# Мальчики, девочки, таблицы, графы...

Е.БАКАЕВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОПРОБУЕМ ОБЪЕДИНИТЬ В ОДИН сюжет несколько красивых комбинаторных задач.

Начнем с такой:

**Задача 1.** *В ряд стоят $m$ мальчиков и $d$ девочек в каком-то порядке. Каждого мальчика спросили, сколько справа от него стоит девочек, а каждую девочку – сколько слева от нее стоит мальчиков. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.*

**Решение.** Пусть все мальчики смотрят вправо, а все девочки смотрят влево.

Тогда если мальчик видит девочку, то эта девочка видит его. Таким образом, сумма всех чисел, названных мальчиками, и сумма всех чисел, названных девочками, это одна и та же величина: количество пар «мальчик-девочка», видящих друг друга.

Эту задачу мы встретим в основе нескольких последующих.

**Задача 2** (XXXVI Турнир городов, 2014 г.). *На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.*

**Первое решение.** Параллельно действиям с монетами будем выписывать последовательность букв *С* и *З*: при добавлении золотой монеты будем писать букву *З*, при убирании серебряной – букву *С*. Теперь вместо подсчета монет можно считать буквы в получившейся строке.

Когда мы писали очередную букву *С*, мы записывали на листок количество золотых монет, которые уже лежали на столе, т.е. количество букв *З* слева от этой буквы *С*. А когда писали очередную *З*, то записывали на листок количество серебряных монет, которые еще лежали на столе и которые предстояло убрать, – т.е. количество букв *С* справа от этой буквы *З* в итоговой строчке.

Заменим теперь строку букв *С* и *З* на ряд из мальчиков и девочек – и получим в точности задачу 1. Осталось перефразировать ее решение: если серебряная монета посчитана при добавлении золотой, то эта золотая посчитана при убирании этой серебряной, т.е. серебряную монету убрали после того, как добавили золотую. Таким образом, сумма чисел на обоих листках – количество таких пар «серебряная монета – золотая монета», которые в какой-то момент обе находились на столе.

**Второе решение.** Рассмотрим координатную плоскость, на которой вертикальная ось соответствует количеству серебряных монет, а горизонтальная – количеству золотых. Каждой целочисленной точке, лежащей в прямоугольнике $S \times G$ (где $S$ и $G$ – наибольшее возможное количество серебряных и золотых монет соответственно), соответствует возможное положение на столе (количество серебряных и золотых монет) (рис.1). С каждым действием точка, соответ-

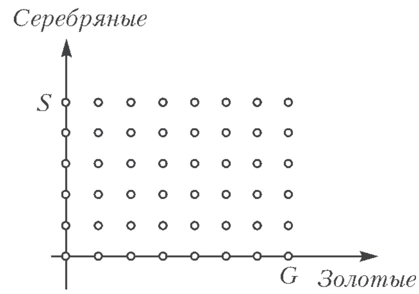


Рис. 1

ствующая текущему положению, сдвигается либо на единичный отрезок вниз (когда убираем серебряную монету), либо на единичный отрезок вправо (когда добавляем золотую), начальному положению соответствует точка $(0,\ S)$ на вертикальной оси, а конечному – $(G,\ 0)$ на горизонтальной (рис.2).

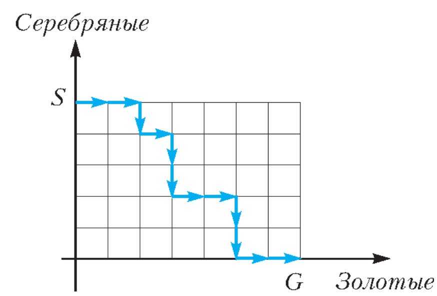


Рис. 2

Когда мы идем из точки $(x,\ y)$ вправо по отрезку, первая координата увеличивается, а мы записываем на первый листок $y$, т.е. количество клеток под этим отрезком. Аналогично, когда мы идем из $(x,\ y)$ вниз, то записываем на второй листок $x$ – количество клеток слева от отрезка. Выходит, мы учтем каждую клетку под ломаной дважды: один раз на первом листке, когда будем проходить над ней, и один раз на втором листке, когда будем проходить справа от нее (рис.3). Значит, суммы чисел на листках будут одинаковыми и будут равны количеству клеток под ломаной.

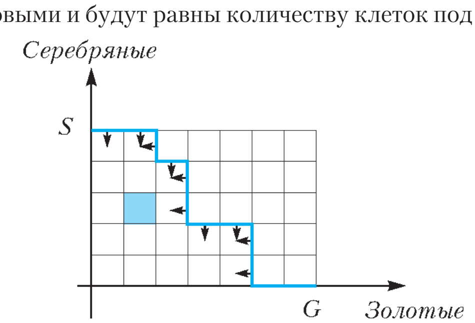


Рис. 3

Основная идея второго решения – рассмотрение множества всех возможных положений системы, в этой статье мы воспользуемся этим приемом еще не раз. В математике такое множество называют *фазовым пространством* системы. (Но обычно этот термин употребляется в другом контексте.)

**Задача 3.** *В ряд стоят $m$ мальчиков и $d$ девочек в каком-то порядке. Каждого ребенка спросили, сколько слева от него стоит детей другого пола. Чему равна сумма чисел, названных детьми?*

**Ответ:** $md$.

**Первое решение.** Рассмотрим произвольную пару «мальчик-девочка». Если мальчик стоит левее девочки, то девочка его посчитала, а он ее – нет. А если правее – то наоборот: он посчитал ее, а она его – нет. Таким образом, каждая пара посчитана либо только мальчиком этой пары, либо только девочкой, т.е. ровно один раз. А число таких пар – $md$.

**Второе решение.** Пусть дети стоят не просто так, а в очереди на вход в школьный кабинет, причем начало очереди находится слева. Дети будут по одному заходить в кабинет, и каждый при входе будет отвечать на вопрос «Сколько сейчас в кабинете детей другого пола?» (ведь в кабинете находятся те, кто стоял слева от него).

Как и во втором решении предыдущей задачи, рассмотрим множество всех возможных положений. Положение задается точкой с двумя координатами: количеством мальчиков в кабинете (будем откладывать на горизонтальной оси) и количеством девочек в кабинете (на вертикальной оси).

Сначала мы находились в точке $(0, 0)$, а в итоге пришли в точку $(m, d)$. Когда входит мальчик, мы сдвигаемся из точки $(x, y)$ на единичный отрезок вправо, и к этому моменту в кабинете уже находятся $y$ девочек, что равно количеству клеток под отрезком.

А когда входит девочка, – сдвигаемся из точки $(x,y)$ на единичный отрезок вверх, и девочка называет число $x$, т.е. количество клеток слева от отрезка (рис.4).

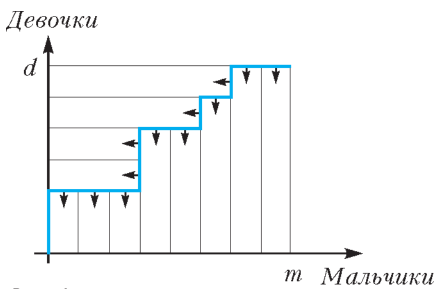


Рис. 4

Таким образом, прямоугольник $m \times d$ окажется разрезанным на полоски, каждая девочка посчитала клетки своей горизонтальной полоски, каждый мальчик – своей вертикальной. Значит, сумма всех ответов равна $md$.

**Упражнения**

**1.** На доске написаны два натуральных числа $x$ и $y$. Вася записывает на бумажку одно из этих чисел, а на доске уменьшает другое число на 1. С новой парой чисел на доске он снова проделывает ту же операцию и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Васиной бумажке?

**2** (Е.Горский, XXVIII Турнир городов, 2006 г.). На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа $x$ и $y$ ($x \le y$). Петя записывает на бумажке $x^2$ (квадрат первого числа), а затем заменяет числа на доске числами $x$ и $y - x$, записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию и так далее до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

**3** (Е.Горский, С.Дориченко, XXVIII Турнир городов, 2006 г.). На доске написаны три натуральных числа $a$, $b$, $c$. Петя записывает на бумажку произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

**Задача 4** (XXXVI Турнир городов, 2014 г.). *С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл ее неожиданной, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четверка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок – по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?*

В предыдущих задачах речь шла о последовательностях элементов двух типов (два вида монет, два пола детей), здесь же оценок 4 вида. Поэтому давайте решим сначала более простую версию этой задачи – когда Андрей получал только два вида оценок – двойки и пятерки, по 10 оценок каждого вида.

Снова рассмотрим множество всех возможных положений. Каждому положению поставим в соответствие точку с двумя координатами: количеством двоек (на горизонтальной оси) и количеством пятерок (на вертикальной оси).

Таким образом, получая очередную оценку, мы сдвигаемся на единичный отрезок вправо или вверх, в итоге пройдя из точки $(0, 0)$ в точку $(10, 10)$. Выделим голубым цветом отрезки, которые соответствуют неожиданным оценкам (рис.5).

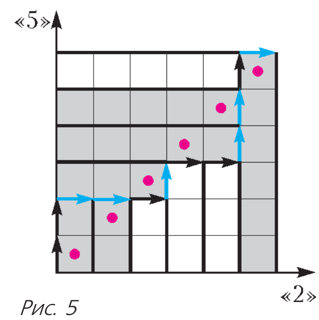


Рис. 5

Заметим, что горизонтальные голубые отрезки расположены над диагональными клетками, а вертикальные – справа от диагональных клеток. (Докажите, что это верно для любой последовательности получения двоек и пятерок.)

Разобьем квадрат $10 \times 10$ на полоски, как в решении предыдущей задачи. Оценка будет неожиданной тогда и только тогда, когда в соответствующей ей полоске будет диагональная клетка. Значит, всего неожиданных оценок столько же, сколько клеток на диагонали, т.е. 10.

Аналогичное рассуждение помогает и в том случае, когда видов оценок не два, а три или четыре, с той разницей, что речь в нем пойдет не о разрезании квадрата, а о распиливании трехмерного и четырехмерного кубов. В данном случае нельзя сказать, что наш прием задачу упростил – наглядной такую интерпретацию назвать сложно... Но всегда полезно знать несколько решений одной задачи, – это помогает лучше в ней разобраться. А теперь приведем более естественное и наглядное решение.

**Решение.** Рассмотрим «первые» оценки – первую двойку, первую тройку, первую четверку и первую пятерку. Первой неожиданной оценкой будет та из этих четырех оценок, которая получена позже других. Аналогично, второй неожиданной оценкой будет та из четырех «вторых» оценок, которая получена позже остальных, и т.д. Значит, всего будет 10 неожиданных оценок. Можно проиллюстрировать это решение так. Рассмотрим прямоугольник $10 \times 4$, в которой столбцы соответствуют оценкам «2», «3», «4», «5» (рис.6). Когда Андрей получает оценку, будем закрашивать клетку в столбце, соответствующем этой оценке, причем закрашиваем самую нижнюю из еще не закрашенных клеток в этом столбце. Тогда неожиданная оценка соответствует клетке, которая закрашивается в своей стро-

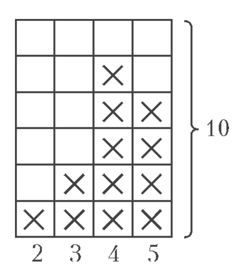


Рис. 6

ке последней (ясно, что в каждой строке будет ровно одна такая клетка).

**Упражнение 4** (И.Изместьев, Всероссийская олимпиада по математике, 1998 г., 4 этап). В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

**Задача 5** (И.Богданов, Московская математическая олимпиада, 2014 г.). *В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашки. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.*

В предыдущих задачах речь шла о процессе, и мы следили за тем, как его параметры меняются со временем. В условии этой задачи не задан процесс, положения которого мы описали бы множеством точек на плоскости. Но, как и в предыдущих двух задачах, речь идет о последовательностях из элементов двух видов: в задаче 2 это были серебряные и золотые монеты, в задаче 3 – мальчики и девочки, здесь – белые и фиолетовые рубашки. Так что попробуем использовать аналогичную наглядную интерпретацию. Поставим точку в начало координат; затем пойдем вдоль ряда рубашек: если очередная рубашка белая – сдвигаем точку на единичный отрезок вверх, если фиолетовая – вправо. Получится ломаная. Переформулируем исходную задачу так, чтобы теперь это была задача про ломаную.

В ряду 21 белая и 21 фиолетовая рубашка – значит, наша ломаная состоит из 21 горизонтального и 21 вертикального отрезков, т.е. соединяет противоположные вершины квадрата $21\times21$. Теперь разберемся, как меняется ломаная, когда мы убираем рубашки из ряда. Уберем одну фиолетовую рубашку – один горизонтальный отрезок ломаной пропадет. Можно представить, что мы выкинули из квадрата весь столбец, в котором лежит этот отрезок, и теперь ломаная соединяет вершины прямоугольника $20\times21$ (рис.7). И так далее – с каждой убранной рубашкой будем выкидывать весь столбец или строку прямоугольника. В конце останется $m = 21 - k$ белых рубашек и столько же фиолетовых, причем

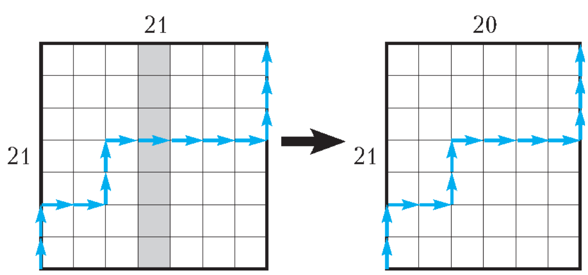


*Рис. 7*

сначала должны идти рубашки одного цвета, затем другого. Значит, в ломаной сначала будут идти $k$ отрезков одного направления, затем другого – т.е. она будет ограничивать квадрат со стороной $m$ (над собой или под собой; рис.8). Иными словами, выкидыванием строчек и столбцов мы должны добиться того, чтобы или фигура над ломаной, или фигура под ломаной превратилась в квадрат со стороной $m$. Несложно понять, что это можно сделать в том и лишь в том случае, когда такой квадрат можно было вырезать в самом начале – либо из фигуры над ломаной, либо из фигуры под ломаной. Итак, задача обрела такой вид:

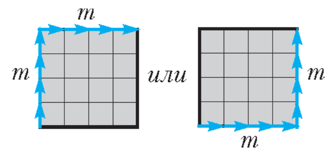


*Рис. 8*

*Квадрат $21\times21$ разрезали ломаной, идущей по границам клеточек из левого нижнего угла в противоположный, смещаясь только вправо и вверх. Квадрат какого наибольшего размера $m$ гарантированно можно вырезать из одной из двух получившихся частей?*

После такой переформулировки задача становится простой: квадрат $11\times11$ точно будет в одной из частей – в той, в которой окажется центральная клетка квадрата $21\times21$. При этом если разрез пройдет по границе центральной клетки, то квадрат $12\times12$ вырезать будет невозможно (рис.9). Поэтому ответ в этой задаче: $m = 11$. Значит, в исходной задаче ответ $k = 21 - m = 10$.

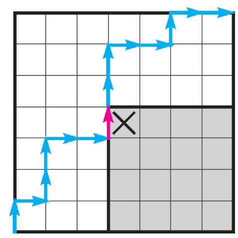

*Рис. 9*

Задача решена, но порассуждаем еще немного.

Рассмотрим положения, выделенные голубой линией (рис.10). Это множество положений, когда рубашек одного цвета ровно 11, а другого меньше 11. Мы попадем в одно из них, потому что не сможем обойти образованную ими «стену».

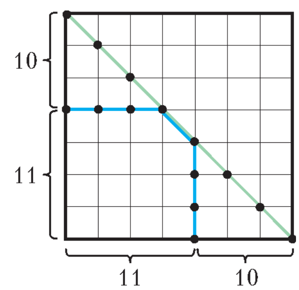


*Рис. 10*

Если мы попадем на правую сторону стены, значит, верхний левый квадрат $11\times11$ ломаная не заденет – он окажется над ломаной. Аналогично, если мы попадем на верхнюю сторону этой стены, то нижний правый квадрат $11\times11$ будет под ломаной.

Переведем решение задачи на тот язык, на котором она сформулирована, – не упоминая диаграммы и ломаные.

**Решение.** Итак, рассмотрим наш ряд рубашек. Будем идти вдоль ряда рубашек и считать, сколько рубашек каждого цвета мы прошли. Когда рубашек какого-то из цветов впервые станет 11, остановимся. Рубашек другого цвета мы прошли не больше 10, значит, перед нами еще хотя бы 11 рубашек другого цвета. Эти 11 рубашек и те 11, после которых мы остановились, оставим, а остальные 10 белых и 10 фиолетовых снимем. Следовательно, $k$, равного 10, нам хватит.

Мы уже знаем, что $k < 10$ может не хватить – для этого нужно, чтобы ломаная касалась центрального квадратика (см. рис. 9). Значит, $k$ равно как минимум 10 для любого ряда рубашек, в котором среди первых 21 рубашки – 10 белых и 11 фиолетовых или, наоборот, 11 белых и 10 фиолетовых.

**Упражнения**

**5.** Можно рассматривать и другую «стену»: например, положения, лежащие на зеленой линии (см. рис.10). Решите задачу с помощью «зеленой стены» и переведите решение на язык условия задачи.

**6.** В ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашки. Петя хочет снять несколько рубашек так, чтобы слева направо шли $p$ белых, затем $q$ фиолетовых. А Вася – так, чтобы слева направо шли $22 - q$ фиолетовых, затем $22 - p$ белых. Докажите, что при любом расположении рубашек из этих желаний осуществимо ровно одно.

* * *

Выше мы много раз интерпретировали задачу как подсчет клеток на прямоугольном поле. Но прямоугольную таблицу, в которой часть клеток отмечена, можно воспринимать как частный случай графа (это двудольный граф: вершины одной доли соответствуют строкам, вершины другой – столбцам, а клетка на пересечении строки и столбца отмечена тогда и только тогда, когда проведено ребро между двумя соответствующими вершинами). Соответственно, вместо рассмотрения таблицы бывает удобно рассмотреть двудольный граф и наоборот.

**Упражнение 7.** Сформулируйте решение упражнения 1 в терминах графов.

Таким образом, идея в более общем виде – это подсчет ребер некоторых графов разными способами.

Мы завершим рассказ одной из ярких задач, в которой помогает эта идея.

**Задача 6** (А.Меркурьев, Санкт-Петербургская олимпиада, 1986 г.). *В куче 1001 камень. Ее произвольно делим на две кучи, подсчитываем количества камней в них и записываем произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделываем ту же операцию: делим на две и записываем произведение чисел камней в двух вновь образованных кучах. Затем ту же операцию повторяем с одной из трех полученных куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равна сумма 1000 записанных произведении?*

**Решение.** Рассмотрим граф на 1001 вершине или, проще говоря, отметим 1001 точку. Пусть две вершины соединены ребром в том случае, когда они лежат в одной куче. Сначала любые две вершины соединены (иначе говоря, граф является полным). Когда мы делим кучу из $a + b$ камней на две кучи из $a$ и $b$ камней, то записываем число $ab$, которое как раз равно количеству ребер, пропадающих из-за того, что $ab$ пар камней перестало лежать в одной куче. Таким образом, сумма чисел равна количеству ребер, которые пропадают после операции. Но, с другой стороны, рано или поздно будут стерты все ребра полного графа, значит, сумма записанных чисел будет равна

$$C_{1001}^2 = \frac{1001 \cdot 1000}{2} = 500500.$$

Задача решена. Как видим, решение этой задачи излагать в терминах графов наиболее естественно. Но можно и здесь рассмотреть таблицу $n \times n$ (где $n$ – количество вершин), в которой отмечено, какие вершины с какими соединены. В такой таблице на главной диагонали нет отмеченных клеток (так как вершины не соединяются сами с собой), кроме того, она симметрична относительно этой диагонали (так как если из вершины $A$ ведет ребро в вершину $Б$, то это же ребро ведет из вершины $Б$ в вершину $A$). Поэтому можно оставить только клетки под диагональю. Получится «лестница» из $n - 1$ ступенек (рис.11), каждая клетка которой соответствует ребру полного графа на $n$ вершинах.

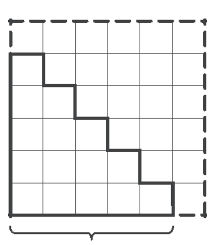

*Рис. 11*

**Упражнение 8.** Изложите решение задачи 6 в терминах подсчета числа клеток в этой лестнице.

## Задачи для самостоятельного решения

**7** (XXXIV Турнир городов, 2013). Двадцать детей – десять мальчиков и десять девочек – встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка – сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.

**8** (В.Произволов, М1879). На левую и правую чашки весов положили по 100 гирек из набора 1 г, 2 г, 3 г, …, 200 г. *Значимостью* гирьки с какой-либо чашки назовем количество тех гирек другой чашки, которые легче ее. Докажите, что весы покажут равновесие тогда и только тогда, когда сумма значимостей гирек левой чашки равна сумме значимостей гирек правой чашки.

**9** (А.Шаповалов, IV Турнир памяти А.П.Савина, 1998 г.). В клетчатом квадрате $6 \times 6$, вначале пустом, Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел в них будет равна 60.

**10** (А.Эвнин, XXXIV Турнир городов, 2012 г.). Таблица $10 \times 10$ заполняется по правилам игры «Сапер»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

**11.** Сначала в каждой клетке таблицы $10 \times 10$ было записано число 10. Каждый раз выбирается какая-то клетка, на листок записывается

а) количество соседних (по стороне) клеток, в которых стоит число не меньшее, чем в выбранной;

б) сумма чисел в соседних (по стороне) клетках;

после чего число в выбранной клетке уменьшается на 1.

Какой может быть сумма всех чисел на листке, когда все числа в таблице станут нулями?

**12** (XXI Турнир памяти А.П.Савина, 2015 г.). У каждого из 16 детей было по 8 конфет. Каждую минуту один из детей платит в кассу столько рублей, у скольких детей конфет не меньше, чем у него, а затем съедает одну свою конфету. Сколько денег может оказаться в кассе, когда все конфеты будут съедены?

**13** (XXI Турнир памяти А.П.Савина, 2015 г.). На доске написано несколько натуральных чисел. Каждую минуту Ваня выбирает какое-нибудь число и записывает на листок бумаги произведение всех остальных чисел, после чего выбранное число уменьшает на 1. Когда все числа на доске станут нулями, Ваня сложит все числа на листке. Докажите, что сумма, которая у него получится, не зависит от порядка, в котором он будет выбирать числа.

**14** (XXI Турнир памяти А.П.Савина, 2015 г.). Каждый раз одну из куч камней делят на две и записывают число $ab(a + b)$, где $a$ и $b$ – количества камней в двух новых кучках. Сначала была одна куча из $N$ камней, а в конце остались только кучи из одного камня. Чему может быть равна сумма записанных выражений?

**15** (И.Изместьев, Всероссийская олимпиада по математике, заключительный этап, 1995 г.). Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

*Примечание*. Автор всех задач этой статьи, где не указано иное, – Е.Бакаев.