УДК 514.765

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ ГРУППЫ ЛИ

С. В. Ведерников

§ 1. ОБЗОР И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В 1925 году П. А. Широков открыл новый класс однородных пространств — симметрические пространства [43], которые были подробно изучены в работах Э. Картана в связи с общей теорией полупростых групп Ли [26, 45]. В частности, Картаном было установлено, что всякое симметрическое пространство может быть получено на основе задания пары (G, Φ), где G — группа Ли, а Φ — ее аналитический инволютивный автоморфизм. Геометрия симметрических пространств также может быть изучена на основе пары (G, Φ) и ее локального аналога — пары (g, φ), где g — алгебра Ли группы Ли G, а $\varphi = d\Phi_e$. Можно сказать, что симметрическое пространство порождается группой (Id, Φ) автоморфизмов группы Ли G. В. И. Ведерниковым в работе [12] введено естественное обобщение понятия симметрического пространства и введен новый класс однородных пространств, названный им классом Ф-пространств, который определяется заданием пары (G, Φ), где G — группа Ли, и Φ — ее произвольный автоморфизм. Однородные Ф-пространства изучались также в работе Дж. Вольфа и А. Грея [46].

Н. А. Степанов в работах [28—30] изучил условия редуктивности Ф-пространств и выделил важный класс регулярных Ф-пространств. Регулярные Ф-пространства были подвергнуты детальному изучению в работах А. С. Феденко и его учеников [37—40]. В этих работах, результаты которых изложены в обзоре [17] и монографии [41], изучение регулярных Ф-пространств связывалось с изучением многообразий с регулярным идемпотентным умножением. Н. А. Степанов в работах [34—36] ввел понятие инвариантного оснащения Ф-пространств, позволяющее естественным способом определить в данном Ф-пространстве инвариантную связность. Для Ф-пространств с инвариантным оснащением указан способ получения всех инвариантных связностей на основе специального класса левоинвариантных связностей на группе Ли G. Приведен критерий существования инвариантного оснащения и указана связь существования инвариантного оснащения с регулярностью Ф-пространств. В работах [31—33] были подробно исследованы оснащения для случая $G=\mathrm{GL}(n, R)$, а Ф — внутренний автоморфизм или $\Phi(a)=(a^{-1})'$. Эти исследования Н. А. Степанова были продолжены в работах В. В. Балащенко [1—10] для случая линейных групп Ли. Здесь существенно использовалось то, что эти группы вложимы в линейное пространство, в котором существует инвариантная тривиальная связность. В этих работах описаны специальные инвариантные оснащения и индуцированные ими связности для случая однородных Ф-пространств вещественных ортогональных и унимодулярных групп. В частном случае Евклидова пространства геометрию соответствующих однородных пространств изучал В. Л. Штукарь [44].

В указанных работах часто, наряду с автоморфизмами Ф, приходилось использовать и степени этих автоморфизмов и, следовательно, использовать группу автоморфизмов, порожденную элементом Ф. Точнее, следует при определении Ф-пространства писать, что задана пара (G, Γ), где Г — группа гладких автоморфизмов, порожденных автоморфизмом Ф. В частности, в случае симметрических пространств, т. е. в случае инволютивности Ф группа Г содержит только один элемент, отличный от тождественного.

И. В. Чекаловым в работе [42] проведена классификация римановых однородных пространств, порожденных автоморфизмами, в частности унимодулярными автоморфизмами полупростых комплексных алгебр Ли. Важной, с точки зрения классификации однородных пространств, порожденных периодическими автоморфизмами простых компактных алгебр Ли, явилась работа Б. П. Комракова [27].

В работе В. И. Ведерникова и Л. И. Ведерниковой [13] изучался случай, когда дана тройка (G, Φ, Ψ), где Ф и Ψ — перестановочные автоморфизмы группы Ли G, порождающие соответствующие Ф и Ψ-пространства. В этом случае вводятся условия, которые выполняются, если элемент Ф-пространства принадлежит подпространству, порожденному автоморфизмом Ψ.

В ряде работ, в частности, [18—21], указан общий метод построения геометрии однородных пространств, состоящий в систематическом построении морфизмов G-пространств. В случае, когда однородные пространства порождены автоморфизмами групп Ли G, а группа Ли G — линейная, указан специальный класс морфизмов, названных автором полиномиальными морфизмами. Они позволяют эффективно строить морфизмы, а следовательно, развивать геометрию этих пространств. При этом существенно используется дифференциальное продолжение однородных пространств. Это оказалось удобным использовать для изучения геометрии некоторых классов матричных пространств [14—16, 22, 23]. Метод полиномиальных морфизмов использовали в своих исследованиях А. А. Бурдун [11]. Л. Д. Духвалов [24, 25]. В связи с этим естественно поставить задачу о построении серии однородных пространств и их морфизмов.

В настоящей статье будут изложены основные результаты, полученные в общей теории однородных пространств, порожденных парой (G, Γ), где G — группа Ли, а Γ — конечная абелева группа автоморфизмов группы Ли G. Для простоты изложения будем требовать инволютимность автоморфизмов группы Γ, хотя многие результаты верны и в общем случае. Особое внимание будет уделено морфизмам, порождаемым парой (G, Γ), которые обобщают понятие полиномиальных морфизмов.

§ 2. ГЛОБАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ ПАРЫ

Определение. Пару (G, Γ), где G — группа Ли, а Γ — конечная группа инволютивных гладких автоморфизмов этой группы, назовем глобальной парой. Пару (g, γ), где g — алгебра Ли группы G, а γ — конечная группа инволютивных автоморфизмов g, назовем локальной парой.

Так как всякая конечная группа, состоящая из элементов второго порядка, абелева, то Γ — всегда абелева группа, состоящая точно из 2^n элементов, где n — число базисных элементов группы. Этот факт мы записываем символически в виде $\Gamma = [\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n]$. Такое же условие выполняется и для элементов группы γ.

Глобальная пара (G, Γ) порождает локальную пару (g, γ), где g — алгебра Ли группы Ли G, а $\varphi \in \gamma$, имеет вид $\varphi = d\Phi_e$, $\Phi \in \Gamma$. Если дана локальная пара (g, γ), то имеется единственная односвязная связная группа Ли G, для которой алгебра g будет ее алгеброй Ли. Тогда автоморфизм $\varphi \in \gamma$ определит автоморфизм Φ группы G, так что $\varphi = d\Phi_e$. Из инволютивности φ, очевидно, следует инволютивность Φ. Так как элементы $\varphi \in \gamma$ образуют группу, то и множество элементов $\Phi \in \Gamma$ таких, что $d\Phi_e = \varphi$, также образует группу $(\Phi \in \Gamma, \Psi \in \Gamma \Rightarrow \Phi \circ \Psi \in \Gamma$, ибо $d(\Phi \circ \Psi) = \varphi \circ \psi \in \gamma)$. Отсюда следует, что для любой локальной пары найдется хотя бы одна, порождающая ее, глобальная пара.

Ясно, что всякая глобальная пара (G, Γ) (локальная пара (g, γ)) порождает пару вида (G, Γ_1) $((g, \gamma_1))$, где Γ_1 (γ_1) — подгруппа $\Gamma(\gamma)$.

§ 3. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ПАРОЙ

Если (G, Γ) — глобальная пара, а Γ_1 — произвольная подгруппа Γ, то определится однородное пространство

$$Q(\Gamma_1) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 = a\Phi_1(a^{-1}), \ldots, x_n = a\Phi_n(a^{-2}), \ a \in G\}, \tag{1}$$

где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in \Gamma_1$, и $\Gamma_1 = [\Phi_1, \ldots, \Phi_n]$, т. е. элементы $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ порождают Γ_1. Обозначение $Q(\Gamma_1)$ обусловлено независимостью $Q(\Gamma_1)$ от выбора множества элементов, порождающих Γ_1. Действие группы G в $Q(\Gamma_1)$ определяется естественным образом при помощи отображения

$$G \times Q(\Gamma_1) \to Q(\Gamma_1) : [a, (x_1, \ldots, x_n)] \to \\ \to [ax_1\Phi_1(a^{-2}), \ldots, ax_n\Phi_n(a^{-1})]. \quad (2)$$

В качестве начального элемента в однородном пространстве будем брать элемент $(e, \ldots e) \in Q(\Gamma_1)$ (здесь $a = e \Rightarrow x_i = e$). В качестве основного частного случая получим однородное симметрическое пространство

$$Q(\Phi) = \{x \mid x = a\Phi(a^{-1}), a \in G\}, \quad (3)$$

если выбрать $\Gamma_1 = [\Phi]$, $\Phi \in \Gamma$. Отметим, что

$$Q(\Gamma_1) \subset G \times \ldots \times G, \quad Q(\Phi) \subset G.$$

Стационарной группой начального элемента $(e, \ldots, e)$ однородного пространства $Q(\Gamma_1)$ будет группа

$$H(\Gamma_1) = \{h \in G \mid \Phi(h) = h, \ \Phi \in \Gamma_1\}. \quad (4)$$

В частности, если $\Gamma_1 = [\Phi]$, получим

$$H(\Gamma_1) = H^{\Phi} = \{h \in G \mid \Phi(h) = h\}.$$

Соответственно, для локальной пары (g, γ) определится подалгебра алгебры Ли g

$$h(\gamma_1) = \{\theta \in g \mid \varphi(\theta) = \theta\}, \ \forall \varphi \in \gamma_1. \quad (5)$$

Если локальная пара (g, γ_1) порождена глобальной парой (G, Γ_1), то, очевидно, $h(\gamma_1)$ будет алгеброй Ли подгруппы $H(\Gamma_1)$ группы Ли G. Подгруппа $H(\Gamma_1)$ удовлетворяет условию

$$\Psi(H(\Gamma_1)) \subset H(\Gamma_1), \quad \forall \Psi \in \Gamma.$$

В самом деле, если

$$h \in H(\Gamma_1) \Leftrightarrow \Phi(h) = h, \quad \forall \Phi \in \Gamma_1 \Rightarrow \Phi[\Psi(h)] = \\ = (\Psi \circ \Phi)(h) = \Psi(h) \Rightarrow \Psi(h) \in H(\Gamma_1).$$

Поэтому, наряду с парами (G, Γ_1), можно рассматривать пары $(H(\Gamma_1), \Gamma_2)$, где Γ_2 состоит из ограничений элементов $\Phi \in \Gamma_1$ на подгруппу $H(\Gamma_1)$. Здесь Γ_2 — произвольная подгруппа Γ. Таким образом, глобальная пара (G, Γ) порождает серию глобальных пар $(H(\Gamma_1), \Gamma_2)$. Соответственно порождается серия подпространств.

§ 4. МОРФИЗМЫ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Если дана глобальная пара (G, Γ), последовательность $\xi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ и $(x_1, \ldots, x_k)$, где $x_i \in G$, то определится элемент

$$f_\xi(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \cdot \Phi_1(x_2) \cdot (\Phi_1 \circ \Phi_2)(x_3) \ldots (\Phi_1 \circ \ldots \circ \Phi_{k-1})(x_k). \quad (6)$$

Если $\Psi \in \Gamma$, то в G вводится структура G-пространства отображением

$$\alpha_0 : G \times G \to G : (a, x) \to a\Psi(a^{-1}).$$

Многообразие G с введенной таким образом структурой G-пространства будем обозначать через G_Ψ.

Теорема 1. Если $x_i \in G_{\Phi_i}$, то $f_\xi(x_1, \ldots, x_k) \in G_\Psi$, где $\Psi = \Phi_1 \circ \ldots \circ \Phi_k$, и отображение

$$f_\xi : G_{\Phi_1} \times \ldots \times G_{\Phi_k} \to G_\Psi : (x_1, \ldots, x_k) \to f_\xi(x_1, \ldots, x_k) \qquad (7)$$

есть морфизм G-пространств. Соответственно определится специальный морфизм [18]

$$\sigma : (x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) \to M_{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})} = \{(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m} \mid f_\xi(x_1, \ldots, x_k) \in Z\},$$

где $(i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_m)$ перестановка из элементов $(1, 2, \ldots, n)$, а Z — инвариантная часть G_Ψ.

Доказательство. Так как при преобразовании с помощью элемента $a \in G$ $x_i \to a x_i \Phi_i(a^{-1})$, то

$$f_\xi(x_1, \ldots, x_k) = x_1\Phi_1(x_2) \ldots (\Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \ldots \circ \Phi_{k-1})(x_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a x_1 \Phi_1(a^{-1}) \Phi_1 [a x_2 \Phi_2(x_2)] (\Phi_1 \circ \Phi_2) [a x_3 \Phi_3(a^{-1})] \ldots$$

$$\ldots (\Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \ldots \circ \Phi_{k-1}) [a x_k \Phi_k(a^{-1})] = a x_1 \Phi_1(x_2) \ldots$$

$$\ldots (\Phi_1 \circ \ldots \circ \Phi_{k-1})(x_k) \ldots \Phi_1 \circ \ldots \circ \Phi_k(a^{-1}) = a f_\xi(x_1, \ldots, x_k)\, \Psi(a^{-1}).$$

Это означает, что отображение f_ξ есть морфизм G-пространств. Второе утверждение теоремы следует непосредственно из определения специального морфизма σ. В дальнейшем будем, наряду с отображением f_ξ, рассматривать также и его ограничение на инвариантные части. В частности, часто будем рассматривать ограничение f_ξ на однородное пространство $Q(\Gamma)$, которое будет орбитой начального элемента $(e, \ldots, e)$.

Теорема 2. Пусть (G, Γ) — глобальная пара и Γ_1, Γ_2 — подгруппы Γ. Тогда если $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$, то существует морфизм

$$f = Q(\Gamma_2) \to Q(\Gamma_1).$$

Если $\Gamma_1 = \Gamma_2$, то $Q(\Gamma_1) = Q(\Gamma_2)$, т. е. $Q(\Gamma_1)$ не зависит от выбора порождающих группу Γ_1 элементов $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$.

Доказательство. Пусть $\Gamma_1 = [\Phi_1, \ldots, \Phi_r]$, $\Gamma_2 = [\Psi_1, \ldots, \Psi_s]$. Соответственно

$$Q(\Gamma_1) = \{(x_1, \ldots, x_r) \mid x_i = a\Phi_i(a^{-1}),\ a \in G\},$$

$$Q(\Gamma_2) = \{(y_1, \ldots, y_s) \mid y_j = a\Psi_j(a^{-1}),\ a \in G\}.$$

Из $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ следует, что для $\Psi_j \in \Gamma_2$ имеет место представление

$$\Psi_j = \Phi_{l_1} \circ \ldots \circ \Phi_{l_t}.$$

Соответственно определится морфизм G-пространств

$$f_{\xi_j} : Q(\Gamma_2) \to G_{\Psi_j} : (x_1, \ldots, x_r) \to f_{\xi_j}(x_1, \ldots, x_r) = y_j, \qquad (8)$$

где $\xi_j=(\Phi_{l_1},\ldots,\Phi_{l_l})$. Легко подсчитать, что

$$x_i=a\Phi_i(a^{-1})\Rightarrow y_j=a\Psi_j(a^{-1})\in Q(\Psi_j).$$

В самом деле,

$$y_j=a\Phi_{l_1}(a^{-1})\,\Phi_{l_1}(a)\,(\Phi_{l_1}\circ\Phi_{l_2})(a^{-1})\ldots(\Phi_{l_1}\circ\ldots\circ\Phi_{l_l})(a^{-1})=$$
$$=a\Psi_j(a^{-1})\in Q(\Psi_j).$$

Поэтому определится гладкий морфизм

$$f=(f_{\xi_1},\ldots,f_{\xi_s}):Q(\Gamma_1)\to Q(\Gamma_2):(x_1,\ldots,x_r)\to(y_1,\ldots,y_s), \qquad (9)$$

где $y_j=f_{\xi_j}(x_1,\ldots,x_r)$. Последнее утверждение следует из доказанного, ибо $\Gamma_1=\Gamma_2$ эквивалентно $\Gamma_1\subset\Gamma_2$ и $\Gamma_2\subset\Gamma_1$ и, следовательно, наряду с морфизмом f, существует обратный морфизм $f^{-1}:(y_1,\ldots,y_s)\to(x_1,\ldots,x_r)$.

Описанный в теореме морфизм однородных пространств может рассматриваться как морфизм в произвольную инвариантную часть прямого произведения $G_{\Psi_1}\times\ldots\times G_{\Psi_s}$, а также он может быть естественно продолжен на G-пространство $G_{\Phi_1}\times\ldots\times G_{\Phi_r}$. Отметим, что $Q(\Gamma_1)$ будет орбитой G-пространства $G_{\Phi_1}\times\ldots\times G_{\Phi_r}$, и поэтому $Q(\Gamma_1)$ есть подмногообразие многообразия $G_{\Phi_1}\times\ldots\times G_{\Phi_r}$. Так как прямое произведение симметрических пространств

$$Q(\Phi_1)\times\ldots\times Q(\Phi_r)$$

есть инвариантная часть G-пространства $G_{\Phi_1}\times\ldots\times G_{\Phi_r}$, содержащая $Q(\Gamma_1)$, $\Gamma_1=[\Phi_1,\ldots,\Phi_r]$, то морфизм f можно продолжить на это произведение симметрических пространств. Если принять терминологию, согласно которой элементы симметрических пространств называют образами симметрии, то отсюда следует, что каждый элемент $Q(\Gamma_1)$ является набором образов симметрии, так как $Q(\Gamma_1)$ не совпадает с $Q(\Phi_1)\times\ldots\times Q(\Phi_r)$, (образы симметрии находятся в определенной зависимости). В рассмотренных нами примерах эта зависимость часто оказывается условием принадлежности одного образа другому (как множеств). Поэтому будем употреблять условную терминологию: если $(x_1,\ldots,x_r)\in Q(\Gamma_1)$, то образы симметрии связаны условиями принадлежности. Аналитически эти условия выражены в теореме.

Теорема 3. Для элементов $(x_1,\ldots,x_r)\in Q(\Gamma_1)$ выполняются тождества

$$x_{i_1}\Phi_{i_1}(x_{i_2})\ldots\left(\Phi_{i_2}\circ\ldots\circ\Phi_{i_{k-1}}\right)\left(x_{i_k}\right)=x_{j_1}\Phi_{j_1}(x_{j_2})\ldots$$
$$\ldots\left(\Phi_{j_1}\circ\ldots\circ\Phi_{j_{k-1}}\right)\left(x_{j_k}\right), \qquad (10)$$

где $\Gamma_1=[\Phi_1,\ldots,\Phi_r]$, $\Phi_{i_1},\ldots,\Phi_{i_k}\in\Gamma_1$, а $\begin{pmatrix} i_1\ldots i_k\\ j_1\ldots j_k\end{pmatrix}$ — произвольная подстановка.

Доказательство. Теорема следует из равенств

$$x_{i_1}\Phi_{i_1}(x_{i_2})\ldots\left(\Phi_{i_1}\circ\ldots\circ\Phi_{i_{k-1}}\right)\left(x_{i_k}\right)=a\Phi_{i_1}\circ\ldots\circ\Phi_{i_k}(a^{-1});$$
$$\Phi_{i_1}\circ\ldots\circ\Phi_{i_k}=\Phi_{j_1}\circ\ldots\circ\Phi_{j_k}.$$

Условия (10) будем называть в дальнейшем условиями принадлежности. Важным частным случаем глобальных пар будет тот случай, когда группа G допускает линейное представление

$$\alpha: G\to G_\alpha, \qquad (11)$$

где G_α — линейная группа, т. е. подгруппа $\mathrm{GL}(n, R)$. В этом случае выделяются наборы $\xi=(\Phi_1,\ldots,\Phi_r)$, для которых имеет место

$$\Phi_1\circ\ldots\circ\Phi_r=\mathrm{Id}. \qquad (12)$$

Тогда морфизм f_ξ есть морфизм в однородное пространство G_{Id}, в котором группа Ли G действует «при помощи сопряжения», т. е. структура G-пространства в G_{Id} определяется отображением

$$\alpha_0: G\times G_{\mathrm{Id}}\to G_{\mathrm{Id}}:(a, x)\to axa^{-1}=I(a)x. \qquad (13)$$

Инвариантное отображение определится как

$$I_r: G_{\Phi_1}\times\ldots\times G_{\Phi_r}\to R:(x_1,\ldots,x_r)\to \mathrm{sp}\circ\alpha\circ[f_\xi(x_1,\ldots,x_r)]^k. \qquad (14)$$

Если группа Ли линейная, то полагаем $\alpha=\mathrm{Id}$.

Отметим, что для произвольного набора $(\Phi_1,\ldots,\Phi_r)$ определяется набор $\xi=(\Phi_1,\ldots,\Phi_r,\Phi_1^{-1},\ldots,\Phi_r^{-1})$, для которого выполняется условие (12) и, следовательно, определятся инвариантные отображения I_r, определенные заданием натурального числа r. Как известно [41], в случае симметрических пространств определяется понятие подпространства симметрического пространства. Совершенно аналогично можно ввести понятие подпространства и в случае глобальных пар.

Определение. Пусть (G, Γ) — глобальная пара, G_1 — подгруппа Ли группы Ли G, удовлетворяющая условию

$$\Phi(G_1)\subset G_1, \quad \forall\Phi\in\Gamma_1,$$

где Γ_1 — подгруппа группы Γ. Тогда пару $(G_1, \tilde{\Gamma}_1)$, где $\tilde{\Gamma}_1$ состоит из ограничений элементов Γ_1 на подгруппу Ли G_1, назовем подпространством пары (G, Γ). Подпространствами будем называть также G_1-орбиту элемента $(e,\ldots,e)$ в $Q(\Gamma_1)$.

Теорема 4. Пусть (G, Γ) — глобальная пара, Γ_1 — произвольная подгруппа группы автоморфизмов группы Ли G, принадлежащая централизатору группы Γ, а Γ_2 — произвольная подгруппа Γ. Тогда определится подпространство $(H(\Gamma_2), \check{\Gamma}_1)$, где $\check{\Gamma}_1$ состоит из ограничений элементов Γ_1 на подгруппу $H(\Gamma_2)$.

Доказательство. Следует лишь проверить, что

$$\Phi[H(\Gamma_2)]\subset H(\Gamma_2), \quad \forall\Phi\in\Gamma. \qquad (15)$$

В самом деле, так как

$$H(\Gamma_2)=\{h\in G \mid \Psi(h)=h,\ \forall\Psi\in\Gamma_2\},$$

то

$$h\in H(\Gamma_2)\Leftrightarrow\Psi(h)=h,\quad \forall\Psi\in\Gamma_2\Rightarrow\Psi[\Phi(h)]=(\Phi\circ\Psi)(h)=$$
$$=\Phi(h)\Rightarrow\Phi(h)\in H(\Gamma_2)\Rightarrow\Phi[H(\Gamma_2)]\subset H(\Gamma_2),\quad \forall\Phi\in\Gamma_2.$$

§ 5. РЕДУКТИВНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ ЛИ

Всякое симметрическое пространство редуктивно и задание инволютивного автоморфизма в алгебре Ли определяет редуктивное разложение этой алгебры. Аналогичное редуктивное разложение имеется и в случае задания локальной пары (g, γ), т. е. верна следующая

Теорема 5. Пусть (g, γ) — локальная пара и $\gamma=[\varphi_1, \ldots, \varphi_p]$. Тогда для алгебры Ли g определится редуктивное разложение

$$g=h\oplus M, \tag{16}$$

где

$$h=h(\gamma)=\{\theta\in g \mid \varphi(\theta)=0,\ \forall\varphi\in\gamma\};$$
$$M=\operatorname{Ker} P,\quad P=P_1\circ\ldots\circ P_p,\quad P_k=\frac{1}{2}(\mathrm{Id}+\varphi_k). \tag{17}$$

Кроме того, M является прямой суммой

$$M=m_1\oplus m_2\oplus\ldots\oplus m_p;\quad m_i=(\mathrm{Id}-P_i)\circ P_{i+1}\circ\ldots\circ P_p(g). \tag{18}$$

Доказательство. Для симметрической пары (G, φ_p) определится редуктивное разложение алгебры Ли

$$g=h_p\oplus m_p,$$

где

$$h_p=\{\theta\in g \mid \varphi_p(\theta)=\theta\};$$
$$m_p=\{\theta\in g \mid \varphi_p(\theta)+\theta=0\Leftrightarrow P_p(\theta)=0\},$$

что влечет

$$\varphi_p \mid h_p=\mathrm{Id},\quad \varphi_p \mid m_p=-\mathrm{Id}.$$

В силу перестановочности автоморфизмов группы γ, получим $\varphi_{p-1}(h_p)\subseteq h_p$, так как

$$\varphi_p(\theta)=\theta\Rightarrow\varphi_p[\varphi_{p-1}(\theta)]=\varphi_{p-1}(\theta)\Rightarrow\varphi_{p-1}(\theta)\in h_p.$$

Поэтому φ_{p-1} можно ограничить на h_p, и для симметрической пары (h_p, φ_{p-1}) получим редуктивное разложение

$$h_p=h_{p-1}\oplus m_{p-1},$$

где

$$h_{p-1}=\{\theta\in g \mid \varphi_p(\theta)=\theta,\ \varphi_{p-1}(\theta)=\theta\},$$
$$m_{p-1}=\{\theta\in g \mid \varphi_p(\theta)=\theta,\ (\varphi_{p-1}+\mathrm{Id})(\theta)=0\}. \tag{19}$$

Продолжая этот процесс, получим разложение

$$g=h\oplus M,\quad M=m_1\oplus m_2\oplus\ldots\oplus m_p,$$

где

$$h=\{\theta\in g\,|\,\varphi(\theta)=\theta,\ \forall\varphi\in\gamma\},$$

$$m_i=\{\omega\in g\,|\,\varphi_p(\theta)=\theta,\ \ldots,\ \varphi_{i+1}(\theta)=\theta,\ P_i(\theta)=0\}.$$

Так как $h\subset h_i$ для всякого $i=1, 2, \ldots, p$, то, в силу редуктивности разложения

$$h_i=h_{i-1}\oplus m_{i-1},$$

следует редуктивность разложения (16). Более того, имеем

$$\mathrm{Ad}(h)(m_i)\subset m_i,\quad i=1, 2, \ldots, p.$$

Эквивалентность (18) и (19) следует из свойств коммутирующих (в силу коммутируемости φ_i) проекторов P_i. Ясно также, что разложение (16) не зависит от порядка элементов $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_p$, порождающих γ. Покажем, что M не зависит от выбора элементов γ, порождающих γ. Для доказательства обозначим через s число всех элементов γ, и тогда γ состоит из элементов

$$\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots, \varphi_r,\ \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_s.$$

Соответственно определится редуктивное разложение

$$g=h_0\oplus m_0,$$

где

$$h_0=\{\omega_0\in g\,|\,\varphi_i(\omega_0)=\omega_0\},\quad i=\overline{1,\ s}.$$

Так как $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ порождают γ, то $h_0=h$. Очевидно также, что $m_0\subset m$, тогда из соображений размерности получим $m_0=m$. Если дана глобальная пара (G, Γ), то соответственно определится однородное пространство

$$Q(\Gamma)=\{(x_1, \ldots, x_r)\,|\,x_i=a\Phi_i(a^{-1})\}.$$

Так как стационарная подгруппа точки $(e, \ldots, e)$ совпадает с подгруппой

$$H(\Gamma)=\{h\in G\,|\,\Phi_i(h)=h\},$$

алгеброй Ли которой будет подалгебра

$$h(\gamma)=\{\omega\in g\,|\,\varphi_i(\omega)=\omega\},$$

то отсюда следует

Теорема 6. Однородное пространство Q редуктивно.

Доказательство. Редуктивное разложение (16) есть редуктивное разложение, определенное для однородного пространства Q.

Замечание. Рассматривается лишь тот случай (достаточно общий), когда однородное пространство Q изоморфно факторпространству $G/H(\Gamma)$. Ясно также, что все доказанное верно для случая пары (G, Γ_1), где Γ_1-произвольная подгруппа группы Γ.

§ 6. КАТЕГОРИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ ПАР

Множество глобальных пар определяет категорию, если определить морфизм глобальных пар следующим образом.

Определение. Пусть (G, Γ) и (G', Γ') — глобальные пары. Тогда гладкий гомоморфизм

$$\alpha : G \to G'$$

назовем морфизмом глобальных пар, если выполняется условие: для всякого $\Phi' \in \Gamma'$ найдется $\Phi \in \Gamma$, что

$$\Phi' \circ \alpha = \alpha \circ \Phi. \tag{20}$$

Теорема 7. Если $\alpha : G \to G'$ — морфизм глобальных пар (G, Γ) и (G', Γ'), то

$$\alpha [H(\Gamma)] \subset H'(\Gamma'), \tag{21}$$

и существует естественный α-морфизм

$$f = f(\alpha) : Q(\Gamma) \to Q(\Gamma'). \tag{22}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из определения

$$H(\Gamma) = \{h \in G \mid \Phi(h) = h, \ \forall \Phi \in \Gamma\},$$

что влечет

$$\alpha [H(\Gamma)] = \{h_1 \in G_1 \mid h_1 = \alpha(h)\}.$$

Но тогда

$$h_1 \in \alpha [H(\Gamma)] \Leftrightarrow (h_1 = \alpha(h), \quad \Phi(h) = h, \ \forall \Phi \in \Gamma) \Rightarrow (\Phi'(h_1)) =$$
$$= \Phi' \circ (\alpha(h)) = \alpha [\Phi(h)] = \alpha(h) = h_1 \Rightarrow h_1 \in H'(\Gamma') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha [H(\Gamma)] \subset H'(\Gamma').$$

Второе утверждение теоремы следует из того, что Γ состоит из конечного числа элементов $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_p$, и тогда

$$Q(\Gamma) = \{(x_1, \ldots, x_s) \mid x_i = a\Phi_i(a^{-1})\}.$$

Если $\Gamma' = [\Phi_1', \ldots, \Phi_r']$, то, по определению морфизма, для всякого $\Phi_i' \in \Gamma'$ найдется такой элемент $\Psi_i \in \Gamma$, что

$$\alpha \circ \Psi_i = \Phi_i' \circ \alpha.$$

Соответствующий α-морфизм G-пространств теперь можно описать формулами

$$f(\alpha)(x_1, \ldots, x_s) = (y_1, \ldots, y_r),$$

где

$$y_l = \alpha(a)\Phi_l'[\alpha(a^{-1})] = \alpha(a)\alpha[\Psi_l(a^{-1})] = \alpha[a\Psi_l(a^{-1})]. \quad (23)$$

То, что это отображение f является α-морфизмом, т. е. для него выполняется условие

$$f(ax) = \alpha(a) f(x), \quad f = f(\alpha) \Leftrightarrow f \circ T_a = T'_{\alpha(a)} \circ f,$$

проверяется непосредственным вычислением. В самом деле,

$$f(ax) = f \circ T_a(x_1, \ldots, x_s) = f[ax_1\Phi_1(a^{-1}), \ldots, ax_s\Phi_s(a^{-1})] =$$
$$= f[ab_1\Phi_1((ab_1)^{-1}), \ldots, ab_s\Phi_s((ab_s)^{-1})] =$$
$$= \{\alpha[ab_1\Psi_1((ab_1)^{-1})], \ldots, \alpha[ab_s\Psi_s((ab_s)^{-1})]\} =$$
$$= T_\alpha(a)[\alpha(b_1\Psi_1(b_1^{-1})), \ldots, \alpha(b_s\Psi_s(b_s^{-1}))] = \alpha(a) f(x).$$

Для α-морфизма $f = f(\alpha)$ выполняется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \arrow[d, "\pi'"] \\ Q(\Gamma) \arrow[r, "f"] & Q(\Gamma'), \end{tikzcd}$$

где

$$\pi: G \to Q(\Gamma): a \to \pi(a) = (x_1, \ldots, x_s), \quad x_l = a\Phi_l(a^{-1});$$
$$\pi': G' \to Q(\Gamma'): a' \to \pi'(a') = (y_1, \ldots, y_p), \quad y_j = a\Phi_j'(a^{-1}).$$

Соответствующее рассмотрение можно провести и для локальных пар. Отметим, что всякий морфизм α глобальных пар определяет отображение

$$\tilde{\alpha}: \Gamma' \to \Gamma: \Phi' \to \Phi,$$

удовлетворяющее условию

$$\tilde{\alpha}(\Phi') = \Phi \Rightarrow \alpha \circ \Phi = \Phi' \circ \alpha.$$

Это условие дает следующие равенства: если $\Phi' = \Phi_1' \circ \Phi_2'$, то $\alpha \circ \Phi_i = \Phi_i' \circ \alpha$ влечет $\alpha \circ \Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_1' \circ \Phi_2' \circ \alpha$, т. е.

$$\tilde{\alpha}[\Phi_1' \circ \Phi_2'] = \tilde{\alpha}[\Phi_1'] \circ \tilde{\alpha}[\Phi_2']. \quad (24)$$

Таким образом, отображение $\tilde{\alpha}$ является гомоморфизмом группы Γ' в группу Γ.

Если $\Phi_1', \ldots, \Phi_p'$ — базис группы Γ' и соответствующие им элементы обозначим через $\Psi_1, \ldots, \Psi_p$, то в силу (24), можно полагать, что произведение $\Phi_i' \circ \Phi_j'$ соответствует $\Psi_i \circ \Psi_j$, т. е. отображение $\tilde{\alpha}$ есть гомоморфизм группы Γ' в группу Γ. (Если это не так, то можно внести изменение в отображение $\tilde{\alpha}$ так, чтобы указанное условие выполнялось, причем отображение $\alpha: G \to G'$ не изменяется). Если образ $\tilde{\alpha}(\Gamma')$ обозначить через Γ_1, то определится глобальная пара (G, Γ_1) и морфизм глобальных пар (G, Γ_1) в (G', Γ'). В случае, когда α — изоморфизм, условие (20) можно записать в виде

$$\Phi = \alpha^{-1} \circ \Phi' \circ \alpha$$

и тогда отображение $\tilde{\alpha}$ определяется отображением α. Если отображение α имеет нетривиальное ядро N, то, если $n \in N$, условие (20) влечет

$$\alpha[\Phi(n)] = \Phi'[\alpha(n)] = e,$$

т. е.

$$\Phi(N) \subset N, \quad \forall \Phi \in \Gamma.$$

Определение. Пусть (G, Γ) — глобальная пара, причем в G имеется нормальный делитель N такой, что

$$\Phi(N) \subset N, \quad \forall \Phi \in \Gamma, \tag{25}$$

тогда определится глобальная пара (G_1, Γ_1), где $G_1 = G/N$, а Γ_1 состоит из автоморфизмов Φ_1, которые индуцируются отображением $\Phi \in \Gamma$ в G_1, т. е.

$$\Phi_1(aN) = \Phi(a)N, \quad \Phi \in \Gamma. \tag{26}$$

Будем говорить, что глобальная пара (G_1, Γ_1) получена факторизацией из глобальной пары (G, Γ) по нормальному делителю N. Используя это определение, получим, что всякий гомоморфизм глобальных пар α порождает глобальную пару (G_1, Γ_1), которая получается факторизацией пары (G, Γ) по ядру гомоморфизма α. При этом определится естественный гомоморфизм

$$\sigma: G \to G/N: a \to aN,$$

причем имеем

$$\pi[\Phi(a)] = \Phi_1[\pi(a)]. \tag{27}$$

Отметим, что если даны такие Φ, $\Psi \in \Gamma$, что индуцированные на $G_1 = G/N$ автоморфизмы совпадают, т. е.

$$\pi[\Phi(a)] = \pi[\Psi(a)],$$

что влечет

$$(\Psi \circ \Phi)(a) = an, \quad n \in N, \quad \forall a \in G, \tag{28}$$

то, исключая случай, когда выполняется (27), будем иметь: отображение $\Gamma \to \Gamma_1 : \Phi \to \Phi_1$, где Φ_1 получается индуцированием Φ на G/N, является биективным отображением. В этом случае оказывается, что гомоморфизм σ является морфизмом глобальной пары (G, Γ) в глобальную пару $(G/N, \Gamma_1)$. В самом деле, по определению Φ_1, имеем

$$\pi \circ \Phi = \Phi_1 \circ \pi.$$

В случае, когда для некоторого $\Phi \in \Gamma$ выполняется условие

$$\Phi(a) = an, \quad n \in N, \quad \forall a \in G,$$

что эквивалентно условию

$$x = a\Phi(a^{-1}) = n \in N,$$

а Φ-пространство

$$Q(\Phi) = \{x \mid x = a\Phi(a^{-1}),\ \forall a \in G\} \subset N,$$

то соответствующий образ при факторизации будет тривиальным (сводится к единичному элементу). Из условия $\alpha(N) \subset N$ следует, что гомоморфизм $\alpha: G \to G'$ индуцирует гомоморфизм

$$\alpha_1: G_1 = G/N \to G': aN \to \alpha(a) = \alpha_1(aN) \Leftrightarrow \alpha_1 \circ \pi = \alpha.$$

Пусть $\alpha: G \to G'$ — морфизм глобальной пары (G, Γ) в глобальную пару (G', T') такой, что выполняется (25). Тогда определится факторизация (G_1, Γ_1) глобальной пары (G, Γ) по ядру гомоморфизма α и гомоморфизм $\alpha_1: G \to G'$. Соответственно определится отображение $\Gamma' \to \Gamma_1$, где образом $\Phi' \in \Gamma$ является автоморфизм Φ_1, индуцированный элементом $\Phi \in \Gamma$, соответствующим Φ'. Так как

$$\alpha \circ \Phi = \Phi' \circ \alpha;$$

$$\pi \circ \Phi = \Phi_1 \circ \pi;$$

$$\alpha_1 \circ \pi = \alpha,$$

то имеет место

$$\alpha \circ \Phi = \Phi' \circ \alpha \Rightarrow \alpha_1 \circ \pi \circ \Phi = \Phi' \circ \alpha \Rightarrow \alpha_1 \circ \Phi_1 \circ \pi = \Phi' \circ \alpha_1 \circ \pi \Rightarrow \alpha_1 \circ \Phi_1 [\pi(a)] = \Phi' \circ \alpha_1 [\pi(a)],\ \forall \pi \in \pi(G) = G/N \Rightarrow \alpha_1 \circ \Phi_1 = \Phi' \circ \alpha_1.$$

Полученное равенство показывает, что имеет место

Теорема 8. Пусть $\alpha: G \to G'$ — морфизм глобальной пары (G, Γ) в глобальную пару (G', Γ') такой, что выполняется (24). Тогда определится морфизм глобальной пары (G_1, Γ_1), полученной из (G, Γ) при помощи факторизации по ядру гомоморфизма α_1 в глобальную пару (G', Γ').

Предположим теперь, что гомоморфизм α — мономорфизм. В этом случае из

$$\alpha \circ \Phi = \Phi' \circ \alpha,\ \forall \Phi \in \Gamma'$$

следует, что

$$\Phi'[\alpha(a)] = \alpha[\Phi(a)],$$

т. е. автоморфизм Φ' переводит в себя образ гомоморфизма α и

$$\Phi'[\operatorname{Im} \alpha] \subset \operatorname{Im} \alpha.$$

Поэтому определится глобальная пара $(G_1, \check{\Gamma})$, где $G_1 = \operatorname{Im} \alpha$, а $\check{\Gamma}$ состоит из ограничений элементов Γ на G_1. Гомоморфизм $\alpha: G \to G_1$ будет изоморфизмом и, кроме того, условие

$$\alpha \circ \Phi = \Phi' \circ \alpha$$

будет выполняться и для ограничений Φ' на G_1. Поэтому определится морфизм глобальной пары (G, Γ) в глобальную пару

$(G, \check{\Gamma}')$. При соответствующем выборе подгруппы Γ_0 группы Γ будем иметь: глобальные пары (G, Γ_0) и $(G, \check{\Gamma}')$ будут изоморфны. Отметим, что из включения (21) следует, что определяется канонический морфизм факторпространства $G/H(\Gamma)$ в $G/H'(\Gamma')$. Совершенно аналогичное определение морфизма имеет место и для локальных пар с очевидными естественными изменениями.

§ 7. ОТОБРАЖЕНИЯ СИММЕТРИИ

В изучаемых нами однородных пространствах естественным способом вводятся отображения симметрии, которые описываются следующей теоремой.

Теорема 9. Пусть (G, Γ) — глобальная пара, а $\tilde{\Gamma}_1$ — подгруппа группы $\mathrm{Aut}\, G$ гладких автоморфизмов группы G, принадлежащая централизатору группы Γ в $\mathrm{Aut}\, G$ и состоящая из инволютивных автоморфизмов. Тогда

а) В многообразии $Q(\Gamma_1)$, где Γ_1 подгруппа $\tilde{\Gamma}_1$, определится группа преобразований симметрии S_Ψ, $\Psi \in \tilde{\Gamma}_1$, где

$$\begin{gathered} S_\Psi(x_1, \ldots, x_2) = [\Psi(x_1), \ldots, \Psi(x_r)], \\ (x_1, \ldots, x_r) \in Q(\Gamma_1). \end{gathered} \tag{29}$$

б) Если обозначить через f морфизм, указанный в теореме 2, то симметрия S_Ψ в $Q(\Gamma)$ связана с симметрией $\tilde{S}_\Psi$ в $Q(\Gamma_1)$ соотношением

$$\tilde{S}_\Psi \circ f = f \circ S_\Psi.$$

в) Если $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma$, то точка $(e, \ldots, e) \in Q(\Gamma_1)$ будет изолированной неподвижной точкой преобразования S_Ψ. Если же Γ_1 — собственная подгруппа группы $\tilde{\Gamma}_1$, то определится множество M неподвижных точек для всех S_Ψ, $\Psi \in \Gamma_1$. При этом оказывается, что M инвариантно относительно действия группы $H(\Gamma_1)$ (подгруппы $H(\tilde{\Gamma}_1)$), и $H(\Gamma_1)$ — орбита M_0 точки $(e, \ldots, e) \in Q(\Gamma_1)$ будет изолированной частью M.

Доказательство. а) Если $\Gamma_1 = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_r\}$, то для $(x_1, \ldots, x_r) \in Q(\Gamma_1)$ имеем

$$x_i = a\Phi_i(a^{-1}),$$

и тогда, в силу $\Phi_i \circ \Psi = \Psi \circ \Phi_i$, $\forall \Psi \in \Gamma_1$, получим

$$\Psi(x_i) = \Psi(a)\Phi_i[\Psi(a^{-1})],$$

т. е.

$$S_\Psi[x_1, \ldots, x_r] \in Q(\Gamma_1).$$

Это означает, что S_Ψ является преобразованием в $Q(\Gamma_1)$. Это преобразование гладкое, так как Ψ — гладкий автоморфизм. Инволютивность S_Ψ очевидна, т. е. S_Ψ — преобразование симметрии. Ясно также, что все симметрии S_Ψ, $\Psi \in \Gamma$, образуют группу.

б) Для доказательства условия б) достаточно проверить, что

$$f[(\Psi(x_1), \ldots, \Psi_i(x_2)] = [\Psi(y_1), \ldots, \Psi(y_r)],$$

где y_i вычисляется по формулам (29), т. е.

$$y_i = x_1 \Psi_1(x_2) \ldots (\Psi_1 \circ \ldots \circ \Psi_{i-1})(x_i).$$

Отсюда следует, что

$$\Psi(y_i) = \Psi(x_1) \Psi_1 [\Psi(x_2), \ldots, (\Psi \circ \ldots \circ \Psi_{i-1})(x_i)].$$

Для доказательства утверждения в) рассмотрим морфизм

$$f: Q(\Gamma_1) \to Q(\tilde{\Gamma}),$$

где

$$Q(\tilde{\Gamma}) = \{(y_1, \ldots, y_k) \mid y_i = a\Psi_i(a^{-1}), a \in G\}, \quad \tilde{\Gamma} = (\Psi_1, \ldots, \Psi_k).$$

Как показано ранее, этот морфизм можно записать в виде

$$y_1 = x_{i_1} \Phi_{i_1}(x_{i_2}) \ldots \left(\Phi_{i_1} \circ \ldots \circ \Phi_{i_{e-1}}\right)\left(x_{i_e}\right) \ldots$$

Отсюда немедленно следует, что преобразование, индуцированное в $Q_1 = Q(\tilde{\Gamma})$ отображением симметрии S_Ψ, также есть симметрия в $Q(\tilde{\Gamma})$. В самом деле, это преобразование $\tilde{S}_\Psi$ определяется коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{S_\Psi} & Q \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Q_1 & \xrightarrow{\tilde{S}_\Psi} & Q_1 \end{array}; \quad S_\Psi[f(x)] = f[S_\Psi(x)],$$

и поэтому

$$\tilde{S}_\Psi(y_1, \ldots, y_k) = (\tilde{S}_\Psi \circ f)[x_1, \ldots, x_r) = (f \circ \tilde{S}_\Psi)[x_1, \ldots, x_r] =$$
$$= f[\Psi(x_1), \ldots, \Psi(x_r)] = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k),$$

где, в силу $\Phi_i \circ \Psi = \Psi \circ \Phi_i$, $\forall \Psi \in \Gamma_1$, $\Psi_i \in \Gamma$, получим

$$y_1 = \Psi(x_{i_1})(\Phi_{i_1} \circ \Psi)(x_{i_2}) \ldots \left(\Phi_{i_1} \circ \ldots \circ \Phi_{i_{e-1}} \circ \Psi\right)\left(x_{i_e}\right) =$$
$$= \Psi\left[x_{i_1} \Phi_{i_1}(x_{i_2}) \ldots \left(\Phi_{i_1} \circ \ldots \circ \Phi_{i_{e-1}}\right)\left(x_{i_e}\right) = \Psi(y_1)\right.$$

и, аналогично, $\Psi(y_i) = y_i$. Таким образом,

$$\tilde{S}_\Psi[y_1, \ldots, y_n] = (\Psi(y_1), \ldots, \Psi(y_n)) = S_\Psi(y),$$

где лишь следует помнить об области определений S_Ψ, и здесь этой областью определения является Q_1.

Покажем теперь, что M инвариантно при всяком действии группы $H_1(\tilde{\Gamma})$. В самом деле, если $h \in H_1$ и $x=(x_1, \ldots, x_r) \in M$ (или Q), то

$$S_\Psi(x)=x, \quad \forall \Psi \in \tilde{\Gamma} \Leftrightarrow [\Psi(x_1), \ldots, \Psi(x_r)]=(x_1, \ldots, x_r) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Psi(x_i)=x_i \forall_i \Rightarrow \Psi[hx_i\Phi_i(h^{-1})]=\Psi(h)\Psi(x_i)\Phi_i[\Psi(h^{-1})]=$$
$$=hx_i\Phi_i(h^{-1})=T_h(x_i) \Rightarrow \Psi(T_hx)=T_hx,$$

откуда следует инвариантность M при действии группы $H_1(\tilde{\Gamma})$ в Q. Покажем еще, что в случае, когда $\Gamma_1=\tilde{\Gamma}=[\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$, точка $(e, \ldots, e) \in Q$ является изолированной неподвижной точкой отображения S_Ψ. Для этого заметим, что Q — гладкое подмногообразие в $M_1 \times \ldots \times M_r$, где $M_i=\{z_i \mid z_i=a\Phi_i(a^{-1}), a \in G\}$, и отображение симметрии S_Ψ для $\forall \Psi \in \Gamma$ естественно продолжается на $M_1 \times \ldots M_r$. Подмногообразие Q, очевидно, инвариантно относительно S_Ψ, $\forall \Psi \in \Gamma$. Покажем, что группа симметрий в $M_1 \times \ldots \times M_r$ имеет изолированную неподвижную точку $(e, \ldots, e)$ (а следовательно, тоже самое можно сказать для преобразований симметрий в Q), т. е. существует окрестность точки $(e, \ldots, e)$ в $M_1 \times \ldots \times M_r$ такая, что

$$S_\Psi(x)=x, \quad x=(x_1, \ldots, x_r) \in U \Rightarrow x=(e, \ldots, e).$$

В самом деле,

$$S_\Psi(x)=x, \quad \forall \Psi \in \Gamma \Rightarrow \Psi(x_i)=x_i, \quad i=1, \ldots, r,$$
$$\forall \Psi \in \Gamma \Rightarrow \Phi_i(x_i)=x_i, \quad i=\overline{1, r}.$$

Но так как для симметрического пространства $M_i=\{x_i \mid x_i= =a\Phi_i(a^{-1}), a \in G\}$ выполняется: для $\forall x_i \in M_i$ найдется окрестность U_i точки $e \in G$ такая, что из $x_i \in U_i$, $\Phi_i(x_i)=x_i$, следует, что $x_i=e$. Тогда если положить $U=U_1 \times \ldots \times U_r$, имеем

$$\Phi_i(x_i)=x_i, \quad i=\overline{1, r}, \quad x_i \in U_i \Rightarrow x_i=e.$$

Следовательно,

$$S_\Psi(x)=x, \quad x \in U \Rightarrow x=(e, \ldots, e),$$

т. е. $(e, \ldots, e)$ есть изолированная неподвижная точка для группы симметрий $\{S_\Psi\}$, $\Psi \in \Gamma$, действующих в $M_1 \times \ldots \times M_r$. Но тогда тем более это будет иметь место для группы симметрий, действующих в Q. Далее, так как при действии группы $\tilde{\Gamma}$ как группы симметрий в $Q(\tilde{\Gamma})$ имеется изолированная неподвижная точка $(e, \ldots, e)$, то определится подмножество

$$M_0=f^{-1}[(e, \ldots, e)]=\{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i=a\Phi_i(a^{-1})\}.$$

Но

$$y=(y_1, \ldots, y_k)=(e, \ldots, e) \Leftrightarrow y_i=h\Psi_i(h^{-1})=e \Leftrightarrow h \in \tilde{H}=$$
$$=\{h \in G \mid \Psi(h)=h\}, \quad \forall \Psi \in \tilde{\Gamma}.$$

Вспоминая теперь, что

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=(x_1, \ldots, x_r), \quad x_i=h\Phi_i(h^{-1}),$$
$$y=(y_1, \ldots, y_k), \quad y_k=h\Psi_k(h^{-1}),$$

получаем

$$f^{-1}(e, \ldots, e)=\{(x_1, \ldots, x_r) \mid x_i=h\Phi_i(h^{-1}), \ h\in\tilde{H}\}.$$

Теперь легко проверить, что всякая точка $x\in M_0$ является неподвижной при симметриях S_Ψ, $\Psi\in\tilde{\Gamma}$. В самом деле,

$$\Psi(x_i)=\Psi[h\Phi_i(h^{-1})]=\Psi(h)\Phi_i[\Psi(h^{-1})]=$$
$$=h\Phi_i(h^{-1})=x_i \Rightarrow S_\Psi(x)=x, \quad \forall x\in M_0.$$

Таким образом, M_0 есть $\tilde{H}$-орбита с начальным элементом $(e, \ldots, e)$, и она состоит из неподвижных точек для группы симметрий, порожденной $\tilde{\Gamma}$. Теперь покажем, что $f(M)$ состоит из неподвижных точек при симметриях S_Ψ, $\Psi\in\tilde{\Gamma}$, действующих в $Q(\tilde{\Gamma})$. В самом деле, из $f\circ S_\Psi=\tilde{S}_\Psi\circ f$ следует

$$S_\Psi(x)=x \Rightarrow S_\Psi(f(x))=f[S_\Psi(x)]=f(x),$$

т. е. $f(x)$ неподвижна относительно симметрий S_Ψ, порожденных группой симметрий Γ_1 в Q_1.

Для доказательства изолированности подмногообразия M_0 в M, т. е. для доказательства существования такой открытой окрестности U_0 множества M_0, которому не принадлежит $M\setminus M_0$, воспользуемся тем, что точка $(e, \ldots, e)$ — изолированная неподвижная точка для группы симметрий в Q. Это означает, что существует такая окрестность U точки $(e, \ldots, e)$ в Q_1, которая не содержит более неподвижных точек для всех симметрий S_Ψ, $\Psi\in\Gamma_1$. Но тогда ввиду $f^{-1}(e, \ldots, e)=M_0 \Rightarrow M_0\in U=f^{-1}(U)$, где U_0 — открыто в силу непрерывности f.

З а м е ч а н и е. Преобразование симметрии S_Ψ при данном $a\in G$ определит сопряженную симметрию

$$S_\Psi^a=T_a\circ S_\Psi\circ T_{a^{-1}},$$

которую в координатах можно записать в виде

$$S_\Psi^a(x_1, \ldots, x_r)=\left(S_\Psi^a(x_1), \ldots, S_\Psi^a(x_r)\right),$$

где

$$S_\Psi^a(x_i)=z\Psi(x_i)\Phi_i(z^{-1}), \quad z=a\Psi(a^{-1}).$$

Легко подсчитать, что если M множество точек при симметрии S_Ψ, то множеством неподвижных точек симметрии S_Ψ^a будет множество $T_a(M)$.

Т е о р е м а 10. При всякой симметрии S_Ψ, $\Psi\in\tilde{\Gamma}$, сохраняется редуктивное разложение

$$g=h\oplus m_1\oplus\ldots\oplus m_r,$$

построенное в п. 5 теоремы 5. Это означает, что

$$\psi(h)\in h, \quad \psi(m_i)\subset m_i, \quad \psi=d\Psi_e, \quad \forall\Psi\in\tilde{\Gamma}.$$

Доказательство. Оно следует из того, что элементы $\Psi\in\tilde{\Gamma}$ перестановочны с элементами $\Phi\in\Gamma$, что влечет также свойство для их дифференциалов ψ и φ. В самом деле,

$$\omega\in h \Leftrightarrow \varphi(h)=h, \quad \varphi=d\Phi_e,$$

и тогда для $\psi(\omega)$ получим

$$\varphi[\psi(\omega)]=\psi[\varphi(\omega)]=\psi(\omega)\Rightarrow\psi(\omega)\in h.$$

Это и означает инвариантность h при симметрии, определенной $\Psi\in\tilde{\Gamma}$. Аналогичное рассуждение может быть проведено и для $\forall m_i$.

Теорема 11. Группа симметрий $\{S_\Psi, \Psi\in\Gamma\}$, действующая в $Q(\Gamma)$, индуцирует в касательном пространстве $T_{(e,\ldots,e)}[Q(\Gamma)]$ группу линейных преобразований, неподвижными элементами которой будет подпространство этого касательного пространства, которое является касательным подпространством к подпространству, порожденному группой $\tilde{\Gamma}$ в $Q(\Gamma)$.

Доказательство. Напомним, что подпространство, порожденное подгруппой $\tilde{\Gamma}$, есть подмногообразие

$$Q(\tilde{\Gamma})=\{(y_1,\ldots,y_r)\mid y_i=h\Phi_i(h^{-1}), \quad h\in H(\tilde{\Gamma})\},$$

где

$$H(\tilde{\Gamma})=\{h\in G\mid \Psi(h)=h, \ \forall\Psi\in\tilde{\Gamma}\}.$$

Соответственно касательное подпространство к подпространству $Q(\tilde{\Gamma})$ в точке $(e,\ldots,e)$ состоит из векторов

$$(\omega_1,\ldots,\omega_r), \quad \omega_i=\theta-\varphi_i(\theta), \quad \text{где } \theta\in h(\tilde{\gamma}),$$

$$h(\tilde{\gamma})=\{\theta\in g\mid \psi(\theta)=\theta, \ \forall\psi\in\tilde{\gamma}\}.$$

Теперь покажем, что и подпространство неподвижных точек $(dS_\Psi)_{(e,\ldots,e)}$ также состоит из этих векторов. Для этого запишем основное условие для неподвижных точек отображения dS_Ψ:

$$dS_\Psi: T_{(e,\ldots,e)}(Q)\to T_{(e,\ldots,e)}(Q): (\omega_1,\ldots,\omega_r)\to(dS(\omega_1),\ldots,dS(\omega_r)),$$

и используя тот факт, что

$$S_\Psi(x_1,\ldots,x_r)=(\Psi(x_1),\ldots,\Psi(x_r))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(dS_\Psi)_e(\omega_1,\ldots,\omega_r)=(\psi(\omega_1),\ldots,\psi(\omega_r)),$$

тогда

$$(dS_\Psi)_e(\omega_1,\ldots,\omega_r)=(\omega_1,\ldots,\omega_r), \quad \forall\Psi\in\tilde{\Gamma}\Leftrightarrow\psi(\omega_i)=\omega_i, \quad \forall\psi\in\gamma.$$

Но так как $\omega_i=\theta-\varphi_i(\theta)$, то

$$\psi(\theta)-\psi[\varphi_i(\theta)]=\theta-\varphi_i(\theta).$$

В силу перестановочности $\psi\circ\varphi_i=\varphi_i\circ\psi$ (так как $\gamma_1\subset\gamma$), это условие перепишется в виде

$$\varphi_i[\theta-\psi(\theta)]=\theta-\psi(\theta)\Rightarrow\theta-\psi(\theta)=h,$$

где

$$h=\{\omega\in g \mid \varphi(\omega)=\omega,\ \forall\varphi\in\gamma\},$$

и так как $\psi\in\gamma$, то, в частности,

$$\psi[\theta-\psi(\theta)]=\theta-\psi(\theta)=\psi(\theta)-\theta=-[\theta-\psi(\theta)].$$

Окончательно получаем

$$\psi(\theta)=\theta,\quad \forall\psi\in\tilde{\gamma}.$$

Так как теми же условиями определяется касательное пространство к подпространству $Q(\tilde{\Gamma})$, то теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балащенко В. В.*, Многообразие линейных комплексов в IR как φ-пространство. Тезисы докл. IV Республ. конф. математиков Белоруссии. Минск, 1975, 73
2. —, Регулярные φ-пространства ортогональной группы и линейчатая геометрия. (Редколлегия ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н»). Минск, 1977. 38 с., библиогр. 20 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 1 июня 1977 г., № 2125—77 Деп.) (РЖМат, 1977, 9А856 ДЕП)
3. —, Индуцированные связности на регулярных φ-пространствах линейных групп Ли. Тезисы докл. V Прибалт. геом. конф. Друскининкай, 1978, 8
4. —, Индуцированные связности на регулярных φ-пространствах. Тезисы докл. школы по теории операторов в функц. пр-вах. Минск, 1978, 15—16
5. —, Инвариантные оснащения и индуцированные связности на регулярных φ-пространствах линейных групп Ли. Докл. АН БССР, 1979, *23*, № 3, 209—212 (РЖМат, 1979, 8А706)
6. —, Геометрия однородных φ-пространств линейных групп Ли. Тезисы докл. VII Всес. конф. по совр. пробл. геометрии. Минск, 1979, 22
7. —, О геометрии регулярных φ-пространств линейных групп Ли. Тезисы докл. конф. молодых ученых и специалистов БПИ, БГУ, МРТИ. Минск, 1980, 3—4
8. —, Об однородных φ-пространствах унимодулярных групп. Всес. симпозиум по теории симметрии и ее обобщениям, тезисы докл. Кишинев, 1980, 1—2
9. —, О специальных инвариантных оснащениях на однородных φ-пространствах линейных групп Ли. Тезисы докл. V Республ. конф. математиков Белоруссии. Гродно, 1980, 31
10. —, О периодических однородных пространствах классических основных групп Ли. В кн.: «Актуальные проблемы общественных и естественных наук». Минск, «Вышэйшая школа», 1981, 52
11. *Бурдун А. А.*, Операции над векторами в $^1R_4$ как морфизмы G-пространств. Тезисы докл. V Прибалт. геом. конф. Друскининкай, 1978, 16
12. *Ведерников В. И.*, Симметрические пространства и сопряженные связности. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1965, *125*, № 1, 7—59 (РЖМат, 1966, 5А465)
13. —, *Ведерникова Л. И., Об условиях принадлежности.* Тезисы докл. V Республ. конф. математиков Белоруссии. Гродно, 1980, 32

14. —, *Ведерников С. В.*, Области симметрических пространств, порожденных группой $SL(2, C)$. Тезисы докл. Всес. конф. по неевклидовой геом. «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, 1976, 41
15. —, —, Однородные аффинорные пространства и плоские сети в аффинном пространстве. Тезисы докл. V Прибалт. геом. конф. Друскининкай, 1978, 19
16. —, —, *Цвир Т. В.*, Морфизмы симметрических пространств, порожденных группой неевклидовых движений. Тезисы докл. Всес. конф. Вильнюс, 1975, 50—51.
17. —, *Феденко А. С.*, Симметрические пространства и их обобщения. В сб.: «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 14 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1976, 249—280 (РЖМат, 1976, 6А574)
18. *Ведерников С. В.*, Специальные морфизмы G-пространств. В сб.: «Пробл. геометрии. Т. 7 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 49—68 (РЖМат, 1976, 9А651)
19. —, Геометрия основного пространства. Дифференц. геометрия многообразий фигур (Калининград), 1979, № 10, 22—29 (РЖМат, 1980, 1А853)
20. —, Морфизмы пространства пар и их геометрические приложения. Тезисы докл. VII Всес. конф. по совр. пробл. геометрии. Минск, 1979, 41
21. —, Однородные пространства, порожденные алгеброй и их морфизмы. Изв. вузов. Мат., 1979, № 11, 77—80 (РЖМат, 1980, 5А672)
22. —, Геометрия пространств пар. Редкол. ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». Минск, 1980. 38 с., библиогр. 17 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 15 апр. 1980 г., № 1454—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 8А647ДЕП.)
23. —, Инвариантные оснащения G-пространств, порожденных алгебрами. Тезисы докл. V Республ. конф. математиков Белоруссии. Гродно, 1980, 33
24. *Духвалов Л. Д.*, Некоторые симметрические пространства над алгеброй квазиматриц. Тезисы докл. V Республ. конф. математиков Белоруссии. Гродно, 1980, 35
25. —, О некоторых однородных пространствах над алгеброй квазиматриц. Вестн. Белорус. ун-та, 1982, № 2, 65—67 (РЖМат, 1982, 10А531)
26. *Картан Э.*, Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М. ИЛ., 1949, 384 с.
27. *Комраков Б. П.*, Однородные пространства, порожденные автоморфизмами, и инвариантные геометрические структуры. В сб.: «Пробл. геометрии. Т. 7. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 81—104 (РЖМат, 1976, 9А652)
28. *Степанов Н. А.*, О редуктивности факторпространств, порожденных эндоморфизмами групп Ли. Изв. вузов. Мат., 1967, № 2, 74—79 (РЖМат, 1967, 7А313)
29. —, Основные факты теории φ-пространств. Изв. вузов. Мат., 1967, № 3, 88—95 (РЖМат, 1967, 8А281)
30. —, Однородные 3-циклические пространства. Изв. вузов. Мат., 1967, № 12, 65—74 (РЖМат, 1968, 5А635)
31. —, φ-пространства в случае полной линейной группы. Изв. вузов. Мат., 1972, № 3, 70—79 (РЖМат, 1972, 7А586)
32. —, Об одном классе регулярных φ-пространств. Тезисы докл. IV Республ. конф. математиков Белоруссии. Минск, 1975, 86—87
33. —, Регулярные φ-пространства полной линейной группы. Изв. вузов. Мат., 1976, № 6, 118—121 (РЖМат, 1977, 2А756)
34. —, Инвариантные оснащения φ-пространств. Тезисы докл. Всес. конф. по неевклидовой геом. «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, 1976, 187
35. —, Инвариантные связности оснащенных φ-пространств. Тезисы докл. VII Всес. конф. по совр. пробл. геометрии. Минск, 1979, 190
36. —, О φ-пространствах, допускающих инвариантное оснащение. Изв. вузов. Мат., 1982, № 2, 63—70 (РЖМат, 1982, 7А792)
37. *Феденко А. С.*, Периодические автоморфизмы классических компактных групп. Revue Roumaine de math. pures et apple., 1970, *15*, 1375—1378
38. —, Однородные φ-пространства и пространства с симметриями. Вестн. Белорус. ун-та, 1972, сер. 1, № 2, 25—30 (РЖМат, 1972, 10А492)

39. —, Пространства, определяемые эндоморфизмами групп Ли (Ф-пространства). Тр. Геометр. семинара, ВИНИТИ АН СССР, 1973, *4*, 231—267 (РЖМат, 1974, 3А551)
40. —, Периодические однородные пространства классических групп серии А. В сб.: «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 5. Калининград, 1974, 184—200 (РЖМат, 1975, 4А795)
41. —, Пространства с симметриями. Минск, Белорус. ун-т, 1977, 168 с. (РЖМат, 1977, 11А595)
42. *Чекалов И. В.*, Классификация римановых однородных пространств, порожденных автоморфизмами. (Редколлегия ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.»). Минск, 1977. 17 с., библиогр. 13 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 31 янв. 1977 г., № 332—77 Деп.) (РЖМат, 1977, 6А575 ДЕП.)
43. *Широков П. А.*, Постоянные поля векторов и тензоров в Riemann'овых пространствах. Изв. физ.-мат. об-ва. Казань, 1925, 86—114
44. *Штукарь В. Л.*, Однородные Ф-пространства группы движений пространства Евклида E_n. Вестн. Белорус. ун-та. 1976, сер. 1, № 1, 82—83 (РЖМат, 1976, 6А673)
45. *Cartan E.*, Sur une classe ramaquable d espaces de Riemann. Bull. Soc. Math. France, 1926, *54*, 214—264
46. *Wolf J. A., Gray A.*, Homogeneous space defined by Lie group automorphisms. I. J. Different. Geom., 1968, *2*, № 1, 77—114 (РЖМат, 1969, 9А327)