Ю. Ф. Коробейник, Об уравнении бесконечного порядка с полиномиальными коэффициентами, *Докл. АН СССР*, 1958, том 122, номер 3, 339–342

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 122, № 3

МАТЕМАТИКА

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

ОБ УРАВНЕНИИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 IV 1958)

До последнего времени дифференциальное уравнение бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \ldots = f(x) \tag{1}$$

изучалось в предположении, что характеристическая функция $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ аналитична в некотором круге с центром в начале координат. В работе [1] впервые был рассмотрен случай быстро растущих коэффициентов, когда характеристическая функция не существует.

Уравнение с полиномиальными коэффициентами

$$P_0(x) y + P_1(x) y' + P_2(x) y'' + \ldots = f(x) \tag{2}$$

исследовалось различными авторами. В последние годы оно изучалось в работах [2-4] при двух обязательных предположениях: а) степени полиномов $P_i = \sum_{k=0}^{p_i} a_i^k x^k$ ограничены одним и тем же числом $p_i \leqslant p$; б) характеристические функции $\omega_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^k x^i$, $k = 0, 1, \ldots, p$, аналитичны в некотором круге с центром в начале координат.

В настоящей заметке устанавливается существование и единственность (в определенном классе аналитических функций) решения уравнения (2) без этих предположений. Кроме того, дается метод приближенного решения уравнения (2) и указывается граница погрешности при замене точного решения приближенным. Метод доказательств основан на теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [5].

§ 1. Определение. Уравнение (2) назовем регулярным, если: 1) $P_0(x) \equiv a_0 \neq 0$; 2) $P_i(x)$ — многочлен степени не выше $i-1$, $i = 1, 2, \ldots$; 3) $f(x)$ — целая функция. Целую функцию $y(x)$ будем считать решением регулярного уравнения в области Q, содержащей начало координат, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) y^{(k)}$ равномерно сходится внутри Q и сумма его равна $f(x)$. Регулярное уравнение можно всегда привести к такому каноническому виду:

$$y + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) y^{(k)} = f(x), \quad P_k(x) = \sum_{s=0}^{k-1} a_k^s x^s. \tag{3}$$

Лемма. *Пусть* $\{A_k^s\}$, $s=0,1,\ldots,k-1$, $k=1,2,\ldots$,*—какая-нибудь последовательность, мажорирующая* $\{a_k^s\}$. *Тогда можно указать последовательность положительных чисел* $A(A_0, A_1, \ldots)$, *которая удовлетворяет условиям*:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{A_k}\sum_{m=1}^{k-1} m!\, Am \sum_{s=0}^{m}\frac{A_{k-m+s}^s}{(m-s)!}<1, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\sum_{m=0}^{k-1} Am}{A_k}<\infty, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{A_k^0}{A_k}<\infty. \tag{4}$$

Уравнение (3) удобно рассматривать в особом подклассе целых функций. Именно, пусть $A(A_0, A_1, \ldots)$ — какая-нибудь последовательность положительных чисел. Обозначим через K_A множество целых функций таких, что $\sum_{k=0}^{\infty}|f^{(k)}(0)|A_k<\infty$.

Теорема 1. *Пусть* $A(A_0, A_1, \ldots)$ *— произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям* (4). *Тогда при любой правой части* $f(x)$ *из* K_A *уравнение* (3) *имеет единственное решение в классе* K_A. *Это решение удовлетворяет уравнению в любой ограниченной области. Если* $y(x)$ *— решение уравнения* (3) *из* K_A, *то*

$$\sum_{k=0}^{\infty}|y^{(k)}(0)|A_k\leqslant D\sum_{k=0}^{\infty}|f^{(k)}(0)|A_k,$$

где D *— константа, которая не зависит от* $f(x)$, $y(x)$.

Для приближенного решения уравнения (3) можно воспользоваться методом «урезания». Именно, обыкновенное уравнение

$$y+P_1(x)y'+P_2(x)y''+\ldots+P_n(x)y^{(n)}=f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{5}$$

имеет одно и только одно полиномиальное решение y_n (степень y_n равна степени f_n).

Теорема 2. *Если числа* $\{A_k\}$ *удовлетворяют условиям* (4), $f(x)\in K_A$ *и* $y(x)$ *— соответствующее решение из* K_A, *то* $y_n(x)\to y(x)$ *равномерно в каждой ограниченной области. Более того, в любой такой области равномерно стремится к нулю выражение* $\sum_{k=0}^{n}A_k|y^{(k)}(x)-y_n^{(k)}(x)|$. *Порядок приближения характеризуется неравенством*

$$\sum_{k=0}^{n}A_k|y^{(k)}(0)-y_n^{(k)}(0)|\leqslant d\sum_{k=n+1}^{\infty}A_k|f^{(k)}(0)|,$$

где d *— константа той же природы, что и* D *(в теореме* 1).

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы* 2 *имеет место представление*

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z_k(x), \tag{6}$$

где $z_n(x)$ *— полиномиальное решение уравнения*

$$y+\sum_{k=1}^{n}P_k(x)y^{(k)}=x^n, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Ряд (6) *равномерно сходится в любой ограниченной области, причем*

$$\sup_{|x|\leqslant R}\left|y(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z_k(x)\right|\leqslant B_R\sum_{k=n+1}^{\infty}A_k|f^{(k)}(0)|.$$

§ 2. Рассмотрим некоторые следствия из теорем 1 — 3.

1. Обозначим через M_ε подкласс целых функций $g(x)$ нулевого рода, удовлетворяющих условию

$$\|g\|_\varepsilon=\sum_{k=0}^{\infty}|g^{(k)}(0)|(k!)^{k\varepsilon}<\infty,\ \varepsilon>0.$$

Теорема 4. *Предположим, что каждый полином $P_m(x)$ имеет мажоранту вида $AR^m e^{cx}$, т. е. $|a_m^s|\leqslant AR^m c^s/s!$ для всех m и s. Тогда при любой правой части $f(x)$ из M_ε существует единственное в M_ε решение уравнения* (3). *При этом*

$$\|y\|_\varepsilon\leqslant D_1\|f\|_\varepsilon,$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k!)^{k\varepsilon}|y^{(k)}(0)-y_n^{(k)}(0)|\leqslant D_2\sum_{k=n+1}^{\infty}(k!)^{k\varepsilon}|f^{(k)}(0)|,$$

где константы D_i не зависят от f и y.

2. Предположим, что все полиномы P_i, начиная с $(p+1)$-го, не выше p-й степени $(p\geqslant 0)$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$y+\sum_{k=1}^{p}y^{(k)}\sum_{s=0}^{k-1}a_k^s x^s+\sum_{k=p+1}^{\infty}y^{(k)}\sum_{s=0}^{p}a_k^s x^s=f(x). \qquad (7)$$

Обозначим через C_μ^β класс целых функций роста не выше

$$\left[\frac{1}{1+\mu};\ (1+\mu)\beta^{-\frac{1}{1+\mu}}\right],\ \mu>0,\ \beta>0.$$

Теорема 5. *Пусть коэффициенты a_m^s уравнения* (7) *удовлетворяют условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n^s|(n!)^{-\mu}}<\beta,\ s=0,\dots,p. \qquad (8)$$

Если $\mu>p$, то: а) *при любой правой части $f(x)$ из класса C_μ^β уравнение* (7) *имеет единственное решение в том же классе*; б) *какого бы ни было $R<\infty$,*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max|y(x)-y_n(x)|}\leqslant q_f<1,$$

причем для функции f порядка ниже $1+\mu$ $q_f=0$.

В связи с теоремой 5 интересно отметить результат Сиккема ([6]), показавшего, что условие (8) необходимо и достаточно для того, чтобы ряд $\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)y^{(k)}$, где $P_k(x)=\sum_{s=0}^{p}a_k^s x^s$ сходился при каждом конечном значении x для любой целой функции из класса C_μ^β. Таким образом, при исследовании уравнения (7) в классе C_μ^β условие (8) оказывается совершенно естественным.

Пункт а) теоремы 5 в частном случае $p=0$, т. е. для уравнения с постоянными коэффициентами, был получен ранее ([1]).

§ 3. В случае, если степени некоторых полиномов P_k превосходят $k-1$, может возникнуть ряд особенностей. Решение уравнения (2) существует, вообще говоря, не при всякой правой части $f(x)$; нарушается и свойство единственности — решение зависит от одной или нескольких произвольных постоянных.

Ограничимся здесь сводкой результатов для уравнения с линейными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + xd_k)\, y^{(k)} = f(x). \tag{9}$$

Без ограничения общности можно считать, что по крайней мере один из коэффициентов a_0, d_0 не равен нулю. Тогда возможны только следующие случаи:

1. $d_0 \neq 0$. Для того чтобы существовало решение уравнения (9), необходимо, чтобы $f(t)$ удовлетворяла некоторому условию (условие накладывается только на $f(0)$). При любой удовлетворяющей этому условию функции $f(t)$ из K_A, где $A(A_0, A_1, \ldots)$ — произвольная последовательность, для которой имеют место свойства (4), существует единственное в K_A решение. На этот случай переносится с небольшими изменениями указанный выше способ приближенного решения и дается оценка погрешности.

2. $d_0 = 0$; тогда $a_0 \neq 0$, и характер уравнения (9) определяется следующей парой коэффициентов. Именно:

2а) Если $d_1 = 0$, то уравнение является регулярным.

2б) $d_1 \neq -a_0/n$, $n = 1, 2, \ldots$; решение существует для любой $f(x) \in K_A$ и единственно в том же классе; все результаты точно такие же, как для регулярного уравнения.

2в) $d_0 = -a_0/p$, p — целое положительное число. В этом случае для существования решения необходимо, чтобы правая часть $f(x)$ удовлетворяла определенному условию (в этом условии участвует только величина $f^{(p)}(0)$). Если для $f(x)$ выполнено это условие и если $f(x) \in K_A$, то решение существует в том же классе и зависит от одной произвольной постоянной.

Разобранные случаи можно объединить таким общим результатом (по-прежнему считается, что $|a_0|^2 + |d_0|^2 > 0$):

Теорема 6. *Пусть $A(A_0, A_1, \ldots)$—произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям* (4).

Для того чтобы уравнение (9) *имело единственное решение в K_A для любой правой части $f(x)$ из K_A, необходимо и достаточно, чтобы уравнение первого порядка*

$$(a_0 + xd_0)\, y + (a_1 + xd_1)\, y' = x^n$$

имело при всех n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, полиномиальное решение точно n-й степени. При выполнении этого условия в качестве приближенного решения можно взять полиномиальное решение y_n уравнения

$$(a_0 + d_0x)\, y + (a_1 + d_1x)\, y' + \ldots + (a_n + d_nx)\, y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

При этом $y_n(x) \to y(x)$ равномерно в любой ограниченной области.

Ростовский-на-Дону
государственный университет

Поступило
20 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Протасов, ДАН, 111, № 6 (1956). [2] А. Ф. Леонтьев, Тр. Горьковск. пед. инст., 3 (1951). [3] М. Г. Хапланов, ДАН, 105, № 6 (1955). [4] А. А. Миролюбов, Матем. сборн., 42 (84), № 1, 65 (1957). [5] F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, 1913. [6] P. C. Sikkema, Proc. Konink1. Nederl. Akad. Wetensh., A 59, № 2, 181 (1956); Indagationes math., 18, № 2, 181 (1956).