

ГАРМОНИЧЕСКИЕ И СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Е. Д. Соломенцев

1. Введение. В развитии теории гармонических и субгармонических функций за последние годы можно выделить следующие направления: 1) изучение граничных свойств функций и, в связи с этим, выделение и изучение различных классов функций; 2) исследования, связанные с теоремами типа теорем Фрагмена — Линделёфа для гармонических и субгармонических функций; 3) развитие аксиоматической теории субгармонических функций и обобщенной теории потенциала; 4) развитие теории интегральных представлений гармонических функций; 5) изучение плюри-субгармонических и плюригармонических функций; 6) изучение поведения гармонических и субгармонических функций на римановых поверхностях и многообразиях.

Предлагаемый обзор имеет целью дать некоторое представление об указанных направлениях. При этом не предполагалось приводить перечень всей имеющейся литературы, и поэтому литературные указания не претендуют на полноту. Приводимые результаты в целях краткости и удобообозримости, как правило, даются в упрощенных формулировках.

В настоящем обзоре не рассматриваются методы решения краевых задач, приложения гармонических функций к исследованию строения римановых поверхностей и физико-механические приложения.

В качестве монографии общего характера, охватывающей многие важные результаты, полученные примерно до 1958 г., следует указать книгу Цудзи [1].

2. Граничные свойства и классы гармонических и субгармонических функций и их обобщений. Еще в 1928 г. Литлвуд установил, что субгармоническая функция $u(z)$, $z = re^{i\theta}$, оп-

ределенная в единичном круге и принадлежащая классу A , т. е. удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta}) d\theta = O(1), \quad r \rightarrow 1, \quad (1)$$

где $u^+ = u$, если $u \geq 0$, и $u^+ = 0$, если $u \leq 0$, имеет почти всюду на единичной окружности радиальные граничные значения $U(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta})$. Условие (1) равносильно требованию существования

у функции $u^+(z)$ гармонической мажоранты во всем круге. В работах И. И. Привалова и П. И. Кузнецова понятие субгармонических функций класса A было обобщено на гомеоморфные шару области общего вида в пространстве произвольного числа измерений, и было установлено существование почти всюду граничных значений по нормали. Оказалось, однако, что принадлежность субгармонической функции класса A и даже ее ограниченность или непрерывность не обеспечивают существования угловых граничных значений (в случае круга число $U(e^{i\theta_0})$ называется угловым граничным значением функции $u(z)$ в точке $e^{i\theta_0}$, если равенство $U(e^{i\theta_0}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}} u(z)$ осуществляется для любого способа

стремления z к $e^{i\theta_0}$ при условии $|\arg(z - e^{i\theta_0})| < \pi/2$). Относящиеся сюда примеры см. в работах Цудзи [2] и Е. Д. Соломенцева [3]. В случае гармонической функции $u(z)$ условие (1) обеспечивает существование угловых граничных значений (см., например, Е. Д. Соломенцев [1]). Опираясь на представление Ф. Рисса субгармонической функции класса A

$$u(z) = w(z) - \iint_{|\zeta| < 1} G(z, \zeta) d\mu_\zeta, \quad (2)$$

где $w(z)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(z)$ в круге $|z| < 1$, $G(z, \zeta)$ — функция Грина и $\mu = \mu(e)$ — соответствующая функции $u(z)$ неотрицательная функция множества (распределение масс), и используя метод Литлвуда, Толстед [1, 2] нашел для функции $u(z)$, определенной в круге, достаточное условие существования угловых граничных значений (в терминах $\mu(e)$) в случае абсолютно непрерывной функции $\mu(e)$. Достаточные условия для случая областей и распределений масс общего вида в пространстве произвольного числа измерений, используя методы И. И. Привалова, получил Е. Д. Соломенцев [1, 2]. Приведем для характеристики результатов одну из теорем в упрощенной формулировке:

Пусть субгармоническая функция $u(P)$ принадлежит классу A в области D пространства E^n ($n \geq 2$) с достаточно гладкой границей Γ . Если, кроме того, 1) в случае $n \geq 3$ при некотором α , $0 \leq \alpha < 1$, выполняется условие

$$\int_{0 < \sigma < \sigma_1} (\sigma\psi)^{\frac{n-1+\alpha}{1+\alpha}} d\omega_Q < +\infty,$$

а в случае $n=2$ выполняется условие

$$\int_{0 < \sigma < \sigma_1} \sigma\psi \ln^+(\sigma\psi) d\omega_Q < +\infty,$$

где $d\omega$ —элемент объема, $\psi = \psi(Q)$ — производная функции множества $\mu(e)$, σ —расстояние от точки Q до Γ ; 2) на Γ существует множество \bar{E} полной меры, в каждой точке Q_0 которого при любом заданном φ , $0 < \varphi < \pi/2$, можно построить такой сколь угодно малый конус S с вершиной Q_0 и углом при вершине 2φ , имеющий нормаль в Q_0 осью вращения, что в нем $\mu(e)$ будет абсолютно непрерывна, то $u(P)$ имеет почти всюду на Γ угловые граничные значения.

Характер стремления к граничным значениям изучался в работах Каваками [1], Е. Д. Соломенцева [1, 2], Толстеда [2], Хубера [1] и Цудзи [2]. Оказывается (формулировка для случая круга), что почти всюду существуют не только радиальные граничные значения, но и граничные значения по лучам, составляющим с радиусом, проведенным в граничную точку, постоянный угол, меньший $\pi/2$.

В связи с изучением граничных свойств субгармонических функций И. И. Привалов выделил ряд интересных классов этих функций (подклассы класса A) в ограниченных областях и дал для них характеристические интегральные представления по граничным значениям. Работа по изучению классов субгармонических функций в неограниченных областях была продолжена: классы функций в полосе изучал А. А. Бонами [1], в полупространстве — Е. Д. Соломенцев [2].

Большое число работ было посвящено выяснению локального поведения функций вблизи граничной точки. Если обозначить через H^+ класс неотрицательных гармонических в полуплоскости $y > 0$ функций $u(z)$ ($z = x + iy$) и через H — класс гармонических функций, представимых в виде разностей функций класса H^+ , то класс H характеризуется представлением в виде интеграла Лебега — Стильтеса

$$u(x, y) = Cy + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} d\alpha(t), \quad (3)$$

где C — постоянная и $\alpha(t)$ — функция ограниченной вариации, причем $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|d\alpha(t)|}{1+t^2} < +\infty$. По известной теореме Фату, если $u(x, y) \in H$ и $\alpha'(0) = A$, то для каждого θ , $0 < \theta < \pi$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} u(r \cos \theta, r \sin \theta) = A.$$

Обращением этой теоремы для функций класса H^+ является теорема Лумиса: если $u(x, y) \in H$ и $\lim_{r \rightarrow 0^+} u(r \cos \theta, r \sin \theta) = A$ для $\theta = a$ и $\theta = b$, где $0 < a < b < \pi$, то $\alpha'(0) = A$. Эти теоремы были обобщены и уточнены в работах Геринга [1, 3]. Одна из упрощенных формулировок такова:

Если $u(x, y) \in H$, $\alpha(t) = O(|t|^{1+\delta})$, $t \rightarrow 0$, $-1 < \delta < 1$, то для каждых θ, ψ , $0 < \theta, \psi < \pi$, и $n \geq 1$ при $r \rightarrow 0^+$

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = O(r^\delta),$$

$$D_\psi^n u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \psi \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \sin \psi \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = O(r^{\delta-n}).$$

В работе Геринга [2] соответствующая теория развита для случая полупространства.

Изучению гармонических функций и векторов в пространствах E^{n+1} точек $(X, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$, $n \geq 2$, были посвящены работы Стейна и Вейсса [1], Стейна [1], Вейсса [1], Карлесона [1]. Обобщение теоремы Марцинкевича-Зигмунда-Спенсера, полученное в работе Стейна [1], гласит:

Если для любой точки X_0 , принадлежащей множеству E точек X гиперплоскости $y = 0$ положительной лебеговой меры, гармоническая в верхнем полупространстве $y > 0$ функция $u(X, y)$ ограничена в конусе $\Gamma(X_0) = \Gamma(X_0; \alpha, h)$ с вершиной X_0 , $|X - X_0| < \alpha y$, $0 < y < h$, то обобщенный интеграл площадей

$$A(X_0) = \int_{\Gamma(X_0)} y^{1-n} |\nabla u|^2 dX dy, \quad (4)$$

где $|\nabla u|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 + \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2$, конечен для почти всех $X_0 \in E$; наоборот,

если для всех $X_0 \in E$ интеграл (4) конечен, то $u(X, y)$ имеет угловые граничные значения для почти всех $X_0 \in E$.

В той же работе получено обобщение известной теоремы И. И. Привалова для систем гармонических функций $F(X, y) = (u, v_1, \dots, v_n)$, являющихся градиентом некоторой гармонической функции $H(X, y)$, $F(X, y) = (\partial H / \partial y, \partial H / \partial x_1, \dots, \partial H / \partial x_n)$, в следующем виде:

Если функция $u(X, y)$ имеет угловые граничные значения всюду на E , то то же самое имеет место для каждой $v_k(X, y)$ почти всюду на E ; наоборот, если все функции $v_k(X, y)$ имеют угловые граничные значения всюду на E , то то же самое имеет место для $u(X, y)$ почти всюду на E .

Автор обобщает понятие сопряженности для гармонических векторов и доказывает, что если один из сопряженных векторов имеет угловые граничные значения всюду на E , то то же самое имеет место для другого вектора почти всюду на E . В работе

Вейсса [1] для градиентных систем гармонических функций обобщается теорема В. И. Крылова в следующем виде:

Если $F(X, y) \in H^p$ при $y > 0$, $p \geq (n-1)/n$, т. е. если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(X, y)|^p dX = O(1), \quad y > 0,$$

то предел $\lim_{y \rightarrow 0+} F(X, y) = F(X)$ существует почти всюду на гиперплоскости $y = 0$; если же $p > (n-1)/n$, то, кроме этого,

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} |F(X, y) - F(X)|^p dX = 0.$$

В работе Ройдена [1] рассматривался в новой постановке вопрос о граничных значениях гармонических функций в конечно-связных областях W с границей Γ . Класс $A(W)$ (комплексных) гармонических функций $u(z)$ в W определяется условием, что субгармоническая функция $|u(z)|$ должна иметь гармоническую мажоранту в W . Если на Γ задана непрерывная функция $f(\zeta)$, то гармоническую функцию $u(z)$ с граничными значениями $f(\zeta)$ можно представить в виде

$$u(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma} f(\zeta) \partial_{\zeta} G(z, \zeta), \quad (5)$$

где $G(z, \zeta)$ — комплексная функция Грина для W . Пусть $D(\Gamma)$ — банахово пространство непрерывных дифференциалов первого порядка на Γ , $D^*(\Gamma)$ — его сопряженное. Автор показывает, что взаимно однозначное сохраняющее порядок соответствие между $A(W)$ и $D^*(\Gamma)$ дается формулой

$$u(z) = \frac{i}{\pi} L[\partial_{\zeta} G(z, \zeta)],$$

где $L \in D^*(\Gamma)$. Непрерывный линейный функционал $L \in D^*(\Gamma)$ тогда и только тогда представляет граничные значения аналитической функции $u(z)$, когда $L[\alpha] = 0$ для каждого дифференциала α , аналитического на замыкании \bar{W} . В этом случае L абсолютно непрерывен. Если α представим в виде $\alpha = f\omega$, где f — аналитическая функция в W , а ω — отличный от нуля аналитический дифференциал, то на Γ существует единственная абсолютно непрерывная мера μ такая, что $\int_{\Gamma} \varphi d\mu = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{C_r} \varphi \alpha$ для любой непрерывной на

\bar{W} функции $\varphi(C_r \rightarrow \Gamma$ при $r \rightarrow 1$), причем $\int_{\Gamma} f d\mu = \int_C f \alpha$ для любой ограниченной аналитической функции f в W и любого контура C , гомологичного Γ . Эта теория получает применение к экстремальным проблемам.

В ряде работ Дуба [1—5], посвященных вероятностной трак-

товке первой краевой задачи и граничных значений, были получены обобщения теоремы Фату о существовании граничных значений у неотрицательной гармонической функции и ряд результатов локального характера о граничных значениях субгармонических функций. Работы Дуба тесно связаны с аксиоматической теорией субгармонических функций, развиваемой Брело, Шоке, Дени и др. авторами (см. п. 4).

Поведение на границе обобщенного потенциала вида

$$\Phi(P) = \int_S \frac{f(P, Q)}{r^m(P, Q)} \varphi(Q) dS_Q,$$

где S — m -мерное многообразие в E^n , $n > m$, $r(P, Q)$ — расстояние между точками P и Q , изучалось в работе Т. Г. Гегелиа [1].

В работах В. С. Азарина [1, 3] рассматривались свойства индикатора функции, субгармонической во всем пространстве E^n ($n \geq 2$). В работах [2, 4] В. С. Азарин перенес на функции, субгармонические во всем пространстве, некоторые оценки снизу, известные в теории целых функций, и показал, что определенная правильность в распределении масс влечет регулярность роста такой функции по всем направлениям. Изучение связи между характеристиками роста функции, субгармонической во всей плоскости, попутно с изучением такой связи для целых функций, проводилось Хейменом (см. его обзор [1]) и Берри [1]. В работах Ито [1, 3] изучались асимптотические свойства субгармонических функций порядка меньше единицы и свойства субгармонических функций, у которых массы распределены на отрицательной действительной полуоси.

3. Теоремы типа теорем Фрагмена — Линделёфа для гармонических и субгармонических функций. Применяя известную теорему Фрагмена — Линделёфа для функций, аналитических, например, в полосе $-\infty < x < +\infty$, $-b/2 \leq y \leq b/2$, нетрудно показать, что если функция $u(x, y)$, гармоническая в этой полосе и такая, что $u(x, \pm b/2) \leq C$, $|\partial u(x, \pm b/2)/\partial y| \leq C$, удовлетворяет условию

$$\max_y u(x, y) < C_1 \exp(\exp \beta |x|),$$

где $0 < \beta < \pi/b$, то всюду в полосе $u(x, y) \leq C$. Доказательство подобных теорем для гармонических функций, определенных в пространственных областях, представляется весьма важной задачей. В работах М. А. Евграфова и И. А. Чегис [1], И. А. Чегис [1], И. С. Аршона и М. А. Евграфова [1, 2] были разработаны методы, опирающиеся на теоремы единственности для рядов Дирихле или связанные с преобразованием Фурье, которые позволили этим авторам доказать ряд теорем указанного типа для пространственных цилиндров и конусов. Для характеристики получаемых результатов приведем формулировку из работы И. С. Аршона и М. А. Евграфова [1]:

Пусть боковая поверхность полуцилиндра $0 \leq x < +\infty$, $(x_1, x_2) \in D$ удовлетворяет условиям Ляпунова; если гармоническая в этом полуцилиндре функция $u(x, x_1, x_2)$ подчиняется на его границе условиям

$$|u(x, x_1, x_2)| + \left| \frac{\partial}{\partial n} u(x, x_1, x_2) \right| = O(x^{-\alpha}),$$

$$0 < \alpha < 1, x \rightarrow +\infty,$$

а внутри полуцилиндра — условию

$$\iint_D |u(x, x_1, x_2)| dx_1 dx_2 < C \exp\left(\exp \frac{\pi x}{h + \varepsilon}\right), \varepsilon > 0,$$

где h — ширина минимальной полосы, содержащей D , то $|u(x, x_1, x_2)| = O(x^{-\alpha})$ равномерно по $(x_1, x_2) \in D$.

Подобные теоремы для гармонических функций можно было бы назвать «сильными» теоремами типа теорем Фрагмена — Линделёфа, в противоположность лучше изученным «слабым» теоремам для гармонических и субгармонических функций, в которых рост функции ограничивается гораздо более сильно, а на производные не налагается никаких ограничений (см., например, книгу И. И. Привалова «Субгармонические функции», М., 1937, гл. 5).

Обобщению принципа Фрагмена — Линделёфа в различных направлениях были посвящены работы Дингхаса [1, 2], Ито [2], Фука [1] и Хеймена [2] (см. также Шварц [1]); для функций, являющихся решениями линейных эллиптических и параболических дифференциальных уравнений, слабые теоремы типа теорем Фрагмена — Линделёфа обобщались в работе Фридмана [1]. В работе Баха [1] исследуется асимптотическое поведение функции, гармонической в полупространстве и являющейся решением задачи Дирихле с непрерывной и ограниченной граничной функцией.

Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция при $x > 0$, $u(z) \leq 0$ и $\sigma = \sup_{x>0} [u(z)/x]$. Тогда доказанная в 1949 г. теорема Альфорса — Хейнса гласит, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(re^{i\theta})/r = \sigma \cos \theta$, исключая множе-

ство значений θ логарифмической емкости нуль, причем это предельное соотношение выполняется для всех θ , если отбросить множество значений r конечной логарифмической длины. В работе Салинаса [1] эта теорема обобщена в том направлении, что неравенство $U(z) \leq 0$ заменяется неравенством $u(z) \leq H(r)$, где $H(r)$ — неотрицательная неубывающая функция, такая, что

$$\int_1^{\infty} H(r) r^{-2} dr < +\infty.$$

4. Аксиоматическая теория субгармонических функций. Обобщенная теория потенциала. Эта тематика, связанная с именами Брело, Дени, Шоке и др. авторов, ведет свое начало

от работ Брело по теории задачи Дирихле и субгармонических функций. Пусть \mathcal{G} — топологическое хаусдорфово пространство, в котором каждая точка имеет окрестность, допускающую гомеоморфное отображение на некоторую подобласть n -мерного евклидова пространства E^n с присоединенной точкой П. С. Александрова. При этом предполагается, что естественное отображение одной на другую подобластей E^n , порожденное двумя пересекающимися окрестностями, является изометрией ($n > 2$) или (необязательно сохраняющим ориентацию) конформным отображением ($n = 2$). Если на \mathcal{G} существует отличная от постоянной положительная супергармоническая функция (или, что равносильно, существует функция Грина), то \mathcal{G} называется пространством Грина. Теория, связанная с решением задачи Дирихле методом выметания, впервые указанным А. Пуанкаре, и методом верхних и нижних функций, указанным Перроном, развивается для подобластей пространства Грина. Рассмотрение пространств Грина проводится и аксиоматически, без выделения несобственной точки. В пространствах Грина развивается теория границы Мартина, первоначально изложенная последним для областей евклидова пространства (Martin R. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1941, 49, 137—172; см. также Брело [3,5]).

В обобщенной теории потенциала, тесно связанной с указанной тематикой, рассматриваются, с одной стороны, различные классы ядер, аналогичных в некотором смысле ньютоновскому ядру, и для таких ядер проводится выяснение связи между основными принципами теории потенциала: выметания, равновесия, мажорирования и т. п. Другой подход не использует понятия ядра и заключается в рассмотрении функциональных пространств с нормами, аналогичными норме Дирихле.

В настоящем кратком обзоре не представляется возможным изложить аспекты этих важных и глубоко разработанных теорий сколько-нибудь подробно, и читателю следует рекомендовать, прежде всего, работы Брело [1—3], монографии Брело [4, 5]* и диссертации Люме-Наим [1] и Эрве [3]; в этих работах имеются исчерпывающие литературные указания. Отметим еще работы последнего времени Брело [6—8], Брело и Шоке [1], Бауера [1], Дени [1—5], Люме-Наим [2, 3], Ниномия [1], Шоке [1], Шоке и Дени [1], Эрве [1, 2]. Представляют значительный интерес Труды семинара по теории потенциала в Париже, руководимого Брело, Шоке и Дени [1]. Как уже указывалось в п. 2, с теорией пространств Грина тесно связан вероятностный подход к задаче Дирихле, развиваемый в работах Дуба [1—5].

5. Теория интегральных представлений гармонических функций. В работах Бергмана (см., например, [1, 3]) было обобщено

* Русский перевод монографии Брело [5] выходит в свет в 1964 г.

интегральное представление гармонических функций, данное Уиттекером. Именно, нетрудно показать, что интеграл

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(t, u) \frac{du}{u}, \quad (5)$$

$$t = -(x - iy) \frac{u}{2} + z + (x + iy) \frac{1}{2u},$$

где L — единичная окружность в плоскости комплексного переменного u , $f(t, u)$ — аналитическая функция переменных t и u , представляет гармоническую функцию в трехмерном пространстве. В работе Гильберта [2] представление (5) было обобщено таким образом, что функции от $p+1$ комплексного переменного преобразуются в гармонические функции от $p+2$ переменных. В работах Бергмана [2, 4, 5], Гильберта [1, 3, 4], Крейсига [1] и Уайта [1] исследовался, в основном, характер сингулярных многообразий гармонических функций, представимых в виде (5), при некоторых частных предположениях относительно функции $f(t, u)/u$.

6. Плюригармонические и плюрисубгармонические функции.

В настоящем обзоре мы называем плюригармонической действительную функцию от n ($n > 1$) комплексных переменных z_1, \dots, z_n , являющуюся действительной (или мнимой) частью аналитической функции от переменных z_1, \dots, z_n . Плюригармонические функции составляют подкласс класса гармонических функций. Функция $u(z_1, \dots, z_n)$ (значение $-\infty$ допускается) называется плюрисубгармонической в области D , если она: 1) является пределом монотонно убывающей последовательности непрерывных функций; 2) на всюду плотном множестве отлична от $-\infty$; 3) на всяком

сечении D аналитической гиперплоскостью $\sum_{i=1}^n \alpha_i (z_i - z_i^0) = 0$ является субгармонической функцией. Плюрисубгармонические функции составляют подкласс класса субгармонических функций.

Изучение специфических свойств функций названных подклассов весьма важно с точки зрения теории функций нескольких комплексных переменных и современной квантовой теории, однако оно еще не достигло той степени полноты, которая имеет место для общих свойств гармонических и субгармонических функций.

В работах Л. А. Айзенберга [1, 2] было указано локальное интегральное представление бигармонических функций (т. е. плюригармонических функций от двух комплексных переменных).

В работах Гурского [1, 2] был выделен некоторый подкласс класса субгармонических функций от переменных z_1, z_2 , содержащий бигармонические функции и допускающий решение задачи Дирихле; изучены также некоторые свойства верхней огибающей семейства плюрисубгармонических функций.

Работы Лелона [1—3] были посвящены, в основном, получению различных критериев устранимости множеств особых точек субгармонических, плюрисубгармонических и аналитических функций (множество E , лежащее внутри D , называется устранимым, например, для плюрисубгармонической функции $u(z_1, \dots, z_n)$, если функция u может быть продолжена на E с сохранением свойства плюрисубгармоничности). В работах [4,5] Лелон рассматривал плюрисубгармонические функции, определенные на некоторой области Δ действительного подпространства E^n , вложенного в пространство C^n комплексных переменных z_1, \dots, z_n , в связи с проблемами аналитического продолжения функций различных классов, определенных на Δ . В работах Аванисяна [1—3] рассматривались поведение плюрисубгармонической функции $V(P)$ в окрестности точки P_0 , в которой $V(P_0) = -\infty$, и рост функций, плюрисубгармонических во всем пространстве. В этих же работах изучались классы $S_{x,y}$ и $H_{x,y}$ функций $v(x, y) \equiv v(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q)$ от двух групп действительных переменных, соответственно субгармонических и гармонических как по переменным x так и по y ; эти классы обобщают соответственно классы плюрисубгармонических и плюригармонических функций.

В работах В. С. Владимирова [1] и В. С. Владимирова и В. Ф. Никитина [1] плюрисубгармонические функции получили приложение при решении важных для квантовой теории поля вопросов аналитического продолжения обобщенных функций и построения оболочек голоморфности некоторых специальных областей.

В работах [1, 2] Бреммерман применил методы теории плюрисубгармонических функций для характеристики оболочек голоморфности областей в C^n и для характеристики областей, допускающих решение обобщенной задачи Дирихле в классах плюрисубгармонических и плюрисупергармонических функций; большую роль при этом, как оказалось, играет понятие границы в смысле Г. Е. Шилова, так как только на ней граничные данные могут задаваться произвольно.

7. Гармонические функции на римановых поверхностях и многообразиях. Если R — открытая риманова поверхность и множество $G \subset R$ таково, что $R - G$ компактно, то множество G можно рассматривать как окрестность идеальной границы. Проблема построения на R гармонической функции с заданными особенностями состоит в том, что на G задается функция особенностей s и требуется построить на R такую гармоническую функцию u , для которой разность $u - s$ была бы в некотором смысле регулярной вблизи идеальной границы. В работе [1] Альфорс показал, что для решения указанной задачи можно применить вариант альтернирующего процесса Шварца, предложенный Сарио. Развитию метода Сарио была посвящена работа Фокса [1]. Константа, фигурирующая в лемме Сарио, уточнена в работе Ойкава [1]. Альтер-

нирующий процесс был также применен Пфлюгером [1] для непосредственного построения гармонической функции, испытывающей постоянный скачок при переходе через жорданову кривую, не разделяющую замкнутую риманову поверхность.

В работе Константинеску и Корнея [1] исследовались различные классы гармонических функций на открытых римановых поверхностях и взаимосвязи между ними. В работе Константинеску [1] дается новая обобщенная постановка задачи Дирихле на открытых римановых поверхностях и указываются некоторые условия ее разрешимости.

Известная теорема Эванса гласит, что если F — замкнутое множество емкости нуль на плоскости, то существует такое распределение положительной единичной массы на F , что им порождаемый потенциал всюду на F стремится к бесконечности. Перенесению этой теоремы на римановы поверхности были, в основном, посвящены работы Курамоти [1—4].

В работе Хейнса [1] принцип гармонической меры был обобщен на общий случай конформного отображения римановых поверхностей.

В работе Тучке [1] изучались на римановых поверхностях с аналитической границей гармонические функции и родственные им функции, строящиеся при помощи эллиптических операторов более общего вида, чем оператор Лапласа. Для этих функций развивается теория нормальных потенциалов по Невалинна и выделяется такое подпространство решений соответствующих эллиптических уравнений, в котором каждая однозначная функция, определенная на поверхности с разрезами, будет необходимо константой.

Монография Бобока, Константинеску и Корнея [1] посвящена систематическому построению теории логарифмического потенциала на римановых поверхностях. В этой книге приводится ряд оригинальных результатов и новых доказательств известных теорем.

8. Другие вопросы. В работе И. В. Ушаковой [1] рассматривались в круге $|z| < 1$ функции $u(z)$, являющиеся разностями двух субгармонических функций. Для таких функций можно построить аналог неванлинновской характеристики. Если характеристика растет не слишком быстро, то для $u(z)$ получается оценка снизу, которая выполняется вне системы кружков, имеющих конечную сумму неевклидовых радиусов.

Изучению функций, являющихся разностями двух субгармонических функций, посвящена также работа Арсова [1]. Автор называет такие функции δ -субгармоническими; изучение свойств этих функций проводилось в ряде его работ 1951—1957 гг. В цитируемой работе дается доказательство аналога теоремы Брело — Картана о сходимости последовательностей субгармонических функций.

В работе Адлера [1] получены оценки градиента гармонической функции через ее значения на границе области с явным указанием констант.

В работе Гюнцлера [1] была получена новая характеристика гармонических функций через посредство средних по сфере или шару.

В работе Эванса [1] было продолжено изучение многозначных гармонических функций в пространстве, ранее предпринятое автором (см. его книгу Evans G. C., Lectures on multiple valued harmonic functions in space, Univ. of California, 1951).

В работах Риддера и Вестермана [1] и Вестермана [1] достаточные условия гармоничности, субгармоничности и аналитичности формулируются в терминах дифференцируемости функций нескольких переменных. Некоторые результаты здесь близки к полученным в известной монографии Д. Е. Миньшова.

В работе [1] Германеску, обобщая понятие сопряженности гармонических функций, занимается изучением тех эллиптических систем уравнений первого порядка на плоскости, решения которых, подобно сопряженным гармоническим функциям, удовлетворяют одному и тому же уравнению второго порядка.

В работах Николеску [1, 2] были расширены достаточные условия того, что предел сходящейся последовательности полигармонических функций порядка $\leq p$, $p > 1$, (т. е. решений уравнения $\Delta^p u = 0$) является также полигармонической функцией порядка $\leq p$. В односвязной области D достаточным условием является наличие равномерной мажоранты, интегрируемой по Лебегу. Работа Даффина и Нехари [1] была посвящена обобщению для полигармонических функций неравенств Гарнака, известных для гармонических функций.

В работе Д. Б. Тополянского [1] рассматривались некоторые свойства субметагармонических функций, т. е. функций, являющихся решениями уравнения $\Delta u + cu = 0$, $c \leq 0$. Работа Мирберга [1] была посвящена изучению некоторых свойств функций (названных им субэллиптическими), удовлетворяющих уравнению $\Delta u + c(z)u = 0$, $c(z) \leq 0$, на римановой поверхности.

Фундаментальные исследования различных вопросов, относящихся к теории гармонических функций от матриц и выходящих за рамки настоящего обзора, были выполнены в работах Хуа Ло-кэна [1, 2] и Хуа Ло-кэна и Лу Ци-кэна [1].

БИБЛИОГРАФИЯ

- Avanissian V. 1. Mesures dépendant harmoniquement d'un ou de deux groupes de variables, C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 25, 2278—2281 (РЖМат, 1960, 6414).
2. Fonctions plurisousharmoniques, différences de deux fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel, C. r. Acad. sci., 1961, 252, № 4, 499—500 (РЖМат, 1961, 9Б96).

3. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques, Ann. scient. Ecole norm. supér., 1961, 68, № 2, 101—161 (РЖМат, 1962, 2Б163).
- Adler G. I.** Maggiorazione del gradiente delle funzioni armoniche mediante i loro valori al contorno, Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci. fis., mat., e natur., 1961, sez. 1, 6, № 7, 185—201 (РЖМат, 1962, 7Б163).
- Азарин В. С. I.** Об индикаторе функции, субгармонической в многомерном пространстве, Докл. АН СССР, 1961, 139, № 5, 1033—1036 (РЖМат, 1962, 4Б124).
2. О субгармонических во всем пространстве функциях вполне регулярного роста, Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1961, 120, Зап. Механ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 28, 128—148 (РЖМат, 1963, 3Б152).
 3. Об индикаторе функции, субгармонической в многомерном пространстве, Матем. сб., 1962, 58, № 1, 87—94 (РЖМат, 1963, 4Б148).
 4. О субгармонических функциях вполне регулярного роста в многомерном пространстве, Докл. АН СССР, 1962, 146, № 4, 743—746 (РЖМат, 1963, 6Б151).
- Айзенберг Л. А. I.** О плюригармонических функциях, Докл. АН СССР, 1959, 124, № 5, 967—969 (РЖМат, 1960, 3944).
2. О плюригармонических функциях, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-т, 1960, 96, 39—60 (РЖМат, 1961, 11Б83).
- Ahlfors L. V. I.** Remarks on Riemann surfaces, Lect. Funct. Complex Variable, Ann Arbor, 1955, 45—48 (РЖМат, 1960, 6387).
- Arsove M. I.** A new proof of the convergence theorem for subharmonic functions, Illinois J. Math., 1959, 3, № 2, 217—222 (РЖМат, 1962, 3Б161).
- Аршон И. С., Е в р г а ф о в М. А. I.** О росте функций, гармонических в цилиндре и ограниченных на его поверхности вместе с нормальной производной, Докл. АН СССР, 1962, 142, № 4, 762—765 (РЖМат, 1962, 8Б130).
2. Пример гармонической во всем пространстве функции, ограниченной вне круглого цилиндра, Докл. АН СССР, 1962, 143, № 1, 9—10 (РЖМат, 1962, 10Б123).
- Bauer H. I.** Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Ann., 1962, 146, № 1, 1—59 (РЖМат, 1962, 9Б203).
- Bach W. I.** On the asymptotic behaviour of harmonic functions in the semi-space, Ann. polon. math., 1960, 9, № 2, 137—144 (РЖМат, 1962, 1Б74).
- Bergman S. I.** Applications of function theoretical methods in the study of harmonic functions and vectors of three variables, Suomalais. tiedekat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250 (РЖМат, 1960, 12737).
2. Some properties of a harmonic function of three variables given by its series development, Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1961, 8, № 3, 207—222 (РЖМат, 1962, 3Б159).
 3. Integral operators in the theory of linear partial differential equations, Berlin, Springer, 1961 (РЖМат, 1962, 6Б305 К).
 4. Sur les singularités des fonctions harmoniques de trois variables, C. r. Acad. sci., 1962, 254, № 19, 3304—3305 (РЖМат, 1963, 1Б148).
 5. Nouvelles remarques sur les singularités des fonctions harmoniques de trois variables, C. r. Acad. sci., 1962, 254, № 20, 3482—3483 (РЖМат, 1962, 12Б157).
- Barry P. D. I.** The minimum modulus of small integral and subharmonic functions, Proc. London Math. Soc., 1962, 12, № 47, 445—495 (РЖМат, 1963, 12Б202).
- Boboc N., Constantinescu C., Cornea A. I.** Teoria potențialului pe suprafețe Riemanniene, București, ed. Acad. RPR, 1962 (РЖМат, 1963, 6Б143).
- Бонами А. А. I.** О граничных свойствах функций, регулярных в полосе, сб. «Исслед. по соврем. пробл. теории функций компл. перем.», М., 1960, 95—100 (РЖМат, 1961, 3Б120).
- Brelot M. I.** Topologies on the boundary and harmonic measure, Lect. Funct. Complexe Variable, Ann. Arbor, 1955, 85—103 (РЖМат, 1961, 2Б99).

2. Topology of R. S. Martin and Green lines, Lect. Funct. Complex Variable, Ann Arbor, 1955, 105—121 (PЖMar, 1961, 2Б100).
 3. Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin, J. math. pures et appl., 9e sér., 1956, 35, 297—335.
 4. Lectures on potential theory, Bombay, Tata Inst. of Fundam. Research, 1960.
 5. Eléments de la théorie classique du potentiel, Paris, Centre de documentation universitaire, 1961 (PЖMar, 1963, 6Б106).
 6. Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, J. d'analyse math. (Jérusalem), 1960/61, 8, 273—288.
 7. Remarques sur le balayage, Bull. soc. royale sci. Liège, 1961, 5/6, 210—213 (PЖMar, 1962, 5Б457).
 8. Introduction axiomatique de l'effilement, Ann. mat. pura ed appl., 1962, 57, 77—96 (PЖMar, 1964, 1Б74).
- , Choquet G. 1. Le théorème de convergence en théorie du potentiel, J. Madras Univ., 1957, 27, № 1, 277—286 (PЖMar, 1961, 7Б120).
- , Choquet G., Deny J. 1. Seminaire de théorie du potentiel dirigé par M. Brelot, G. Choquet et J. Deny, 6-e année 1961/62, fasc. 1, 2. Secret. math., Paris, 1962.
- Bremermann H. J.** 1. Die Charakterisierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonische Funktionen, Math. Ann., 1958, 136, № 2, 173—186. (PЖMar, 1960, 2862).
2. On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains. Characterization of Silov boundaries, Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 91, № 2, 246—276 (PЖMar, 1963, 2Б142).
- Weiss G.** 1. Espaces de fonctions harmoniques, Semin. P. Lelong. Fac. sci. Paris, 3e année, 1961. Paris, 1961, 1/1—1/5 (PЖMar, 1962, 8Б131).
- Westerman L. R. J.** 1. Hinreichende Bedingungen für analytische, harmonische und subharmonische Funktionen. IV. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1962, A65, № 3, 266—282; V, 283—290. Indagationes math., 1962, 24, № 3, 266—282; 283—290 (PЖMar, 1963, 3Б153, 3Б154).
- Владимиров В. С.** 1. О построении оболочек голоморфности для областей специального вида и их применения, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1961, 60, 101—144 (PЖMat, 1962, 6Б157).
- , Никитин В. Ф. 1. Об интегральном представлении Иоста — Лемана — Дайсона, Докл. АН СССР, 1961, 138, № 4, 809—812 (PЖMat, 1962, 7Б434).
- Гегелиа Т. Г.** 1. О поведении обобщенного потенциала вблизи границы множества интегрирования, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1959, 26, 189—193 (PЖMat, 1961, 7Б343).
- Gehring F. W.** 1. The Fatou theorem and its converse, Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 1, 106—121 (PЖMat, 1959, 6830).
2. The Fatou theorem for functions harmonic in a half-space, Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 29, 149—160 (PЖMat, 1960, 2867).
 3. Harmonic functions and Tauberian theorems, Proc. London Math. Soc., 1960, 10, № 37, 88—106 (PЖMat, 1962, 1Б156).
- Ghermanescu M.** 1. Fonctions harmoniques (p, q)-conjuguées, C. r. Acad. sci., 1962, 254, № 25, 4243—4244 (PЖMat, 1963, 2Б138).
- Gilbert R. P.** 1. Singularities of three-dimensional harmonic functions, Pacif. J. Math., 1960, 10, № 4, 1243—1255 (PЖMat, 1961, 9Б94).
2. A note on harmonic functions in $p+2$ variables, Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1961, 8, № 3, 223—227 (PЖMat, 1962, 5Б196).
 3. On the geometric character of singularity manifolds for harmonic functions in three variables. I, Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1962, 9, № 4, 352—360 (PЖMat, 1962, 12Б158).
 4. A note on the singularities of harmonic functions in three variables, Proc. Amer. Math. Soc., 1962, 13, № 2, 229—232 (PЖMat, 1962, 12Б156).
- Górski J.** 1. The method of extremal points and Dirichlet's problem in the space of two complex variables, Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1960, 4, № 5, 412—427 (PЖMat, 1962, 5Б192).

2. On a property of the upper envelope of plurisubharmonic functions, *Ann. polon. math.*, 1961, 10, № 3, 293—295 (ПЖМат, 1962, 8Б135).
- Gunzler H. I.** Eine Charakterisierung harmonischer Funktionen, *Math. Ann.*, 1960, 141, № 1, 68—86 (ПЖМат, 1962, 7Б162).
- Duffin R. J., Nehari Z.** 1. Note on polyharmonic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1961, 12, № 1, 110—115 (ПЖМат, 1962, 3Б43).
- Deny J.** 1. Sur les espaces de Dirichlet, *Semin. théor. potent. M. Brelot et G. Choquet. Fac. sci. Paris*, 1957, Ir année. Paris, 1958, 5/1—5/14 (ПЖМат, 1961, 7Б121).
2. Les deux aspects de la théorie du potentiel, *Semin. Bourbaki. Secret. math.*, 1956—1957, 9e année. Paris, 1959, 148/1—148/18 (ПЖМат, 1961, 7Б122).
3. Éléments extrémaux et balayage, d'après Matsushita, *Semin. théor. potent. M. Brelot, G. Choquet et J. Deny. Fac. sci. Paris* 1958—1959, 3e année. Paris, 1960, 2/1—2/4 (ПЖМат, 1962, 1Б126).
4. Formes et espaces de Dirichlet, *Semin. Bourbaki. Secrét. math.*, 1959—1960, 12 année. fasc. I. Paris, 1960, 187/1—187/11 (ПЖМат, 1962, 3Б153).
5. Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, *Ann. Inst. Fourier*, 1962, 12, 643—667 (ПЖМат, 1963, 9Б384).
- Dinghas A.** 1. Wachstumsprobleme harmonischer und verwandter Funktionen in E^n , *Suomalais. tiedeakat. toimituks.*, 1958, Sar. AI, № 250/8 (ПЖМат, 1960, 3943).
2. Über eine Fassung des Phragmén — Lindelöfschen Prinzips *Suomalais. tiedeakat. toimituks.*, 1962, Sar. AI, № 319 (ПЖМат, 1963, 6Б125).
- Doob J. L.** 1. Probability theory and the first boundary value problem, *Illinois J. Math.*, 1958, 2, № 1, 19—36 (ПЖМат, 1959, 3799).
2. Boundary limit theorems for a half-space, *J. math. pures et appl.*, 1958, 37, № 4, 387—392 (ПЖМат, 1960, 7530).
3. A relativized Fatou theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 1959, 45, № 2, 215—222 (ПЖМат, 1962, 2Б154).
4. Conformally invariant cluster value theory, *Illinois J. Math.*, 1961, 5, № 4, 521—549 (ПЖМат, 1962, 10Б99).
5. Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, *Ann. Inst. Fourier*, 1962, 12, 573—622.
- Евграфов М. А., Чегис И. А.** 1. Обобщение теоремы Фрагмена — Линдёлефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве, *Докл. АН СССР*, 1960, 134, № 2, 259—262 (ПЖМат, 1961, 5Б97).
- Ito J.** 1. Asymptotic properties of subharmonic functions of order less than one, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1958, 9, № 3, 419—428 (ПЖМат, 1959, 11025).
2. Asymptotic properties of subharmonic and analytic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1958, 9, № 5, 763—772 (ПЖМат, 1960, 13765).
3. Subharmonic functions with mass distribution on the negative real axis, *J. Math. Analysis and Applic.*, 1962, 5, № 1, 17—29 (ПЖМат, 1963, 4Б147).
- Kawakami Y.** 1. Theorems on the subharmonic functions in the unit circle, *Kodai Math. Semin. Repts*, 1956, 8, № 4, 158—163 (ПЖМат, 1959, 9959).
- Carleson L.** 1. On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables, *Arkiv math.*, 1962, 4, № 5, 393—399 (ПЖМат, 1963, 6Б145).
- Constantinescu C.** 1. Ein neues Dirichletsches Problem auf Riemannschen Flächen, *Rev. math. pures et appl. (RPR)*, 1962, 7, № 1, 127—133 (ПЖМат, 1963, 3Б150).
- , **Cornea A.** 1. Spaces of harmonic functions on Riemann surfaces, *Rev. math. pures et appl. (RPR)*, 1961, 6, № 2, 373—390 (ПЖМат, 1962, 7Б165).
- Kreyszig E.** 1. On regular and singular harmonic functions of three variables, *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 1960, 4, № 4, 352—370 (ПЖМат, 1960, 12735).
- Kuramochi Z.** 1. Evans' theorem on abstract Riemann surfaces with nullboundaries, *Proc. Japan Acad.*, 1956, 32, № 1, 1—9 (ПЖМат, 1960, 12720, 12721).
2. Evans — Selberg's theorem on abstract Riemann surfaces with positive boundaries, *Proc. Japan Acad.*, 1956, 32, № 4, 228—236 (ПЖМат, 1960, 12722, 12723).

3. Mass distributions on the ideal boundaries of abstract Riemann surfaces, *Osaca Math. J.*, 1956, 8, № 1, 119—137; № 2, 145—186 (РЖМат, 1961, 6Б101, 6Б102).
 4. Mass distributions of the ideal boundaries, *Proc. Japan Acad.*, 1960, 36, № 3, 118—122 (РЖМат, 1961, 6Б103).
- Lelong P. 1.** Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques, *J. math. pures et appl.*, 1957, 36, № 3, 263—303 (РЖМат, 1959, 9952).
2. Sur une classe de singularités impropres, *Arch. Math.*, 1958, 9, № 3, 161—166 (РЖМат, 1960, 2865).
 3. Singularités impropres des fonctions holomorphes et des fonctions plurisousharmoniques, *Semin. analyse P. Lelong. Fac. sci. Paris 1957—1958*, 1 année, 1959, 1/1—1/9 (РЖМат, 1961, 7Б124).
 4. Fonctions plurisousharmoniques au voisinage du sousespace réel, *C. r. Acad. sci.*, 1960, 251, № 25, 2860—2862 (РЖМат, 1961, 8Б90).
 5. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles, *Ann. Inst. Fourier*, 1961, 11, 515—562 (РЖМат, 1962, 4Б123).
- Lumer-Naim L.; ранее Naim L. 1.** Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 1957, 7, 183—281 (РЖМат, 1961, 11Б80).
2. Sur l'allure à la frontière des fonctions surharmoniques positives, *Semin. théor. potent. M. Brelot et G. Choquet, Fac. sci. Paris*, 1957, 1 année. Paris, 1958, 2/1—2/12 (РЖМат, 1963, 2Б141).
 3. Sur le théorème de Fatou généralisé, *Ann. Inst. Fourier*, 1962, 12, 623—626 (РЖМат, 1963, 3Б151).
- Myrberg L. 1.** Über subelliptische Funktionen, *Suomalais. tiedekat. toimituks.*, 1960, Sar. AI, № 290 (РЖМат, 1961, 4Б133).
- Nikolescu M. 1.** Asupra şirurilor convergente de funcţii poliarmonice, *Studii şi cercetări mat. Acad. RPR*, 1960, 11, № 2, 287—291 (РЖМат, 1961, 5Б100).
2. О сходящихся последовательностях полигармонических функций, *Rev. math. pures et appl. (RPR)*, 1960, 5, № 3-4, 467—471 (РЖМат, 1961, 9Б97).
- Ninomiya N. 1.** Méthode de variation du minimum dans la théorie du potentiel, *Sémin. théor. potent. M. Brelot, G. Choquet et J. Deny. Fac. sci. Paris*, 1958—1959, 3e année. Paris, 1960, 5/1—5/9 (РЖМат, 1962, 1Б122).
- Oikawa K. 1.** Sario's lemma on harmonic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1960, 11, № 3, Part 1, 425—428 (РЖМат, 1962, 2Б159).
- Pfluger A. 1.** Ein alternierendes Verfahren auf Riemannschen Flächen, *Comment. math. helv.*, 1956, 30, № 4, 265—274 (РЖМат, 1960, 6386).
- Ridder J., Westermann L. R. J. 1.** Hinreichende Bedingungen für analytische, harmonische und subharmonische Funktionen. I, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, 1961, A64, № 2, 188—196; II, № 3, 261—271; III, 272—279. *Indagationes math.*, 1961, 23, № 2, 188—196; № 3, 261—271; 272—279 (РЖМат, 1962, 2Б160, 2Б161, 2Б162).
- Royden H. L. 1.** The boundary values of analytic and harmonic functions, *Math. Z.*, 1962, 78, № 1, 1—24 (РЖМат, 1962, 10Б126).
- Salinas R. B. 1.** Complement to a theorem of Ahlfors — Heins on subharmonic functions, *Rev. Acad. Ci. Zaragoza*, 1954, 9, № 2, 119—125 (РЖМат, 1961, 5Б99).
- Соломенцев Е. Д. 1.** О граничных значениях субгармонических функций, *Чехосл. матем. журнал*, 1958, 8(83), 520—536 (РЖМат, 1961, 2Б101).
2. О классах функций, субгармонических в полупространстве, *Вестн. Моск. ун-та, Сер. матем., механ., астрон., физ., химии*, 1959, № 5, 73—91 (РЖМат, 1961, 10Б70).
 3. Пример ограниченной и непрерывной субгармонической функции, не имеющей угловых граничных значений, *Сибирск. матем. ж.*, 1960, 1, № 3, 448—491 (РЖМат, 1961, 7Б167).
- Stein E. M. 1.** On the theory of harmonic functions of several variables. II. Behaviour near the boundary, *Acta Math.*, 1961, 106, № 3—4, 137—174 (РЖМат, 1962, 10Б125).

- , Weiss G. 1. On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H^p -spaces, Acta Math., 1960, 103, № 1—2, 25—62 (РЖМат, 1962, 10Б124).
- Tolsted E. 1. Non-tangential limits of subharmonic functions, Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 27, 321—333 (РЖМат, 1959, 9957).
2. Non-tangential limits of subharmonic functions. II, J. London Math. Soc., 1961, 6, № 1, 65—68 (РЖМат, 1961, 9Б95).
- Тополянський Д. Б. 1. Замітка про субметармонічні функції, Доповіді АН УРСР, 1960, № 4, 432—435 (РЖМат, 1961, 3Б119).
- Tutschke W. 1. Potentialfunktionen und verwandte Funktionen auf berandeten Riemannschen Flächen, Math. Nachr., 1960, 22, № 5—6, 323—364 (РЖМат, 1962, 4Б122).
- White A. 1. Singularities of harmonic functions of three variables generated by Whittaker — Bergman operators, Ann. polon. math., 1961, 10, № 1, 81—100 (РЖМат, 1962, 1Б125).
- Ушакова И. В. 1. Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге, Докл. АН СССР, 1961, 137, № 6, 1319—1322 (РЖМат, 1962, 1Б133).
- Fox W. C. 1. Harmonic functions with arbitrary local singularities, Pacif. J. Math., 1961, 11, № 1, 153—164 (РЖМат, 1962, 2Б157).
- Friedman A. 1. On two theorems of Phragmén — Lindelöf for linear elliptic and parabolic differential equations of the second order, Pacif. J. Math., 1957, 7, № 4, 1563—1575 (РЖМат, 1961, 8Б54).
- Fuka J. 1. Poznámka k Phragmén — Lindelöfova principu, Casop. pestov. mat., 1959, 84, № 1, 64—73 (РЖМат, 1960, 2850).
- Hayman W. K. 1. The growth of entire and subharmonic functions, Lect. Funct. Complex Variable, Ann Arbor, 1955, 187—198 (РЖМат, 1958, 271).
2. Questions of regularity connected with the Phragmén — Lindelöf principle, J. math. pures et appl., 1956, 35, № 2, 115—126 (РЖМат, 1960, 5160).
- Heins M. 1. On the principle of harmonic measure, Comment. math. helv., 1959, 33, № 1, 47—58 (РЖМат, 1962, 2Б120).
- Хуа Ло-гэн 1. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., 1959 (РЖМат, 1962, 6Б166 К).
2. Гармонический анализ в классических областях, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, М., 1959, 172—178 (РЖМат, 1961, 1Б89).
- , Лу Ци-кэн 1. Теория гармонических функций в классических областях, Шусуэ сьсэбао, 1958, № 4, 531—547; 1959, 9, № 3, 295—305, 306—314 (РЖМат, 1959, 10002; 1961, 3Б115, 3Б116).
- Tsuji M. 1. Potential theory in modern function theory, Tokyo, 1959 (РЖМат, 1962, 10Б135К).
2. Littlewood's theorem on subharmonic functions in a unit circle, Comment. math. Univ. St. Pauli, 1956, 5, № 1, 3—16 (РЖМат, 1959, 9958).
- Чегис И. А. 1. Теорема типа Фрагмена — Линдёлефа для гармонических функций в прямоугольном цилиндре, Докл. АН СССР, 1961, 136, № 3, 556—559 (РЖМат, 1961, 8Б87).
- Schwartz M. 1. Compte-rendu de travaux de M. Heins sur diverses majorations de la croissance des fonctions analytiques et sousharmoniques, Sémin. Bourbaki. Secret. math., 1949—1950, 2 année, Paris, 1959, 23/1—23/5 (РЖМат, 1961, 1Б99).
- Choquet G. 1. L'intégrale d'énergie en théorie du potentiel, Sémin. théor. potent. M. Brelot, G. Choquet et J. Deny. Fac. sci. Paris, 1958—1959, 3 année, Paris, 1960, 3/1—3/11 (РЖМат, 1962, 1Б121).
- , Deny J. 1. Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert, C. r. Acad. sci., 1960, 250, № 26, 4260—4262 (РЖМат, 1962, 3Б156).
- Evans G. C. 1. Funzioni armoniche polidrome ad infiniti valori nello spazio, con due curve di ramificazione di ordine uno, Rend. mat. e applic., 1961, 20, № 3, 289—311 (РЖМат, 1963, 2Б139).

- Hervé R.-M.** 1. Recherches sur la théorie axiomatique des fonctions surharmoniques, Sémin. théor. potenti. M. Brelot, G. Choquet et J. Deny. Fac. sci. Paris, 1958—1959, 3 année. Paris, 1960, 11/1—11/6 (PЖMat, 1962, 1B131).
2. Topologie sur l'ensemble des fonctions surharmoniques ≥ 0 , et représentation intégrale, C. r. Acad. sci., 1960, 250, № 17, 2834—2836 (PЖMat, 1962, 1B134).
3. Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, 1962, 12, 415—572 (PЖMat, 1963, 3B149).
-