рекурсивно. Действительно, пусть m — наибольшее число, запрещенное требованиями с большими, чем $N_{e,j}$, приоритетами. По индукционному предположению такое число m существует. Пусть t — такой шаг, начиная с которого запреты с большими приоритетами не создаются (снова по индукционному предположению такой шаг существует). Для того, чтобы для произвольного $x > m$ эффективно вычислить $A_j(x)$, находим шаг $2s+1 > t$ такой, что $(s)_0 = e$, $(s)_1 = j$ и $A_j^{(2s)}[x] = \varphi_{e,2s}^{A^{(2s)}}[x]$ (здесь $(s)_l$ — показатель степени при p_l в разложении s на простые множители $p_0, p_1, \ldots$). Такой шаг $2s+1$ должен существовать, иначе требование $N_{e,j}$ удовлетворено. Ясно, что $A_j(x) = A_j^{(2s)}(x)$. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Пусть $S \in \Sigma_3^0$ и $(\forall i \in S)$ (W_i нерекурсивно). Существует нерекурсивное р. п. множество A такое, что $(\forall i \in S)(W_i \overset{\text{не}}{\leqslant}_T A)$.*

Доказательство непосредственно следует из теорем 4 и о T-рекурсии.

Следствие 4.2. *Семейство всех нерекурсивных р. п. степеней рекурсивно перечислимо относительно $\varnothing'''$, но не рекурсивно перечислимо относительно $\varnothing''$.*

Доказательство. Так как $\{x \mid W_x$ нерекурсивно$\} \in \Sigma_4^0$, то первая часть следствия 4.2 очевидна. Предположим, что $\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}$ р. п. $\& \boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}\} = \{\deg(W_x) \mid x \in A\}$ и $A \in \Sigma_3^0$. Тогда $\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}$ р. п. $\& \boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}\} = \{\deg(W_{f(x)})\}_{x \in N}$ для некоторой функции $f \leqslant_T \varnothing''$ и по теореме 3 $\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}$ р. п. $\& \boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}\}$ рекурсивно. Это противоречит теореме 4.

Отметим еще одно следствие теорем 3 и 4.

Конструкция Поста [10] гиперпростых множеств, как легко убедиться, зависит от выбора гёделевской нумерации $\{W_x \mid x \in N\}$ и общерекурсивной функции f_K, перечисляющей без повторений креативное множество $K = \{\langle x, y\rangle \mid x \in W_y\}$. Вообще говоря, разные гёделевские нумерации $\{W_x \mid x \in N\}$ и разные f_K могут дать разные гиперпростые множества. К. Джокуш и Р. Соар [11] показали, что гиперпростое множество, получаемое с помощью конструкции Поста, в зависимости от выбора $\{W_x \mid x \in N\}$ и функции f_K может быть как T-полным, так и не T-полным. Они также предположили, что, перебирая различные гёделевские нумерации р. п. множеств и взаимно однозначные общерекурсивные функции, перечисляющие креативное множество K, можно с помощью конструкции Поста получить гиперпростое множество любой наперед заданной нерекурсивной р. п. степени. Е. Б. Кинбер [12] доказал, что это не так. Покажем, что этот результат Кинбера можно легко вывести из теоремы 3 и следствия 4.2.

Нетрудно увидеть, что если f — рекурсивная перестановка N, то $\{W_{f(x)} \mid x \in N\}$ является гёделевской нумерацией р. п. множеств и наоборот, каждая гёделевская нумерация имеет такой вид для некоторой рекурсивной перестановки f. Для любой пары i, j с помощью оракула $\varnothing''$ можно определить, является ли φ_i рекурсивной перестановкой N и является ли φ_j взаимно однозначной функцией, область значений которой есть K. Таким образом, существует общерекурсивная относительно $\varnothing''$ функция f такая, что $\{W_{f(x)} \mid x \in N\}$ перечисляет все „гиперпростые множества Поста". Отсюда и из теоремы 3 получаем, что семейство $\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}$ р. п. и содержит „гиперпростое множество Поста"$\}$ рекурсивно. Следствие 4.2 теперь дает, что $\mathfrak{A} \neq \{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}$ р. п. $\& \boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}\}$.

Пусть $\boldsymbol{a}$ — р. п. степень и $\boldsymbol{a}'' = \boldsymbol{0}''$. $\{x \mid \deg(W_x) \leqslant \boldsymbol{a}\} \in \Sigma_3(\boldsymbol{a})$ (см., напр., [13]). Но $\Sigma_3(\boldsymbol{a}) = \Sigma_1(\boldsymbol{a}'') = \Sigma_1(\boldsymbol{0}'')$. Отсюда по теореме 3 семейство $\{\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{b}$ р. п. $\& \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}\}$ рекурсивно. Таким образом, справедливо следующее утверждение [13].

Теорема 5. *Для любой р. п. степени $\boldsymbol{a}$ такой, что $\boldsymbol{a}'' = \boldsymbol{0}''$, семейство р. п. степеней, меньших или равных $\boldsymbol{a}$, равномерно рекурсивно перечислимо, другими словами, существует общерекурсивная функция f такая, что $(\forall x)((\deg(W_x))'' = \boldsymbol{0}'')$ и последовательность $W_{f(0)}, W_{f(1)}, \ldots$ содержит все р. п. степени $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}$.*

Ясно, что такое же утверждение справедливо и для таких семейств $\{\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{b}$ р. п. $\& \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}\}$, где $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}'$.

Используя в доказательстве теоремы 4 метод приоритета с бесконечными нарушениями, в ее формулировке можно дополнительно добиться, чтобы $A' =_T \varnothing''$. Отсюда получаем

Следствие 4.3. *Не существует Σ_3^0 множества S такого, что $\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}$ р. п. $\& \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}''\} = \{\deg(W_x) \mid s \in S\}$ или, иначе, совокупность высоких р. п. множеств не перечислима с оракулом $\varnothing''$.*

Следствие 4.4. *Для любого семейства нерекурсивных р. п. множеств $\mathfrak{A}$, перечислимого с оракулом $\varnothing''$ (т. е. $\mathfrak{A} = \{W_{f(x)} \mid x \in N\}$ для некоторой общерекурсивной относительно $\varnothing''$ функции f) найдется р. п. множество A такое, что $A' =_T \varnothing''$ и $(\forall x)(W_x \in \mathfrak{A} \Rightarrow W_x \overset{\text{не}}{\leqslant}_T A)$.*

Теорема 3 и следствия 4.1, 4.2 были ранее опубликованы автором без доказательства в [8] (теорема о T-рекурсии, из которой все эти утверждения следуют, опубликована с подробным доказательством в [1]). Позднее появилась работа М. Стоба, в которой приводится похожее на следствие 4.1 утверждение (см. теорему 7 из [13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсланов М. М. О некоторых обобщениях теоремы о неподвижной точке.— Изв. вузов. Матем., 1981, № 5, с. 9—16.
2. Шенфилд Дж. Степени неразрешимости.— М., 1977.— 285 с.
3. Арсланов М. М. Слабо рекурсивно перечислимые степени.— IV Всесоюзн. конф. по матем. логике. Тезисы докл. Кишинев, 1976, с. 6.
4. Арсланов М. М. Критерий полноты рекурсивно перечислимых множеств.— II Всесоюзн. конф. по матем. логике. Тезисы докл. М., 1972, с. 8.
5. Соловьев В. Д. Структурные свойства рекурсивно перечислимых множеств и полнота относительно сводимостей.— Автореф. кандид. диссерт., Новосибирск, 1979.
6. Rice H. G. Classes of recursively enumerable sets and their decision problem.— Trans. Amer. Math. Soc., 1953, v. 74, № 1, p. 358—366.
7. Welch L. A hierarchy of families of recursively enumerable degrees and a theorem of founding of minimal pairs.— Ph. Diss. University of Illinois, Urbana, 1980.
8. Арсланов М. М. Иерархия семейств рекурсивно перечислимых степеней.— IV Всесоюзн. конф. по матем. логике. Тезисы докл. Тбилиси, 1982, с. 9.
9. Sacks G. E. On the degrees less than 0′.— Ann. Math., 1963, v. 77, № 2, p. 211—231.
10. Post E. L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems.— Bull. Amer. Math. Soc., 1944, v. 50, № 1, p. 284—316.
11. Jockush C. G., Soare R. I. Post's problem and his hypersimple set.— J. Symbolic Logic, 1973, v. 38, № 3, p. 446—452.
12. Кинбер Е. Б. О тьюринговых степенях гиперпростых множеств.— Латв. матем. ежегодник, 1977, № 21, с. 164—170.
13. Jates C. E. M. On the degrees of index sets, II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 135, № 1, p. 249—266.
14. Stob M. Index sets and degrees of unsolvability.— J. Symbolic Logic, 1982, v. 47, № 2, p. 241—248.

г. Казань

Поступила
19.11.1984

В. П. Важдаев

УДК 517.547

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ СРЕДНИМ МОДУЛЕМ

§ 1. Введение

Обозначим через H_δ $(\delta > 0)$ класс функций $f(z)$, регулярных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta d\theta \leqslant 1, \quad r = |z|. \tag{1}$$

Известно (см., напр., [1], с. 539), что функции класса H_δ допускают представление $f(z) = B(z)F(z)$, где $B(z)$ — так называемая функция Бляшке, содержащая все нули функции $f(z)$, а $F(z)$ не имеет нулей и снова принадлежит тому же классу, т. е. регулярна в единичном круге и удовлетворяет условию (1). Через H_δ^m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, далее обозначим подкласс функций из H_δ, для которых функция Бляшке имеет вид $B(z) = z^m$, а через $H_\delta^m(c_m)$ — совокупность функций из H_δ^m, в разложении которых $f(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \ldots$ коэффициент c_m фиксирован.

При $\delta \to \infty$ эти классы переходят в соответствующие подклассы B^m и $B^m(c_m)$ класса B — функций, ограниченных по модулю единицей.

Для функций класса $H_\delta^m(c_m)$ из известного параметрического представления В. И. Смирнова [2] функций с ограниченным средним модулем получаем представление

$$f(z) = e^{i\mu} z^m \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z, \varphi)\ln p(\varphi)\, d\varphi \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z, \varphi)\, dq(\varphi), \tag{2}$$