Yu. A. Alkhutov, M. D. Surnachev, Interior and boundary continuity of $p(x)$-harmonic functions, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2021, Volume 508, 7–38

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 508, 2021 г.

Ю. А. Алхутов, М. Д. Сурначёв

ВНУТРЕННЯЯ И ГРАНИЧНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ $p(x)$-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

В ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 2$, рассмотрим уравнение

$$Lu = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = 0 \tag{1.1}$$

с измеримым показателем $p(x)$ таким, что

$$1 < p_1 \leqslant p(x) \leqslant p_2 < +\infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in D. \tag{1.2}$$

Для определения решения уравнения (1.1) введём пространство Соболева-Орлича

$$W(D) = \{u \in W^{1,1}(D) \,:\, |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(D)\},$$

снабжённое нормой

$$\|u\|_{W(D)} = \|u\|_{L^{p_1}(D)} + \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(D)},$$

где $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(D)}$ – норма Люксембурга в пространстве $L^{p(\cdot)}(D)$ Лебега-Орлича с переменным показателем:

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(D)} = \inf\{\lambda > 0 \,:\, \int_D \lambda^{-p(x)}|f|^{p(x)}\,dx \leqslant 1\}.$$

Пространство $W(D)$, снабжённое этой нормой, является сепарабельным равномерно выпуклым рефлексивным банаховым пространством. Определим класс $W_0(D)$ как замыкание множества функций из $W(D)$ с компактным носителем в D. В силу неравенства Фридрихса с показателем p_1 и неравенства Гёльдера для пространств Лебега с переменным показателем, верна оценка

$$\|\varphi\|_{L^{p_1}(D)} \leqslant C(n, p_1, p_2, D)\|\nabla\varphi\|_{L^{p(\cdot)}(D)}, \quad \varphi \in W_0^{1,p_1}(D),$$

Ключевые слова: $p(x)$-лапласиан, логарифмическое условие, непрерывность решений, задача Дирихле, регулярность граничной точки.

Работа поддержана РФФИ, проект 19-01-00184.

поэтому норму в $W_0(D)$ можно заменить на эквивалентную норму $\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(D)}$. Обозначим через $H(D)$ замыкание $C^\infty(D) \cap W(D)$ в $W(D)$, а через $H_0(D)$ замыкание $C_0^\infty(D)$ в $W(D)$.

Будем говорить, что функция $u \in W(D)$ ($u \in H(D)$) является W-решением (H-решением) уравнения (1.1) в D, если интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \tag{1.3}$$

выполнено для всех $\varphi \in W_0(D)$ ($\varphi \in C_0^\infty(D)$). Функция $u \in W(D)$ называется W-суперрешением (H-суперрешением) уравнения (1.1) в D, если интегральное неравенство

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \geqslant 0 \tag{1.4}$$

выполнено для всех неотрицательных $\varphi \in W_0(D)$ (неотрицательных $\varphi \in C_0^\infty(D)$). Функция $u \in W(D)$ называется W-субрешением (H-субрешением) уравнения (1.1) в D, если интегральное неравенство

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \leqslant 0 \tag{1.5}$$

выполнено для всех неотрицательных $\varphi \in W_0(D)$ (неотрицательных $\varphi \in C_0^\infty(D)$).

Одним из родоначальников изучения уравнений вида (1.1) является В. В. Жиков. К нему восходят первые результаты о разрешимости и свойствах вариационных задач с нестандартными интегрантами, в частности типа $|\xi|^{p(x)}$ [1, 2]. В связи с эффектом Лаврентьева, обнаруженным в этих работах для интегрантов такого вида, им же были введены используемые понятия W- и H- решений. В работе [3] было введено известное логарифмическое условие, обеспечивающее отсутствие эффекта Лаврентьева. Более подробное описание изложение вопросов, связанных с вариационными задачами с нестандартными условиями коэрцитивности и роста, соответствующими им уравненями и функциональными пространствами, можно найти в обзорной статье В. В. Жикова [4], его монографии [5], а также в [6, 7].

Настоящая работа является продолжением работы [8]. Напомним результаты этой работы.

Через B_r^x будем обозначать открытый шар радиуса r с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Для измеримого множества $F \subset \mathbb{R}^n$ через $|F|$ обозначается n-мерная мера Лебега множества F.

Далее через $\operatorname*{ess\,osc}_{B_r^{x_0}} u$ будем обозначать существенную осцилляцию функции u в шаре $B_r^{x_0}$, $\operatorname*{ess\,sup}_{B_r^{x_0}} u$ и $\operatorname*{ess\,inf}_{B_r^{x_0}} u$ означают существенную верхнюю и нижнюю грани функции u в шаре $B_r^{x_0}$, соответственно. Для измеримого множества $F \subset \mathbb{R}^n$ и функции $g \in L^1(F)$ положим

$$\fint_F g\,dx = \frac{1}{|F|}\int_F g\,dx.$$

Предполагается, что $B_{R_0}^{x_0} \subset D$, где $R_0 \in (0, 1/2)$, и для измеримого множества $E \subset D$ существует $p_0 \in [p_1, p_2]$ такое, что

$$|p(x) - p_0| \leqslant \frac{L}{\ln|x - x_0|^{-1}} \quad \text{для п.в.} \quad x \in B_{R_0}^{x_0} \setminus E. \tag{1.6}$$

На самом множестве E от показателя p требуется лишь выполнение условия (1.2), при этом

$$|B_r^{x_0} \cap E| \leqslant C_E r^{n+2\alpha n}, \quad 0 < r \leqslant R_0, \tag{1.7}$$

где

$$\alpha = (p_2 - p_1)\max(1, 1/(p_1 - 1)). \tag{1.8}$$

Данное условие, например, выполнено, если E — пересечение шара $B_{R_0}^{x_0}$ с воронкой вращения вида $|x' - x_0'| \leqslant const \cdot |x_n - (x_0)_n|^\gamma$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x = (x', x_n)$, $\gamma = 1 + 2\alpha n/(n-1)$.

В теореме 1.1 работы [8] установлено, что при выполнении условий (1.2), (1.6) и (1.7) все ограниченные W- и H-решения уравнения (1.1) непрерывны по Гёльдеру в точке x_0. Если u есть W- или H-решение, такое, что $|u| \leqslant M$ почти всюду в $B_{R_0}^{x_0}$, то справедлива оценка

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B_r^{x_0}} u \leqslant C(r/R_0)^\nu (\operatorname*{ess\,osc}_{B_{R_0}^{x_0}} u + R_0), \quad 0 < r \leqslant R_0, \tag{1.9}$$

в которой положительные постоянные C и ν зависят только от n, p_1, p_2, L, C_E и M.

Напомним, что из результатов [9] следует, что решение будет локально ограниченным, если, например, $p_2 \leqslant np_1/(n-1)$.

При тех же предположениях о показателе p в теореме 1.2 из [8] для неотрицательных ограниченных W- и H-суперрешений доказано неравенство Харнака слабого типа. Пусть u неотрицательное W- и H-

суперрешение уравнения (1.1) в шаре $B^{x_0}_{4R}$, где $0 < R \leqslant R_0/4$, и $u \leqslant M$ почти всюду в $B^{x_0}_{4R}$. Тогда

$$\Big(\fint_{B^{x_0}_{2R}} (u+R)^q\,dx\Big)^{1/q} \leqslant C \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_R}(u+R), \tag{1.10}$$

где $0 < q < n(p_0-1)/(n-1)$ и положительная постоянная C зависит только от n, p_1, p_2, L, C_E и M.

В теореме 1.3 цитируемой работы [8] для неотрицательных ограниченных W- и H-решений доказано неравенство Харнака. Пусть u неотрицательное W- или H- решение уравнения (1.1) в шаре $B^{x_0}_{4R} \subset D$, где $0 < R \leqslant R_0/4$, и $u \leqslant M$ почти всюду в $B^{x_0}_{4R}$. Тогда

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_R} u \leqslant C \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_R}(u+R), \tag{1.11}$$

где положительная постоянная C зависит только от n, p_1, p_2, L, C_E, M.

Отметим, что для неравенства Харнака слабого типа (1.10) и для неравенства Харнака (1.11) условие (1.7) на самом деле используется только для $r = 4R$, а условие (1.6) может быть заменено на $\operatorname*{ess\,osc}_{B^{x_0}_{4R}\setminus E} p \leqslant L(\ln R^{-1})^{-1}$. Об этом пойдёт речь во втором разделе.

В настоящей работе мы получаем внутреннюю непрерывность решения при более общем условии, чем (1.6)–(1.8), а также приводим достаточные условия регулярности граничной точки при выполнении условия (1.6)–(1.8) и некоторого его обобщения.

Для функции f через $f_+ = \max(f,0)$ и $f_- = \max(-f,0)$ обозначаем положительную и отрицательные части функции f, соответственно. Через S^x_r обозначаем границу шара B^x_r (т.е. сферу радиуса r с центром в точке x), а через $\overline{B}^x_r$ замыкание этого шара.

Далее мы будем писать просто “решения уравнения (1.1)” , подразумевая W- или H-решения этого уравнения, и аналогично для суб- и суперрешений.

На протяжении всей работы показатель p измерим и считается выполненным условие (1.2), далее ссылаться на него не будем. Показатель α определён формулой (1.8).

Работа устроена следующим образом. Во втором разделе мы приводим уточнение некоторых результатов работы [8]. В третьем разделе, используя эти уточнения, мы получаем новое достаточное условие непрерывности решений во внутренней точке. Четвёртый раздел работы посвящён построению обобщенного решения задачи Дирихле, а в пятом разделе мы вводим понятие ёмкости. В шестом разделе мы описываем неравенства на границе в вариационном смысле. В заключительных трёх разделах мы получаем различные достаточные условия регулярности граничной точки.

§2. Уточнение предыдущих результатов.

Здесь мы приводим уточнение результатов работы [8]. Далее в этом разделе $B^{x_0}_{4R} \subset D$, $R \leqslant 1/4$, измеримое множество $E \subset D$,

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B^{x_0}_{4R}\setminus E} p \leqslant \frac{L}{\ln \frac{1}{R}}, \tag{2.1}$$

а также предполагается, что

$$|E \cap B^{x_0}_{4R}| \leqslant C_E R^{n+2\alpha n}. \tag{2.2}$$

Обозначим

$$s = \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{4R}\setminus E} p \quad \text{и пусть} \quad s \leqslant p_0 \leqslant s + \frac{L}{\ln \frac{1}{R}}.$$

Сформулируем две теоремы, уточняющие результаты работы [8].

Теорема 2.1 (Теорема 1.2 из [8])**.** *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* (2.2)*. Тогда для любого ограниченного неотрицательного W- или H-суперрешения уравнения* (1.1) *в шаре $B^{x_0}_{4R}$, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant u \leqslant M$, выполняется оценка*

$$\left(\fint_{B^{x_0}_{3R}} (u+R)^q \, dx \right)^{1/q} \leqslant C \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{R}} (u+R), \tag{2.3}$$

где $0 < q < n(p_0-1)/(n-1)$, а положительная постоянная C зависит только от n, p_1, p_2, L, C_E, M.

Теорема 2.2 (Теорема 1.3 из [8])**.** *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* (2.2)*. Тогда для любого ограниченного неотрицательного W- или H-решения уравнения* (1.1) *в шаре $B^{x_0}_{4R}$, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant u \leqslant M$, выполняется оценка* (1.11)*, где положительная постоянная C зависит только от n, p_1, p_2, L, C_E, M.*

Сформулируем ряд утверждений из работы [8], в которых вместо условий (1.6), (1.7) мы будем пользоваться условиями (2.1), (2.2), соответственно. Их доказательства повторяют доказательства из процитированной работы, поэтому не приводятся.

Следующая лемма основана на методе итераций Мозера.

Лемма 2.1 (лемма 2.1 из [8])**.** *Пусть для ограниченной неотрицательной функции* $v \in W^{1,1}(B_{4R}^{x_0})$ *и* $s > 1$ *неравенство*

$$\int\limits_{B_{4R}^{x_0}} R|\nabla v| v^{\beta+s-2}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \widetilde{C} \int\limits_{B_{4R}^{x_0}\setminus E} v^{\beta+s-1}((R|\nabla\eta|)^{p_2}+\eta^{p_2})\,dx$$
$$+\widetilde{C}R^{-\alpha} \int\limits_{B_{4R}^{x_0}\cap E} v^{\beta+s-1}((R|\nabla\eta|)^{p_2}+\eta^{p_2})\,dx,$$

выполняется для всех $\beta \geqslant 1$, $\eta \in C_0^\infty(B_{4R}^{x_0})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, *и выполнено условие* (2.2)*. Тогда для любых* $q > 0$ *и* $1/4 \leqslant \tau < t \leqslant 4$ *справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{\tau R}^{x_0}} v \leqslant C(t-\tau)^{-2p_2 n/q} \Bigg(\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} v^q\,dx \Bigg)^{1/q},$$

где $C = C(n, p_2, q, \widetilde{C}, C_E)$.

В приводимых ниже леммах 2.2–2.6 полагаются выполненными условия (2.1) и (2.2), а функция u есть неотрицательное ограниченное субрешение уравнения (1.1) (в лемме 2.2) или суперрешение уравнения (1.1) (в леммах 2.3–2.6), удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant u \leqslant M$. Положительные постоянные C в леммах 2.4 и 2.5 зависят только от n, p_1, p_2, C_E, L, M, а в леммах 2.2, 2.3 и 2.6 дополнительно ещё и от q.

Доказательство следующих двух лемм основано на лемме 2.1 и подходящем выборе пробных функций в интегральных неравенствах (1.5) и (1.4), соответственно.

Лемма 2.2 (Лемма 2.2 из [8])**.** *Для любых* $q > 0$ *и* $1/4 \leqslant \tau < t \leqslant 4$ *выполняется оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{\tau R}^{x_0}} (u+R) \leqslant C(t-\tau)^{-2p_2 n/q} \Bigg(\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^q\,dx \Bigg)^{1/q}.$$

Лемма 2.3 (Лемма 3.1 из [8])**.** *Для функции*

$$v = \left(\ln \frac{\mu}{u+R}\right)_+, \qquad R \leqslant \mu \leqslant 2M + 2R,$$

и любых $q > 0$ и $1/4 \leqslant \tau < t \leqslant 4$ справедливо неравенство

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_{\tau R}} v \leqslant C(t-\tau)^{-2p_2 n/q} \left(1 + \fint_{B^{x_0}_{tR}} v^q \, dx\right)^{1/q}. \tag{2.4}$$

Для оценки интеграла в правой части (2.4) используется следующее утверждение.

Лемма 2.4 (Лемма 3.2 из [8])**.** *Для всех $1/4 < t < 4$ справедливо неравенство*

$$\fint_{B^{x_0}_{tR}} R|\nabla \ln(u+R)| \, dx \leqslant C(4-t)^{-p_2}. \tag{2.5}$$

Доказательство теоремы 2.1 сводится к двум леммы. Первая лемма является следствием приведённых выше лемм 2.3 и 2.4.

Лемма 2.5 (Лемма 5.1 из [8])**.** *Для всех $1/4 \leqslant \tau < t \leqslant 7/2$ справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{\tau R}} (u+R) \geqslant \exp\left(-C(t-\tau)^{-2p_2 n} + \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln(u+R) \, dx\right).$$

Вторая лемма более трудоёмкая, идея её доказательства восходит к работе [10].

Лемма 2.6 (Лемма 5.2 из [8])**.** *Для любых $1/4 \leqslant \tau < t \leqslant 7/2$ и всех $0 < q < n(p_0-1)/(n-1)$ имеет место оценка*

$$\left(\fint_{B^{x_0}_{\tau R}} (u+R)^q \, dx\right)^{1/q} \leqslant \exp\left(C(t-\tau)^{-3p_2 n} + \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln(u+R) \, dx\right).$$

Для доказательства теоремы 2.1 нужно совместить оценку леммы (2.5) с параметрами $\tau = 1$, $t = 7/2$, и оценку леммы (2.6) с параметрами $\tau = 3$ и $t = 7/2$. Доказательства теоремы 2.2 получается совмещением оценки теоремы 2.1 с параметром $q = n(p_1-1)/(2n-2)$ с оценкой леммы 2.2.

§3. Непрерывность решения во внутренних точках

В этом разделе мы получим обобщение результатов работы [8] на случай более сложно устроенного показателя $p(\cdot)$. Условие (1.7) мы заменим на более слабое условие. Пусть $B^{x_0}_{R_0} \subset D$, а измеримое множество $E \subset D$. Далее в этом разделе u – решение уравнения (1.1) в D, ограниченное по модулю постоянной M.

Положим

$$M_r = \operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_r} u, \quad m_r = \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_r} u, \quad \omega(r) = M_r - m_r. \tag{3.1}$$

Сформулируем и докажем лемму об уменьшении осцилляции. Напомним, что $S^{x_0}_r$ обозначает сферу радиуса r с центром в точке x_0, $S^{x_0}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$.

Лемма 3.1. *Предположим, что для некоторых чисел $R, \varkappa > 0$, $\xi > \xi' > 1$, таких, что $\xi R \leqslant R_0$, $4\varkappa < \min(\xi' - 1, \xi - \xi')$, найдётся конечная последовательность точек $y_i \in S^{x_0}_{\xi' R}$, где $i = 1, \dots m$, которая удовлетворяет условиям*

$$|B^{y_i}_{4\varkappa R} \cap E| \leqslant C_E(\varkappa R)^{n+2\alpha n}, \tag{3.2}$$

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B^{y_i}_{4\varkappa R} \setminus E} p \leqslant \frac{L}{\ln(\varkappa R)^{-1}}, \tag{3.3}$$

$$S^{x_0}_{\xi' R} \subset \widetilde{Q}_R := \bigcup_{i=1}^{m} B^{y_i}_{\varkappa R}. \tag{3.4}$$

Тогда

$$\omega(\xi' R) \leqslant \gamma \omega(\xi R) + 2\varkappa R, \tag{3.5}$$

где постоянная $\gamma \in [1/2, 1)$ зависит только от n, p_1, p_2, L, C_E, M, m.

Доказательство. В силу теоремы 2.2 имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{y_i}_{\varkappa R}} u \leqslant C \operatorname*{ess\,inf}_{B^{y_i}_{\varkappa R}} (u + \varkappa R), \quad i = 1, \dots, m,$$

где положительная постоянная C зависит лишь от n, p_1, p_2, C_E, L, M. В силу (3.4) имеем

$$\widetilde{M}_R := \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{Q}_R} u \leqslant C \operatorname*{ess\,inf}_{\widetilde{Q}_R} (u + \varkappa R) := C\widetilde{m}_R + C\varkappa R, \tag{3.6}$$

где положительная константа C зависит лишь от n, p_1, p_2, C_E, L, M, m. Нетрудно видеть, что

$$(u-\widetilde{m}_R)_-, (u-\widetilde{M}_R)_+ \in W_0(B^{x_0}_{\xi' R})\ (H_0(B^{x_0}_{\xi' R})).$$

По принципу максимума,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_{\xi' R}} u \leqslant \widetilde{M}_R, \quad \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{\xi' R}} u \geqslant \widetilde{m}_R,$$

откуда

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_{\xi' R}} u \leqslant C \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{\xi' R}} (u+\varkappa R) \tag{3.7}$$

с той же самой постоянной C, что и в (3.6).

Применяя оценку (3.7) к функциям $M_{\xi R}-u$ и $u-m_{\xi R}$, получим

$$M_{\xi R}-m_{\xi' R} \leqslant C(M_{\xi R}-M_{\xi' R}+\varkappa R),\ M_{\xi' R}-m_{\xi R} \leqslant C(m_{\xi' R}-m_{\xi R}+\varkappa R).$$

Не ограничивая в общности, считаем, что $C \geqslant 3$. Складывая эти неравенства, получаем

$$M_{\xi' R}-m_{\xi' R} \leqslant \gamma(M_{\xi R}-m_{\xi R})+(\gamma+1)\varkappa R, \quad \gamma=\frac{C-1}{C+1}, \tag{3.8}$$

что влечёт оценку (3.5). □

Итерацией этой оценки получаем следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и найдутся ограниченные последовательности положительных чисел R_j, ξ_j, ξ'_j, $\varkappa_j$, такие, что $R_j \to 0$ при $j \to \infty$, $\xi_1 R_1 \leqslant R_0$, $\xi_j R_j \leqslant \xi'_{j-1} R_{j-1}$, $\xi'_j \in (1, \xi_j)$, $4\varkappa_j < \min(\xi'_j - 1, \xi_j - \xi'_j)$, и для любого $j \in \mathbb{N}$ найдётся множество точек $y_{i,j} \in S^{x_0}_{\xi'_j R_j}$, $i=1,\dots,m$, которая удовлетворяет* (3.2)–(3.4), *где $R=R_j$, $y_i=y_{i,j}$, $\xi=\xi_j$, $\xi'=\xi'_j$, $\varkappa=\varkappa_j$. Тогда любое ограниченное решение уравнения* (1.1) *непрерывно в точке x_0.*

Доказательство. Положим $\varkappa' = \sup \varkappa_j$. Пусть $j>k$. Последовательно применяя лемму 3.1, будем иметь

$$\omega(\xi_j R_j) \leqslant \gamma^{j-k}\omega(\xi_k R_k)+2\sum_{l=k}^{j-1}\gamma^{j-l-1}\varkappa' R_l \leqslant \gamma^{j-k}\omega(\xi_k R_k)+\frac{2\varkappa'}{1-\gamma}R_k,$$

где под знаком суммы мы воспользовались тем, что $R_l \leqslant R_k$. Выбирая вначале k, а затем $j>k$, правую часть последнего неравенства можно сделать сколь угодно малой. Так как $\xi_j R_j \to 0$ при $j \to \infty$, отсюда следует, что $\omega(r) \to 0$ при $r \to 0$. □

Рассмотрим частный случай, когда в концентрических слоях с радиусами, убывающими по геометрической прогрессии, в “нечётных” слоях показатель постоянен за исключением множества достаточно малой меры, а в “чётных” слоях от показателя ничего дополнительно не требуется.

Следствие 3.1. *Пусть $\xi > 1$ и найдётся измеримое множество E такое, что для $R_j = \xi^{-j} R_0$, $j \in \mathbb{N}$, выполняется $|(B^{x_0}_{R_{2j-1}} \setminus \overline{B}^{x_0}_{R_{2j}}) \cap E| \leqslant C_E R_j^{n+2\alpha n}$ и показатель p постоянен на $(B^{x_0}_{R_{2j-1}} \setminus \overline{B}^{x_0}_{R_{2j}}) \setminus E$. Тогда любое решение уравнения* (1.1)*, ограниченное по модулю постоянной M, непрерывно по Гёльдеру в точке x_0, с константой и показателем Гёльдера, зависящими только от n, p_1, p_2, M, C_E, ξ.*

§4. Регулярность граничной точки

Напомним понятие обобщенного решения задачи Дирихле. Пусть дана непрерывная функция $f \in C(\partial D)$. Поставим задачу

$$Lu_f = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u = f \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{4.1}$$

решение которой строится следующим образом. Продолжим функцию f по непрерывности на всё пространство, пользуясь теоремой Титце-Урысона, и пусть $f_k \in C^\infty(\overline{D})$ – последовательность функций, равномерно сходящаяся к f в $\overline{D}$. Построим решения u_k задач Дирихле

$$Lu_k = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u \in W(D), \quad u - f_k \in W_0(D) \tag{4.2}$$

и

$$Lu_k = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u \in H(D), \quad u - f_k \in H_0(D). \tag{4.3}$$

Такие решения можно, например, построить как

$$u_k = f_k + w_k, \quad w_k = \operatorname{argmin} \int\limits_D \frac{|\nabla(w + f_k)|^{p(x)}}{p(x)}\,dx,$$

где для задачи (4.2) минимизант берётся по множеству $W_0(D)$, а для задачи (4.3) по множеству $H_0(D)$. Последовательность u_k сходится равномерно в области D к функции u_f, ограниченной максимумом модуля f, которая в любой подобласти $D' \Subset D$ будет W-решением (соответственно, H-решением) уравнения (1.1) (см. §4 работы [12]). Предельная функция u_f определена однозначно, не зависит от способа продолжения функции f, выбора её гладких приближений, и называется обобщенным W-решением (H-решением) задачи Дирихле (4.1). За подробностями мы отсылаем читателя к нашим работам [12] и [13]. Отметим, что указанный способ построния обобщенного решения задачи Дирихле отличается от более известного метода Пуанкаре-Перрона.

В дальнейнем будем называть функцию u_f просто решением задачи Дирихле (4.1), понимая под этим обобщенное W- или H-решение этой задачи.

Отметим, что в случае гладкой граничной функции f в задаче (4.1) решение u_f этой задачи совпадает с решением задач (4.2) (соотв. (4.3)), в которых $f_k = f$, и это решение принадлежит $W(D)$ (соотв. $H(D)$).

Определение 4.1. Граничная точка $x_0 \in \partial D$ называется регулярной, если

$$\operatorname*{ess\,lim}_{D \ni x \to x_0} u_f(x) = f(x_0)$$

для любой непрерывной на ∂D функции f.

Регулярность в определении 4.1 понимается в смысле обобщенных W- или H-решений задачи Дирихле. Далее нам понадобится понятие W- и H-ёмкости (см. [13]).

§5. Ёмкость и её оценки

Для области Ω и множества $E \subset \overline{\Omega}$ класс $W_0(\Omega, E)$ $(H_0(\Omega, E))$ определяется как множество функций из $W(\Omega)$ $(H(\Omega))$, таких, что существует последовательность функций $u_j \in W(\Omega)$ (соответственно, $u_j \in C^\infty(\Omega) \cap W(\Omega)$), равных нулю в окрестности $\overline{E} \cap \overline{\Omega}$ и сходящихся к u в $W(\Omega)$. В частности, $W_0(\Omega, \partial\Omega) = W_0(\Omega)$ $(H_0(\Omega, \partial\Omega) = H_0(\Omega))$. По определению, $W_0(\Omega, E) = W_0(\Omega, \overline{E})$ $(H_0(\Omega, E) = H_0(\Omega, \overline{E}))$. Положим $u_+ = \max\{u, 0\}$, $u_- = \max\{-u, 0\}$. Для компакта $K \subset \Omega$ введём классы

$$\mathcal{E}_W(K, \Omega) = \{u \in W_0(\Omega) \, : \, (u-1)_- \in W_0(\Omega, K)\} \, ,$$
$$\mathcal{E}_H(K, \Omega) = \{u \in H_0(\Omega) \, : \, (u-1)_- \in H_0(\Omega, K)\} \, .$$

Таким образом, $\mathcal{E}_W(K, \Omega)$ $(\mathcal{E}_H(K, \Omega))$ – это множество функций из $W(\Omega)$ $(H(\Omega))$, равных нулю на границе Ω и больших либо равных единице на K в смысле следа, определяемого соответственно для функций из $W(\Omega)$ или $H(\Omega)$.

W-ёмкостью (H-ёмкостью) компакта $K \subset B_R^{x_0}$ относительно шара $B_R^{x_0}$ назовём число

$$C_p(K, B_R^{x_0}) = \inf \int\limits_{B_R^{x_0}} |\nabla\varphi|^{p(x)}\, dx,$$

где точная нижняя грань берется по $\varphi \in \mathcal{E}_W(K, B_r^{x_0})$ ($\varphi \in \mathcal{E}_H(K, B_r^{x_0})$). Далее будем говорить просто "ёмкость", подразумевая, что в случае H-решений используется H-ёмкость, а в случае W-решений используется W-ёмкость.

Нам понадобится модифицированная ёмкость. Для компакта $K \subset B_R^{x_0}$ и измеримого множества $E \subset B_r^{x_0}$ обозначим

$$\widetilde{C}_p(K, E, B_R^{x_0}) = \inf \int\limits_{B_R^{x_0} \setminus E} |\nabla\varphi|^{p(x)}\, dx, \tag{5.1}$$

где точная нижняя грань берется по $\varphi \in \mathcal{E}_W(K, B_R^{x_0})$ ($\varphi \in \mathcal{E}_H(K, B_R^{x_0})$). В случае W-решений используется точная нижняя грань по классу $\varphi \in \mathcal{E}_W(K, B_R^{x_0})$, а в случае H-решений используется точная нижняя грань по классу $\varphi \in \mathcal{E}_H(K, B_R^{x_0})$.

Для точки $x_0 \in \partial D$, $t \in (0,1)$ и $p_0 \in [p_1, p_2]$ обозначим

$$\widetilde{\gamma}_{p_0}(t) = \left(\widetilde{C}_p\left(\overline{B}_t^{x_0} \setminus D, E, B_{2t}^{x_0}\right) t^{p_0 - n}\right)^{1/(p_0-1)}, \tag{5.2}$$

гдё в определении модифицированной ёмкости (5.1) показатель p продолжен константой p_0 вне D.

Очевидно, что $\widetilde{C}_p(K, E, B_R^{x_0}) \leqslant C_p(K, B_R^{x_0})$ для любого E. Модифицированная "ёмкость" $\widetilde{C}_p(K, E, B_R^{x_0})$ является грубой характеристикой, например, если $K \subset B_{R/2}^{x_0}$, а множество E представляет собой сколь угодно тонкий концентрический слой, лежащий в $B_R^{x_0} \setminus B_{R/2}^{x_0}$, то $\widetilde{C}_p(K, E, B_R^{x_0}) = 0$.

В следующей простой оценке полагается

$$V = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \in (0, R_0),\ x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ |x'| < g(x_n)\}, \tag{5.3}$$

$$x_0 + V = \{x \in \mathbb{R}^n : x - x_0 \in V\}, \tag{5.4}$$

где функция $t^{-1}g(t)$ неубывающая. В частности, если функция f постоянная, то $x_0 + V$ – часть конуса с вершиной в точке x_0. Будем считать, не ограничивая общность, что $g(t) \leqslant Ct$ для некоторого $C > 0$.

Лемма 5.1. *Если дополнение к области D содержит воронку вращения $x_0 + V$, то*

$$\widetilde{\gamma}_{p_0}(R) \geqslant c(n, p_0) \left(\frac{g(R)}{R}\right)^{\frac{n-1}{p_0-1}}, \quad R \leqslant R_0/2.$$

Доказательство. Пусть $\omega = S_1^0 \cap \{|x'| < x_n g(R)/R\}$, а φ – функция из класса, по которому берётся инфимум в определении ёмкости. На почти любом отрезке вида $I_\xi = \{x_0 + t\xi,\ 0 < t < 2R\}$, $\xi \in \omega$, функция $\varphi \in W(B_{2R}^{x_0})$ или $\varphi \in H(B_{2R}^{x_0})$ принадлежит пространству $W^{1,p_0}(I_\xi)$, так как в дополнении области показатель полагается равным p_0. Отсюда, в полярных координатах с центром в точке x_0, функция $\widetilde{\varphi}_\xi(t) = \varphi(x_0 + t\xi)$ принадлежит весовому пространству $W^{1,p_0}((R, 2R), t^{n-1})$. Так как $\widetilde{\varphi}_\xi(R) = 1$ и $\widetilde{\varphi}_\xi(2R) = 0$ для каждого такого отрезка I_ξ, то

$$1 \leqslant \left(\int_R^{2R} |\widetilde{\varphi}'_\xi(t)|\,dt\right)^{p_0} \leqslant \int_R^{2R} |\widetilde{\varphi}'_\xi(t)|^{p_0} t^{n-1}\,dt \cdot \left(\int_R^{2R} t^{(1-n)/(p_0-1)}\,dt\right)^{p_0-1}$$
$$= c(p_0, n) R^{p_0-n} \int_R^{2R} |\widetilde{\varphi}'_\xi(t)|^{p_0} t^{n-1}\,dt,$$

где $c(p_0, n) > 0$. Следовательно,

$$\int_R^{2R} |\widetilde{\varphi}'_\xi(t)|^{p_0} t^{n-1}\,dt \geqslant c(p_0, n) R^{n-p_0}.$$

Интегрируя это неравенство по $\xi \in \omega$, и используя $p(x) = p_0$ для $x \in B_{2R}^{x_0} \setminus D$, приходим к оценке

$$\int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla\varphi|^{p(x)}\,dx \geqslant C(n, p_0)|\omega|_{n-1} R^{n-p_0},$$

из которой в силу равенства $|\omega|_{n-1} = c(n)(g(R)/R)^{n-1}$ следует искомое утверждение. □

В частности, если область удовлетворяет условию внешнего конуса в точке x_0, то $\widetilde{\gamma}_{p_0}(t) \geqslant \mathrm{const} > 0$ для достаточно малых t.

Если доступна дополнительная информация о расположении множества E, то оценка леммы 5.1 может быть улучшена. Следующее утверждение, в котором также используются обозначения (5.3), повторяет оценку, которая использовалась для доказательства теоремы 1.4 в работе [11]. В ней мы налагаем на функцию g дополнительное условие

$$g(r) \geqslant Cr^{\beta} \quad \text{если} \quad p_0 < n, \quad g(r) \geqslant C\exp(-\gamma/r) \quad \text{если} \quad p_0 = n, \tag{5.5}$$

с постоянными $C > 0$, $\beta \geqslant 1$, $\gamma > 0$.

В следующей лемме обозначаем $E - x_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x+x_0 \in E\}$ и $\{x_n < 0\} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$.

Лемма 5.2. *Если дополнение к области D содержит воронку вращения $x_0 + V$, множество $E - x_0 \subset \{x_n < 0\}$, показатель p удовлетворяет условию* (1.6)*, а функция g удовлетворяет* (5.5)*, то*

$$\widetilde{\gamma}_{p_0}(R) \geqslant C(n, p_0, p_1, p_2, L) \cdot \begin{cases} \left(\frac{g(R/8)}{R}\right)^{\frac{n-1-p_0}{p_0-1}}, & 1 < p_0 < n-1, \\ \left(\ln \frac{2R}{g(R/8)}\right)^{-1}, & p_0 = n-1, \\ 1, & n-1 < p_0. \end{cases}$$

Доказательство этого утверждения повторяет часть доказательствы теоремы 1.4 в работе [11], см. также предложение 5.2 той же работы.

§6. Неравенства на границе

В этом разделе приводится ряд вспомогательных утверждений. Напомним вначале, что для функции $u \in W(\Omega)$ ($u \in H(\Omega)$) справедливо $\min(u, m) \in W(\Omega)$ ($\min(u, m) \in H(\Omega)$). Если $u \in W_0(\Omega)$ ($u \in H_0(\Omega)$) и $m \geqslant 0$, то $\min(u, m) \in W_0(\Omega)$ ($H_0(\Omega)$).

Будем считать, что показатель p продолжен в $B^{x_0}_{4R}$ так, что продолжение является измеримой функцией, удовлетворяющей неравенствам $p_1 \leqslant p(x) \leqslant p_2$ почти всюду в $B^{x_0}_{4R}$.

Пусть u – решение задачи (4.1) с гладкой в $\overline{D}$ граничной функцией f. Положим

$$m = \inf_{\partial D \cap B^{x_0}_{4R}} f, \tag{6.1}$$

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} \min\left(u(x), m\right) & \text{для} \quad x \in D \cap B^{x_0}_{4R}, \\ m & \text{для} \quad x \in B^{x_0}_{4R} \setminus D. \end{cases} \tag{6.2}$$

Лемма 6.1. *Справедливо соотношение* $(u-m)_- \in W_0(D\cap B^{x_0}_{4R}, \partial D\cap B^{x_0}_{4R})$ $((u-m)_- \in H_0(D\cap B^{x_0}_{4R}, \partial D\cap B^{x_0}_{4R}))$.

Доказательство. По построению, $(u-f)_- \in W_0(D)$ $((u-f)_- \in H_0(D))$. В силу гладкости f из неравенства $f\geqslant m$ на $\partial D\cap B^{x_0}_{4R}$ следует, что $(f-m)_- \in W_0(D\cap B^{x_0}_{4R}, \partial D\cap B^{x_0}_{4R})$ $((f-m)_- \in H_0(D\cap B^{x_0}_{4R}, \partial D\cap B^{x_0}_{4R}))$. Для этого достаточно рассмотреть последовательность функций $(f-m+\varepsilon)_-$, которые равны нулю в окрестности $\partial D\cap B^{x_0}_{4R}$ и сходятся к $(f-m)_-$ в $W(D\cap B^{x_0}_{4R})$ $(H(D\cap B^{x_0}_{4R}))$ при $\varepsilon\to 0$. Нетрудно показать, что, если последовательности φ_j и ψ_j функций, обращающихся в нуль в окрестности $\partial D\cap B^{x_0}_{4R}$, сходятся в $W(D\cap B^{x_0}_{4R})$ $(H(D\cap B^{x_0}_{4R}))$ к $(u-f)_-$ и $(f-m)_-$, соответственно, то функции $\min(\varphi_j+\psi_j, (u-m)_-)$ равны нулю в окрестности $\partial D\cap B^{x_0}_{4R}$ и сходятся в $W(D\cap B^{x_0}_{4R})$ $(H(D\cap B^{x_0}_{4R}))$ к $(u-m)_-$. Подробности см. в [12, 13]. □

Лемма 6.2. *Справедливо соотношение* $\widetilde{u}\in W(B^{x_0}_{4R})$ $(\widetilde{u}\in H(B^{x_0}_{4R}))$.

Доказательство. В силу леммы 6.1 найдётся последовательность φ_j, сходящаяся к $(u-m)_-$ в $W(D\cap B^{x_0}_{4R})$ (соотв. в $C^\infty(D\cap B^{x_0}_{4R})\cap W(D\cap B^{x_0}_{4R})$) и равная нулю в окрестности замыкания $\partial D\cap B^{x_0}_{4R}$. Продолжим функции φ_j нулём в $B^{x_0}_{4R}\setminus D$, тогда $\varphi_j\in W(B^{x_0}_{4R})$ $(\varphi_j\in H(B^{x_0}_{4R}))$. Для случая пространства W это следует из локальности определения пространства Соболева $W^{1,1}(B^{x_0}_{4R})$ и определения пространства W. Для случая пространства H это следует из принадлежности получившейся функции пространству $C^\infty(B^{x_0}_{4R})$. В силу представления $\min(u,m)=m-(u-m)_-$, последовательность функций $m-\varphi_j$ будет сходиться к $\widetilde{u}$ по норме пространства $W(B^{x_0}_{4R})$, откуда и следует утверждение леммы. □

Лемма 6.3 (напр. [12])**.** *Функция* $\widetilde{u}$ *является суперрешением* (1.1) *в* $B^{x_0}_{4R}$, *то есть для любой неотрицательной функции* $\varphi\in W_0(B^{x_0}_{4R})$ $(\varphi\in H_0(B^{x_0}_{4R}))$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{B^{x_0}_{4R}} |\nabla\widetilde{u}|^{p(x)-2}\nabla\widetilde{u}\cdot\nabla\varphi\,dx\geqslant 0. \tag{6.3}$$

Нам также понадобится следующее простое утверждение (напр. [11, 12]), близкое лемме 6.2.

Лемма 6.4. *Пусть для всех*

$$r\in(0,R_0)\ \textit{или}\ \ |B^{x_0}_r\setminus D|>0,\ \ \textit{или}\ \ C_p(\overline{B}^{x_0}_r\setminus D, E, B^{x_0}_{2r})>0.$$

Если существует предел $c = \operatorname*{ess\,lim}_{D \ni x \to x_0} u(x)$, *то* $c = f(x_0)$.

Доказательство. Если это не так, то для некоторых r, $\varepsilon > 0$ будем иметь $|u - f| > \varepsilon$ почти всюду в $D \cap B_r^{x_0}$. Рассмотрим функцию $v = \min(|u - f|\varepsilon^{-1}, 1)$, продолженную нулём вне D. По построению, эта функция принадлежит $W_0(D)$ $(H_0(D))$, равна единице почти всюду в $D \cap B_r^{x_0}$ и нулю всюду в $B_r^{x_0} \setminus D$. Покажем, что $v \in W(B_r^{x_0})$ $(v \in H(B_r^{x_0}))$. По определению класса $W_0(D)$ $(H_0(D))$, найдётся последовательность функций $v_j \in W(D)$ с компактным в D носителем (соответственно, $v_j \in C_0^\infty(D)$), сходящаяся к функции v в норме $W(D)$. Продолжим функции v_j нулём вне D. Тогда функции $v_j \in W(B_r^{x_0})$ $(H(B_r^{x_0}))$ и последовательность v_j является фундаментальной в норме $W(B_r^{x_0})$ $(H(B_r^{x_0}))$. Отсюда получаем, что $v \in W(B_r^{x_0})$ $(v \in H(B_r^{x_0}))$, причём $\nabla v = 0$ почти всюду в $B_r^{x_0} \setminus D$. Так как по построению $v = 1$ в $B_r^{x_0} \cap D$, то $\nabla v = 0$ почти всюду в $B_r^{x_0} \cap D$, и в итоге $\nabla v = 0$ почти всюду в $B_r^{x_0}$. По неравенству Пуанкаре, имеем

$$|B_r^{x_0} \setminus D| = \int\limits_{B_r^{x_0}} (1 - v)\, dx \leqslant \frac{C(n) r^{n+1}}{|D \cap B_r^{x_0}|} \int\limits_{D \cap B_r^{x_0}} |\nabla(1 - v)|\, dx = 0,$$

что противоречит первому условию леммы.

Пусть выполнено второе условие леммы. Для функции $\varphi \in C_0^\infty(B_r^{x_0})$, такой, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi = 1$ в $B_{3r/4}^{x_0}$, функция $w = (1 - v)\varphi$ является допустимой в определении ёмкости компакта $\overline{B}_{r/2}^{x_0} \setminus D$ относительно шара $B_r^{x_0}$. Очевидно, что $\nabla w = (1 - v)\nabla\varphi$ почти всюду в $B_r^{x_0}$. Используя полученное выше соотношние $|B_r^{x_0} \setminus D| = 0$, получим

$$\begin{aligned} C_p(\overline{B}_{r/2}^{x_0} \setminus D, B_r^{x_0}) &\leqslant \int\limits_{B_r^{x_0}} |\nabla w|^{p(x)}\, dx \\ &= \int\limits_{B_r^{x_0}} |(1 - v)\nabla\varphi|^{p(x)}\, dx = \int\limits_{B_r^{x_0} \setminus D} |\nabla\varphi|^{p(x)}\, dx = 0, \end{aligned}$$

что противоречит второму условию леммы. Лемма 6.4 доказана. $\square$

§7. Первое достаточное условие регулярности граничной точки

Будем предполагать, что $x_0 \in \partial D$ и найдутся постоянная $p_0 \in [p_1, p_2]$ и измеримое множество $E \subset D$ такие, что

$$|p(x) - p_0| \leqslant \frac{L}{\ln|x - x_0|^{-1}} \quad \text{для п.в.} \quad x \in (B_{R_0}^{x_0} \cap D) \setminus E, \tag{7.1}$$

причём

$$|(B_r^{x_0} \cap D) \cap E| \leqslant C_E r^{n+2\alpha n}, \quad 0 < r \leqslant R_0 \tag{7.2}$$

и

$$|B_r^{x_0} \setminus D| \geqslant \beta_0 |B_r^{x_0}|, \quad \beta_0 > 0, \quad 0 < r \leqslant R_0, \tag{7.3}$$

Продолжая показатель значением p_0 в дополнение области D, можно считать, что выполняются условия (1.6) и (1.7). Ниже рассматривается решение задачи Дирихле (4.1) с непрерывной граничной функцией f, такой, что $\max\limits_{\partial D} |f| \leqslant M$.

Теорема 7.1. *Если выполнены условия* (7.1)–(7.3)*, то граничная точка x_0 является регулярной. Более того, найдётся положительная постоянная ν зависящая только от n, p_1, p_2, C_E, L, β_0 и M, такие, что для решения задачи Дирихле* (4.1) *при* $0 < r < \rho \leqslant R_0/4$ *справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D \cap B_r^{x_0}} |u - f(x_0)| \leqslant 4M(r/\rho)^\nu + \rho + \operatorname*{osc}_{\partial D \cap B_\rho^{x_0}} f. \tag{7.4}$$

Основой доказательства является следующее утверждение, в котором граничная функция f предполагается гладкой, $\max\limits_{\partial D} |f| \leqslant M$ и пусть

$$M_r = \operatorname*{ess\,sup}_{D \cap B_r^{x_0}} u, \quad m_r = \operatorname*{ess\,inf}_{D \cap B_r^{x_0}} u, \quad \omega(r) = M_r - m_r,$$

$$F_r = \sup_{\partial D \cap B_r^{x_0}} f, \quad f_r = \inf_{\partial D \cap B_r^{x_0}} f, \quad \varphi(r) = F_r - f_r. \tag{7.5}$$

Лемма 7.1. *В условиях теоремы* 7.1 *для решения задачи Дирихле* (4.1) *с гладкой граничной функцией f справедлива оценка*

$$\omega(R) \leqslant (1 - \delta)(\omega(4R) + 2R) + \delta\varphi(4R), \quad R < R_0/4, \tag{7.6}$$

в которой положительная константа $\delta \in (0, 1/2]$ зависит только от n, p_1, p_2, C_E, L, M, β_0.

Доказательство леммы 7.1. Пусть вначале $f_{4R} \geqslant m_{4R}$. Положим $\widetilde{u} = \min(u, f_{4R})$ и продолжим функцию $\widetilde{u}$ на $B_{4R}^{x_0} \setminus D$ константой f_{4R}. Из результатов раздела 6 следует, что $\widetilde{u} \in W(B_{4R}^{x_0})$ ($\widetilde{u} \in H(B_{4R}^{x_0})$), а функция $\widetilde{u} - m_{4R}$ – неотрицательное ограниченное суперрешение уравнения (1.1) в $B_{4R}^{x_0}$. Обозначим $\mu = f_{4R} - m_{4R} + R$ и рассмотрим неотрицательную функцию

$$v = \left(\ln \frac{\mu}{\widetilde{u} - m_{4R} + R}\right)_+ = \ln \frac{f_{4R} - m_{4R} + R}{\widetilde{u} - m_{4R} + R}.$$

В силу оценки (2.4) с параметрами $q = 1$, $\tau = 1$ и $t = 2$ имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} v \leqslant C\left(1 + \fint_{B_{2R}^{x_0}} v\,dx\right), \quad C = C(n, p_1, p_2, L, C_E, M). \tag{7.7}$$

На множестве $B_{4R}^{x_0} \setminus D$ функция v равна нулю. Таким образом,

$$|\{v = 0\} \cap B_{2R}^{x_0}| \geqslant \beta_0 |B_{2R}^{x_0}|.$$

Пользуясь неравенством Пуанкаре и оценкой (2.5) для $t = 2$, найдём

$$\fint_{B_{2R}^{x_0}} v\,dx \leqslant \frac{C(n)}{|\{v = 0\} \cap B_{2R}^{x_0}|} \int_{B_{2R}^{x_0}} R|\nabla v|\,dx$$
$$\leqslant \frac{C(n)}{\beta_0} \int_{B_{2R}^{x_0}} R|\nabla \ln(\widetilde{u} - m_{4R} + R)|\,dx \leqslant \beta_0^{-1} C(n, p_1, p_2, L, C_E, M).$$

Отсюда и из (7.7) будем иметь

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} v \leqslant C_0 \beta_0^{-1}, \quad C_0 = C_0(n, p_1, p_2, L, C_E, M),$$

в силу чего по определению функции v получаем

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0} \cap D} u \geqslant m_{4R} + \delta(f_{4R} - m_{4R} + R) - R, \quad \delta = e^{-C_0/\beta_0}. \tag{7.8}$$

Мы очевидным образом имеем то же соотношение, если $f_{4R} < m_{4R}$. Заменяя δ на $\min(1/2, \delta)$, можно считать, что $\delta \leqslant 1/2$.

Аналогично, рассматривая функцию $M_{4R} - u$ вместо u, будем иметь

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0} \cap D} (M_{4R} - u) \geqslant \delta(M_{4R} - F_{4R} + R) - R,$$

или же

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_R^{x_0} \cap D} u \leqslant M_{4R} - \delta(M_{4R} - F_{4R} + R) + R. \tag{7.9}$$

Совмещая оценки (7.8) и (7.9), придём к неравенству (7.6). Лемма 7.1 доказана. □

Доказательство теоремы 7.1. Пусть u – решение задачи (4.1) с гладкой граничной функцией f, удовлетворяющей неравенству $\max\limits_{\partial D}|f| \leqslant M$, и пусть $\rho \leqslant R_0$. Последовательно применяя лемму 7.1, для $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$\omega(4^{-k}\rho) \leqslant (1-\delta)^k\omega(\rho) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}(1-\delta)^{k+1-l}4^{1-l}\rho$$
$$+ \delta\sum_{l=1}^{k}(1-\delta)^{k-l}\varphi(4^{1-l}\rho) \leqslant (1-\delta)^k\omega(\rho) + \rho + \varphi(\rho).$$

Здесь для оценки второго члена мы пренебрегли степенями $1-\delta$, а для оценки третьего члена мы воспользовались неравенством $\varphi(4^{1-l}\rho) \leqslant \varphi(\rho)$. Отсюда, поскольку $\omega(\rho) \leqslant 2M$, то с учётом предположения $0 < \delta \leqslant 1/2$, для $r < \rho$ вытекает следующая оценка

$$\omega(r) \leqslant 4M\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\nu} + \rho + \varphi(\rho), \quad \text{где} \quad \nu = \log_4\frac{1}{1-\delta},$$

По построению, обобщенное решение задачи (4.1) удовлетворяет такой же оценке, и, следовательно, имеет (существенный) предел в точке x_0. По лемме 6.4 этот предел должен совпадать со значением граничной функции f в точке x_0. □

§8. Второе достаточное условие регулярности граничной точки

В этом разделе для граничной точки x_0 мы приведём уточнение результатов предыдущего раздела. В следующей лемме граничная функция f полагается гладкой, u – решение задачи Дирихле (4.1), ограниченное по модулю постоянной M, и используются обозначения (7.5).

Лемма 8.1. *Предположим, что для некоторых чисел* $R, \varkappa > 0$, $\xi > \xi' > 1$, *таких, что* $\xi R \leqslant R_0$, $4\varkappa < \min(\xi'-1, \xi-\xi')$, *найдётся конечная последовательность точек* $y_i \in S^{x_0}_{\xi' R}$, *где* $i = 1, \dots m$, *и такое продолжение* p *на* $(B^{x_0}_{\xi R} \setminus \overline{B}^{x_0}_{R}) \setminus D$, *удовлетворяющее неравенствам* $p_1 \leqslant p(\cdot) \leqslant p_2$, *что выполнены условия* (3.2)–(3.4). *Пусть также*

$$|(B^{x_0}_{(\xi'+2\varkappa)R} \setminus \overline{B}^{x_0}_{(\xi'-2\varkappa)R}) \setminus D| \geqslant \beta_0 R^n.$$

Тогда

$$\omega(\xi' R) \leqslant (1-\delta)\omega(\xi R) + 2\varkappa R + \delta\varphi(\xi R), \tag{8.1}$$

где постоянная $\delta \in (0, 1/2]$ *зависит только от* n, p_1, p_2, L, C_E, M, m, ξ', $\varkappa$, β_0.

Доказательство. Пусть вначале $f_{\xi R} \geqslant m_{\xi R}$. Введём функцию $\widetilde{u} = \min(u, f_{\xi R})$, продолжив её на $B^{x_0}_{\xi R} \setminus D$ константой $f_{\xi R}$. Из результатов раздела 6 следует, что функция $(\widetilde{u} - m_{\xi R})$ – неотрицательное супер-решение уравнения (1.1) в $B^{x_0}_{\xi R}$. Обозначим $\mu = f_{\xi R} - m_{\xi R} + \varkappa R$ и определим неотрицательную функцию

$$v = \ln \frac{f_{\xi R} - m_{\xi R} + \varkappa R}{\widetilde{u} - m_{\xi R} + \varkappa R}.$$

В силу оценки (2.4) с параметрами $q = 1$, $\tau = 2$ и $t = 5/2$ имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{y_i}_{2\varkappa R}} v \leqslant C\left(1 + \fint_{B^{y_i}_{5\varkappa R/2}} v\,dx\right), \quad C = C(n, p_1, p_2, L, C_E, M). \tag{8.2}$$

Обозначим

$$Q' = B^{x_0}_{(\xi'+5\varkappa/2)R} \setminus \overline{B}^{x_0}_{(\xi'-5\varkappa/2)R}, \quad Q'' = B^{x_0}_{(\xi'+\varkappa)R} \setminus \overline{B}^{x_0}_{(\xi'-\varkappa)R}.$$

По неравенству Пуанкаре из условия леммы следует, что

$$\int_{Q'} v\,dx \leqslant C(n, \varkappa, \xi')\beta_0^{-1} R \int_{Q'} |\nabla v|\,dx.$$

Так как $Q' \subset \bigcup_{i=1}^{m} B^{y_i}_{7\varkappa R/2}$ и в силу леммы 2.4 с параметром $t = 7/2$ справедлива оценка

$$R \fint_{B^{y_i}_{7\varkappa R/2}} |\nabla v|\,dx \leqslant C(n, p_1, p_2, L, C_E, M),$$

то

$$\int_{Q'} v\,dx \leqslant C(n, p_1, p_2, L, C_E, M, \varkappa, \xi')\beta_0^{-1} R^n. \tag{8.3}$$

Поскольку $Q'' \subset \bigcup_{i=1}^{m} B^{y_i}_{2\varkappa R}$, то из (8.2) и (8.3) имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q''} v \leqslant C(n, p_1, p_2, L, C_E, M, \varkappa, \xi')\beta_0^{-1}.$$

Из определения функции v следует, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{Q''\cap D} u \geqslant m_{\xi R} + \delta(f_{\xi R} - m_{\xi R} + \varkappa R) - \varkappa R, \quad \delta = e^{-C_0/\beta_0}. \tag{8.4}$$

То же соотношение выполнено и в случае, когда $f_{\xi R} < m_{\xi R}$. Далее, считаем, без ограничения общности, что $\delta \leqslant 1/2$. Так как

$$u \geqslant f_{\xi R} = m_{\xi R} + (f_{\xi R} - m_{\xi R}) \quad \text{на} \quad B^{x_0}_{\xi R} \cap \partial D,$$

то по принципу максимума будем иметь

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{\xi' R}\cap D} u \geqslant m_{\xi R} + \delta(f_{\xi R} - m_{\xi R} + \varkappa R) - \varkappa R. \tag{8.5}$$

Аналогично, рассматривая функцию $M_{\xi R} - u$ вместо u, получим для неё оценку

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{\xi' R}\cap D} (M_{\xi R} - u) \geqslant \delta(M_{\xi R} - F_{\xi R} + \varkappa R) - \varkappa R,$$

или же

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_{\xi' R}\cap D} u \leqslant M_{\xi R} - \delta(M_{\xi R} - F_{\xi R} + \varkappa R) + \varkappa R. \tag{8.6}$$

Совмещая оценки (8.5) и (8.6), придём к неравенству (8.1). Лемма 8.1 доказана. □

Сформулируем теперь следующее достаточное условие регулярности граничной точки.

Теорема 8.1. *Пусть для $m \in \mathbb{N}$ и некоторых $\xi, \xi', \varkappa$, удовлетворяющих условиям леммы* 8.1, *найдётся монотонно убывающая к нулю последовательность R_j, такая, что $\xi R_j \leqslant \xi' R_{j-1}$ и для любого j на сфере $S^{x_0}_{\xi' R_j}$ найдётся последовательность точек $y_{i,j}$, $i = 1, \ldots, m$, так, что для $y_i = y_{i,j}$ и $R = R_j$ выполнены условия леммы* 8.1. *Тогда граничная точка x_0 является регулярной.*

Доказательство. Пусть $j > k$. Полагая вначале граничную функцию f гладкой и последовательно применяя лемму 8.1, будем иметь

$$\omega(\xi R_j) \leqslant (1-\delta)^{j-k}\omega(\xi R_k) + \frac{2\varkappa}{\delta} R_k + \varphi(R_k),$$

где $\omega(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ имеют тот же смысл, что и в (7.5). Отсюда следует, что $\omega(r) \to 0$ при $r \to 0$. Теперь доказательство завершается так же, как и в теореме 7.1. □

§9. Третье достаточное условие регулярности граничной точки

В этом разделе будем предполагать, что $x_0 \in \partial D$ и найдутся измеримое множество $E \subset D$ и постоянная $p_0 > 1$ такие, что

$$|p(x) - p_0| \leqslant \frac{L}{\ln |x - x_0|^{-1}} \quad \text{для п.в.} \quad x \in (B_{R_0}^{x_0} \cap D) \setminus E, \tag{9.1}$$

причём

$$|(B_r^{x_0} \cap D) \cap E| \leqslant C_E r^{n+8\alpha n}, \quad 0 < r \leqslant R_0. \tag{9.2}$$

Продолжая показатель значением p_0 в дополнение области D, можно считать, что выполняются условия

$$|p(x) - p_0| \leqslant \frac{L}{\ln |x - x_0|^{-1}} \quad \text{для п.в.} \quad x \in B_{R_0}^{x_0} \setminus E, \tag{9.3}$$

причём

$$|B_r^{x_0} \cap E| \leqslant C_E r^{n+8\alpha n}, \quad 0 < r \leqslant R_0. \tag{9.4}$$

Напомним, что функция $\widetilde{\gamma}_{p_0}(t)$ определена в (5.2). Ниже рассматривается задача Дирихле (4.1) с непрерывной граничной функцией f, удовлетворяющей неравенству $\max\limits_{\partial D} |f| \leqslant M$.

Теорема 9.1. *Пусть выполнены условия* (9.1) *и* (9.2). *Тогда, если*

$$\int\limits_0 \widetilde{\gamma}_{p_0}(t) t^{-1}\, dt = \infty, \tag{9.5}$$

то граничная точка x_0 является регулярной. В предположении (9.5) *найдутся положительные постоянные C, θ, ρ_0, зависящие только от n, p_1, p_2, C_E, L и M такие, что для решения задачи Дирихле* (4.1) *при $0 < r < \rho \leqslant \rho_0$ справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D \cap B_r^{x_0}} |u - f(x_0)| \leqslant C \biggl(\operatorname*{osc}_{\partial D \cap B_\rho^{x_0}} f + \rho + \exp\biggl(-\theta \int\limits_r^\rho \widetilde{\gamma}_{p_0}(t) t^{-1}\, dt \biggr) \biggr). \tag{9.6}$$

Данное утверждение является обобщением результата работы [12]. Метод доказательства основан на модификации рассуждений данной работы на основе техники, разработанной в статье [8].

В качестве следствия этой теоремы и леммы 5.1 приведём простой частный случай, в котором предполагается, что дополнение к области D содержит в окрестности точки x_0 воронку вращения. Без ограничения общности считаем, что ось этой воронки совпадает с координатной осью OX_n, а сама воронка вращения есть x_0+V, где V и x_0+V определены в (5.3).

Следствие 9.1. *Пусть дополнение к области D содержит воронку вращения x_0+V, где функция g удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0 \left(\frac{g(t)}{t}\right)^{\frac{n-1}{p_0-1}} \frac{dt}{t} = \infty.$$

Тогда граничная точка x_0 является регулярной.

Отметим, что эта оценка более грубая, чем приведённая в работе [11, Теорема 1.4], где множество E является пустым. Если о множестве E известна дополнительная информация, то данный результат можно уточнить. Приведём следствие теоремы 9.1 и леммы 5.2, в котором также используются обозначения (5.3), а множество $E-x_0$ отделено от воронки V гиперплоскостью $\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_n=0\}$.

Следствие 9.2. *Пусть дополнение к области D содержит воронку вращения x_0+V, функция g удовлетворяет (5.5), а множество $E-x_0\subset\{x_n<0\}$. Если $n-1\leqslant p_0$, то граничная точка x_0 регулярна, а если $1<p_0<n-1$ то для регулярности граничной точки x_0 достаточно расходимости в нуле интеграла*

$$\int\limits_0 \left(\frac{g(t)}{t}\right)^{\frac{n-1-p_0}{p_0-1}} \frac{dt}{t} = \infty.$$

Основой доказательства теоремы 9.1 является следующее утверждение, в котором используются обозначения (7.5).

Лемма 9.1. *В условиях теоремы 9.1 для решения задачи Дирихле (4.1) с гладкой граничной функцией f, удовлетворяющей неравенству $\max\limits_{\partial D}|f|\leqslant M$, справедлива оценка*

$$\omega(R)\leqslant (1-\delta\widetilde{\gamma}_{p_0}(R))(\omega(4R)+2R)+\delta\widetilde{\gamma}_{p_0}(R)\varphi(4R),$$

в которой $R\leqslant R_0/4$, а положительная константа δ зависит только от n, p_1, p_2, C_E, L, M.

Доказательство леммы 9.1 будет приведено ниже.

Доказательство теоремы 9.1. Пусть u – решение задачи Дирихле (4.1) с гладкой граничной функцией f. Последовательно применяя лемму 9.1, аналогично работам [11], [12], [13] получим оценку

$$\omega(r) \leqslant C\biggl(\varphi(\rho) + \rho + \exp\biggl(-\theta \int\limits_r^\rho \widetilde{\gamma}_{p_0}(t) t^{-1}\, dt\biggr)\biggr). \tag{9.7}$$

Доказательство завершается так же, как и в теореме 7.1. □

Перед тем, как доказать лемму 9.1, приведём два вспомогательных утверждения (Леммы 9.2 и 9.3), в которых u – решение задачи Дирихле (4.1) с гладкой граничной функцией f, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant u \leqslant M$ в $B^{x_0}_{4R}$, число m определено (6.1), функция $\widetilde{u}$ такая же, как в (6.2), а $v_m = \widetilde{u} + R$.

Введём величину

$$\sigma = \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{4R} \setminus E} p.$$

Лемма 9.2. *Если справедливы предположения* (9.1) *и* (9.2), *то имеет место оценка*

$$\fint\limits_{B^{x_0}_{2R}} |\nabla v_m|^{p(x)-1}\, dx \leqslant C R^{1-p_0} \bigl(\inf_{B^{x_0}_R} v_m\bigr)^{p_0 - 1},$$

где константа C зависит только от n, p_1, p_2, L, C_E, M.

Доказательство. Выбирая в интегральном неравенстве (6.3) пробную функцию

$$\psi = (v_m^{1-\sigma+\gamma} - (m+R)^{1-\sigma+\gamma})\eta^{p_2},$$

где $0 < \gamma < \sigma - 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ в $B^{x_0}_{2R}$, $\eta \in C_0^\infty(B^{x_0}_{3R})$, $|\nabla \eta| \leqslant 4R^{-1}$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}(\sigma - \gamma - 1) &\int\limits_{B^{x_0}_{3R}} |\nabla v_m|^{p(x)} v_m^{\gamma-\sigma} \eta^{p_2}\, dx \\ &\leqslant p_2 \int\limits_{B^{x_0}_{3R}} |\nabla v_m|^{p(x)-1} (v_m^{1-\sigma+\gamma} - (m+R)^{1-\sigma+\gamma}) \eta^{p_2 - 1} |\nabla \eta|\, dx.\end{aligned}$$

Пользуясь неравенством Юнга и выбором функции η, получаем

$$\int\limits_{B_{3R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)} v_m^{\gamma-\sigma} \eta^{p_2}\, dx \leqslant \frac{(4p_2)^{p_2+1}}{4p_1} (\sigma-\gamma-1)^{-p_2} \int\limits_{B_{3R}^{x_0}} v_m^{p(x)-\sigma+\gamma} R^{-p(x)}\, dx$$
$$= \frac{(4p_2)^{p_2+1}}{4p_1} (\sigma-\gamma-1)^{-p_2} \Bigg(\int\limits_{B_{3R}^{x_0}\cap E} v_m^{p(x)-\sigma+\gamma} R^{-p(x)} dx + \int\limits_{B_{3R}^{x_0}\setminus E} v_m^{p(x)-\sigma+\gamma} R^{-p(x)} dx \Bigg).$$

Пользуясь условием (9.3) и неравенством Харнака слабого типа (2.3), оценим

$$\int\limits_{B_{3R}^{x_0}\setminus E} v_m^{p(x)-\sigma+\gamma} R^{-p(x)}\, dx = \int\limits_{B_{3R}^{x_0}\setminus E} v_m^{p(x)-\sigma} v_m^{\gamma} R^{\sigma-p(x)} R^{-\sigma}\, dx$$
$$\leqslant (M+R)^{p_2-p_1} C(L) R^{-\sigma} \int\limits_{B_{3R}^{x_0}\setminus E} v_m^{\gamma}\, dx$$
$$\leqslant C(n,p_1,p_2,M,L,C_E) R^{n-\sigma} \big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\big)^{\gamma}.$$

Далее, пользуясь неравенством Гёльдера, условием (9.4), и тем, что $\alpha \geqslant p_2 - p_1$, найдём

$$\int\limits_{B_{3R}^{x_0}\cap E} v_m^{p(x)-\sigma+\gamma} R^{-p(x)}\, dx \leqslant R^{-\sigma} R^{p_1-p_2} (M+R)^{p_2-p_1} \int\limits_{B_{3R}^{x_0}\cap E} v_m^{\gamma}\, dx$$
$$\leqslant R^{-\sigma} R^{p_1-p_2} (M+R)^{p_2-p_1} |B_{3R}^{x_0}\cap E|^{1/(2n)} \Bigg(\int\limits_{B_{3R}^{x_0}\cap E} v_m^{2n\gamma/(2n-1)}\, dx \Bigg)^{\frac{2n-1}{2n}}$$
$$\leqslant C(n) C_E^{1/2n} (M+R)^{p_2-p_1} R^n \Bigg(R^{-n} \int\limits_{B_{3R}^{x_0}\cap E} v_m^{2n\gamma/(2n-1)}\, dx \Bigg)^{\frac{2n-1}{2n}}$$
$$\leqslant C(n,p_1,p_2,M,L,C_E) R^{n-\sigma} \big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\big)^{\gamma},$$

где на последнем шаге вновь использовано неравенство (2.3). Совмещая полученные оценки, будем иметь

$$\begin{aligned}&\fint_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)} v_m^{\gamma-\sigma}\,dx\\&\leqslant C(n,p_1,p_2,M,L,C_E)(\sigma-\gamma-1)^{-p_2}R^{-\sigma}\big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\big)^{\gamma}.\end{aligned}\tag{9.8}$$

По неравенству Юнга, для любого $t>0$ имеем

$$\begin{aligned}&\fint_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)-1}\,dx\\&\leqslant \fint_{B_{2R}^{x_0}} t|\nabla v_m|^{p(x)} v_m^{\gamma-\sigma}\,dx + \fint_{B_{2R}^{x_0}} t^{1-p(x)} v_m^{(\sigma-\gamma)(p(x)-1)}\,dx.\end{aligned}\tag{9.9}$$

Положим

$$t=\big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\big)^{\sigma-\gamma-1}R.$$

Тогда из (9.8) имеем

$$\begin{aligned}&\fint_{B_{2R}^{x_0}} t|\nabla v_m|^{p(x)} v_m^{\gamma-\sigma}\,dx\\&\leqslant C(n,p_1,p_2,M,L,C_E)(\sigma-\gamma-1)^{-p_2}R^{1-\sigma}\big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\big)^{\sigma-1}\end{aligned}\tag{9.10}$$

Используя неравенство $v_m\geqslant R$ и логарифмическое условие (9.3), для $x\in B_{4R}^{x_0}\setminus E$ придём к оценке

$$\begin{aligned}t^{1-p(x)}&=R^{1-\sigma}\big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\big)^{(\sigma-1-\gamma)(1-\sigma)}R^{\sigma-p(x)}\big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\big)^{(\sigma-1-\gamma)(\sigma-p(x))}\\&\leqslant R^{1-\sigma}\big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\big)^{(\sigma-1-\gamma)(1-\sigma)}R^{(\sigma-\gamma)(\sigma-p(x))}\\&\leqslant C(p_2,L)R^{1-\sigma}\big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\big)^{(\sigma-1-\gamma)(1-\sigma)}.\end{aligned}\tag{9.11}$$

Отсюда, при условии, что

$$q:=(\sigma-\gamma)(\sigma-1)<n(p_0-1)/(n-1),\tag{9.12}$$

пользуясь неравенством Харнака слабого типа (2.3) будем иметь

$$\frac{1}{|B_{2R}^{x_0}|}\int\limits_{B_{2R}^{x_0}\setminus E} t^{1-p(x)}v_m^{(\sigma-\gamma)(p(x)-1)}\,dx$$
$$\leqslant C(p_2,L)(M+R)^{(p_2-p_1)(\sigma-\gamma)}R^{1-\sigma}\bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\bigr)^{(\sigma-1-\gamma)(1-\sigma)}$$
$$\fint\limits_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{(\sigma-\gamma)(\sigma-1)}\,dx \leqslant C(n,p_1,p_2,M,L,C_E,q)R^{1-\sigma}\bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\bigr)^{\sigma-1}.$$

Так как $\sigma\leqslant p_0$, условие (9.12) выполнено, если

$$\sigma-\gamma<n/(n-1), \tag{9.13}$$

Для $x\in B_{4R}^{x_0}\cap E$ вместо (9.11) будем иметь

$$t^{1-p(x)}\leqslant R^{(\sigma-\gamma)(p_1-p_2)}R^{1-\sigma}\bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\bigr)^{(\sigma-1-\gamma)(1-\sigma)},$$

где мы использовали неравенства $v_m\geqslant R$ и $\sigma-p(x)\geqslant p_1-p_2$. Отсюда, для $x\in B_{4R}^{x_0}\cap E$ выполняется

$$t^{1-p(x)}v_m^{(\sigma-\gamma)(p(x)-\sigma)}$$
$$\leqslant A_*:=(M+R)^{(\sigma-\gamma)(p_2-p_1)}R^{2(\sigma-\gamma)(p_1-p_2)}R^{1-\sigma}\bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\bigr)^{(\sigma-1-\gamma)(1-\sigma)}.$$

Пусть выполнено условие (9.13), и найдётся число δ, удовлетворяющее неравенствам

$$1<\delta<\frac{n}{(n-1)(\sigma-\gamma)} \tag{9.14}$$

и

$$8\alpha n\frac{\delta-1}{\delta}\geqslant 2(\sigma-\gamma)(p_2-p_1). \tag{9.15}$$

Используя неравенство Харнака слабого типа (2.3) и условие (9.4), при выполнении соотношений (9.13), (9.14), (9.15), придём к следующей оценке оставшейся части второго интеграла в правой части (9.9):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_{2R}^{x_0}|}\int\limits_{B_{2R}^{x_0}\cap E} t^{1-p(x)} v_m^{(\sigma-\gamma)(p(x)-1)}\,dx\\
&= \frac{1}{|B_{2R}^{x_0}|}\int\limits_{B_{2R}^{x_0}\cap E} t^{1-p(x)} v_m^{(\sigma-\gamma)(\sigma-1)} v_m^{(\sigma-\gamma)(p(x)-\sigma)}\,dx\\
&\leqslant \frac{A}{|B_{2R}^{x_0}|}\int\limits_{B_{2R}^{x_0}\cap E} v_m^{(\sigma-\gamma)(\sigma-1)}\,dx\\
&\leqslant A_*\biggl(\frac{1}{|B_{2R}^{x_0}|}\int\limits_{B_{2R}^{x_0}\cap E} v_m^{(\sigma-\gamma)(\sigma-1)\delta}\,dx\biggr)^{1/\delta}\biggl(\frac{|B_{2R}^{x_0}\cap E|}{|B_{2R}^{x_0}|}\biggr)^{(\delta-1)/\delta}\\
&\leqslant A_* C(n,p_1,p_2,L,C_E,M,\delta,q)\bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\bigr)^{(\sigma-\gamma)(\sigma-1)}\bigl(C_E R^{8\alpha n}\bigr)^{(\delta-1)/\delta}\\
&\leqslant C(n,p_1,p_2,L,C_E,M,\delta,q) R^{1-\sigma}\bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\bigr)^{\sigma-1}.
\end{aligned}$$

Положим теперь

$$\gamma = \sigma - \frac{3n}{3n-2}, \quad \delta = \frac{12n-8}{12n-11}.$$

Тогда условия (9.13)–(9.15) выполнены, и имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_{2R}^{x_0}|}\int\limits_{B_{2R}^{x_0}\cap E} t^{1-p(x)} v_m^{(\sigma-\gamma)(p(x)-1)}\,dx\\
&\qquad\leqslant C(n,p_1,p_2,L,C_E,M) R^{1-\sigma}\bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\bigr)^{\sigma-1}.
\end{aligned}$$

Совмещая полученные оценки для интегралов в правой части (9.9), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&\fint\limits_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)-1}\,dx \leqslant C(n,p_2,p_2,L,C_E,M) R^{1-\sigma}\bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\bigr)^{\sigma-1}\\
&\leqslant C(n,p_1,p_2,L,C_E,M) R^{1-p_0}\bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\bigr)^{p_0-1},
\end{aligned}$$

где мы вновь использовали условие (9.3) и $v_m \geqslant R$. Лемма 9.2 доказана. □

Лемма 9.3. *Если выполнены условия* (9.1) *и* (9.2), *то справедливо неравенство*

$$C_0\widetilde{\gamma}_{p_0}(R)(\inf_{\partial D\cap B^{x_0}_{4R}} f+R)\leqslant \inf_{D\cap B^{x_0}_R} u+R \tag{9.16}$$

с положительной постоянной $C_0=C_0(n,p_1,p_2,L,C_E,M)$.

Доказательство. Пусть $\eta\in C_0^\infty(B^{x_0}_{2R})$, $\eta=1$ в $B^{x_0}_R$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$, $|\nabla\eta|\leqslant 2R^{-1}$. Выбирая в интегральном неравенстве (6.3) пробную функцию $\varphi=(m+R-v_m)\eta^{p_1}$, будем иметь

$$\int\limits_{B^{x_0}_{2R}}|\nabla v_m|^{p(x)}\eta^{p_1}\,dx\leqslant p_1\int\limits_{B^{x_0}_{2R}}|\nabla v_m|^{p(x)-2}(m+R-v_m)\eta^{p_1-1}\nabla v_m\cdot\nabla\eta\,dx$$
$$\leqslant 2p_1(m+R)R^{-1}\int\limits_{B^{x_0}_{2R}}|\nabla v_m|^{p(x)-1}\,dx\leqslant CR^{n-p_0}(m+R)\big(\operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_R} v_m\big)^{p_0-1},$$

с константой $C=C(n,p_1,p_2,L,C_E,M)$, где на последнем шаге использована оценка леммы 9.2. Отсюда имеем

$$\int\limits_{B^{x_0}_R}|\nabla(v_m\eta)|^{p(x)}\,dx\leqslant 2^{p_2}\int\limits_{B^{x_0}_R}\big(|\nabla v_m|^{p(x)}\eta^{p_1}+v_m^{p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\big)\,dx$$
$$\leqslant C(m+R)R^{n-p_0}\big(\operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_R} v_m\big)^{p_0-1}+2^{p_2}(m+R)\int\limits_{B^{x_0}_{2R}}v_m^{p(x)-1}R^{-p(x)}\,dx,$$

где $C=C(n,p_1,p_2,L,C_E,M)$. Вновь используя (9.3), получим оценку

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{p(x)-1} R^{-p(x)}\,dx \\
&= R^{-p_0} \int\limits_{B_{2R}^{x_0}\setminus E} v_m^{p_0-1} v_m^{p(x)-p_0} R^{p_0-p(x)} dx \\
&+ R^{-p_0} \int\limits_{B_{2R}^{x_0}\cap E} v_m^{p_0-1} v_m^{p(x)-p_0} R^{p_0-p(x)}\,dx \\
&\leqslant C(L)(M+R)^{p_2-p_1} R^{-p_0} \int\limits_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{p_0-1}\,dx \\
&+ R^{p_1-p_2} \max((M+R)^{p_2-p_1}, R^{p_1-p_2}) R^{-p_0} \int\limits_{B_{2R}^{x_0}\cap E} v_m^{p_0-1}\,dx.
\end{aligned}
$$

Полагая $\delta = \frac{2n}{2n-1}$, пользуясь неравенством Гёльдера, условием (9.4) и неравенством Харнака слабого типа (2.3), в силу определения α будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{B_{2R}^{x_0}\cap E} v_m^{p_0-1}\,dx \leqslant |B_{2R}^{x_0}| \Bigl(|B_{2R}^{x_0}|^{-1} \int\limits_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{\delta(p_0-1)}\,dx \Bigr)^{1/\delta} \Bigl(\frac{|B_{2R}^{x_0}\cap E|}{|B_{2R}^{x_0}|} \Bigr)^{(\delta-1)/\delta} \\
&\leqslant C(n, p_1, p_2, L, C_E, M) R^n \bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m \bigr)^{p_0-1} R^{4(p_2-p_1)}.
\end{aligned}
$$

Совмещая полученные оценки и вновь используя неравенство Харнака слабого типа (2.3), приходим к неравенству

$$
\int\limits_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{p(x)-1} R^{-p(x)}\,dx \leqslant C(n, p_1, p_2, L, C_E, M) R^{n-p_0} \bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m \bigr)^{p_0-1},
$$

откуда

$$
\int\limits_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla(v_m\eta)|^{p(x)}\,dx \leqslant C(n, p_1, p_2, L, C_E, M)(m+R) R^{n-p_0} \bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m \bigr)^{p_0-1}.
$$

Полагая $w_m = v_m/(m+R)$, найдём

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{2R}^{x_0}\setminus E} |\nabla(w_m\eta)|^{p(x)}\,dx &= \int\limits_{B_{2R}^{x_0}\setminus E} (m+R)^{-p(x)}|\nabla(v_m\eta)|^{p(x)}\,dx \\
&= (m+R)^{-\sigma} \int\limits_{B_{2R}^{x_0}\setminus E} (m+R)^{\sigma-p(x)}|\nabla(v_m\eta)|^{p(x)}\,dx \\
&\leqslant (m+R)^{-\sigma}C(L) \int\limits_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla(v_m\eta)|^{p(x)}\,dx \\
&\leqslant C(n,p_1,p_2,L,C_E,M)(m+R)^{1-p_0}R^{n-p_0}\big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\big)^{p_0-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m \geqslant C_0(m+R)\biggl(\frac{\widetilde{C}_p(\overline{B}_R^{x_0}\setminus D, E, B_{2R}^{x_0})}{R^{n-p_0}}\biggr)^{1/(p_0-1)}.$$

где величина $\widetilde{C}_p((\overline{B}_R^{x_0}\setminus D, E, B_{2R}^{x_0}))$ определена в (5.1), а положительная постоянная C_0 зависит лишь от n, p_1, p_2, L, C_E, M. Теперь по определению m, v_m и $\widetilde{\gamma}_{p_0}(R)$ приходим к (9.16). Лемма 9.3 доказана. □

Доказательство леммы 9.1. Применяя оценку (9.16) к функциям $M_{4R}-u$ и $u-m_{4R}$, имеем

$$\begin{aligned}
C_0(M_{4R}-F_{4R}+R)\widetilde{\gamma}_{p_0}(R) &\leqslant M_{4R}-M_R+R,\\
C_0(f_{4R}-m_{4R}+R)\widetilde{\gamma}_{p_0}(R) &\leqslant m_R-m_{4R}+R.
\end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, придём к оценке

$$\begin{aligned}
M_R-m_R &\leqslant (1-C_0\widetilde{\gamma}_{p_0}(R))(M_{4R}-m_{4R})\\
&+C_0\widetilde{\gamma}_{p_0}(R)(F_{4R}-f_{4R})+2(1-C_0\widetilde{\gamma}_{p_0}(R))R.
\end{aligned}$$

Лемма 9.1 доказана. □

Список литературы

1. В. В. Жиков, *Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **47**, No. 5 (1983), 961–995.
2. В. В. Жиков, *Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теории упругости.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **50**, No. 4 (1986), 675–711.

3. V. V. Zhikov, *On Lavrentiev's Phenomenon.* — Russian J. Math. Phys. **3**, No. 2 (1994), 249–269.
4. V. Zhikov, *On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions.* — J. Math. Sci. **173**, No. 5 (2011), 463–570.
5. В. В. Жиков, *О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста.* Тамара Рожковская, Новосибирск, 2017.
6. L. Diening , P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lect. Notes Math. 2017.* Springer, Berlin, 2011.
7. D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis.* Birkhäuser–Springer, Basel, 2013.
8. Ю. А. Алхутов, М. Д. Сурначёв, *Гельдерова непрерывность и неравенство Харнака для $p(x)$-гармонических функций.* — Тр. МИАН **308** (2020), 1–21.
9. Ю. А. Алхутов, О. В. Крашенинникова, *О непрерывности решений эллиптических уравнений с переменным порядком нелинейности.* — Тр. МИАН **261** (2008), 7–15.
10. N. S. Trudinger, *On the regularity of generalized solutions of linear, non-unformly elliptic equations.* — Arch. Rational Mech. Anal. **42** (1971), 50–62.
11. Ю. А. Алхутов, О. В. Крашенинникова, *Непрерывность в граничных точках решений квазилинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста.* — Изв. РАН. Сер. матем. **68**, No. 6 (2004), 3–60.
12. Ю. А. Алхутов, М. Д. Сурначёв, *Регулярность граничной точки для $p(x)$-лапласиана.* — Пробл. матем. анализа **92** (2018), 5–25.
13. Ю. А. Алхутов, М. Д. Сурначёв, *Поведение в граничной точке решений задачи Дирихле для $p(x)$-лапласиана.* — Алгебра и анализ **31**, No. 2 (2019), 88–117.

Alkhutov Yu. A., Surnachev M. D. Interior and boundary continuity of $p(x)$-harmonic functions.

In this paper we establish results on interior and boundary continuity of $p(x)$-harmonic functions with discontinuous exponent $p(x)$.

Владимирский гос. университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
Горького ул., 87
600000 Владимир, Россия
E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

Поступило 26 октября 2021 г.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
Миусская пл., 4
125047 Москва, Россия
E-mail: peitsche@yandex.ru