Yu. G. Prokhorov, Rationality constructions of some Fano fourfolds of index 2, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 35–40

П р е д л о ж е н и е 5. *Если* $n \not\equiv 2 \pmod 4$, *то*

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = m(V_\lambda, L_n(V)).$$

*Если* $n \equiv 2 \pmod 4$, *то*

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = m(V_\lambda, L_n(V)) + \frac{2}{n} \sum_{d|(n/2)} \mu(d)\, \chi^\lambda(\tau^{n/2d}).$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant 1$, тогда $\lambda^* = (2^{\lambda_2}, 1^{\lambda_1-\lambda_2})$. Из (5) имеем

$$m(V_\lambda, L_n(V)) = l_{\lambda_1,\lambda_2} - l_{\lambda_1+1,\lambda_2-1}.$$

Используя предложение 5, получаем:

а) если $n \not\equiv 2 \pmod 4$, то

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1,\lambda_2} - l_{\lambda_1+1,\lambda_2-1};$$

б) если $n \equiv 2 \pmod 4$, то из формул (1) и (2) имеем:

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1,\lambda_2} - l_{\lambda_1+1,\lambda_2-1} + l_{\lambda_1/2,\lambda_2/2}$$

для $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0 \pmod 2$;

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1,\lambda_2} - l_{\lambda_1+1,\lambda_2-1} - l_{(\lambda_1+1)/2,(\lambda_2-1)/2}$$

для $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 1 \pmod 2$.

В частности, неприводимые $GL(V)$-модули, отвечающие за тождество энгелевости степени $n$ (разбиение $\lambda=(n-1, 1)$) или за стандартное тождество степени $n$ (разбиение $\lambda=(2, 1^{n-2})$), входят в $GL(V)$-разложение модуля $L_n(V)$ с единичной кратностью.

Автор приносит благодарность Ю. А. Бахтурину за помощь и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а х т у р и н Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М., 1985.
2. Д ж е й м с Г. Теория представлений симметрических групп. М., 1982.
3. B l e s s e n o h l O., L a u e H. On Witt's dimension formula for free Lie algebras and a theorem of Klyachko//Bull. Austral. Math. Soc. 1989. **40**. 49—57.

Поступила в редакцию
28.04.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 512.7

**Ю. Г. Прохоров**

## КОНСТРУКЦИИ РАЦИОНАЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО ИНДЕКСА 2

**Введение.** В настоящей работе обсуждается проблема рациональности четырехмерных многообразий Фано индекса 2. Мы будем рассматривать только четырехмерные многообразия Фано индекса 2 над полем $\mathbf{C}$ с группой Пикара, изоморфной $\mathbf{Z}$. Такие многообразия имеют единственный дискретный инвариант — род $g$, который может принимать целые значения $2 \leqslant g \leqslant 10$ [1, 2]. При $5 \leqslant g \leqslant 10$ линейная система $\left|-\frac{1}{2}K_V\right|$ задает вложение многообразия $V = V_{2g-2} \subsetneq \mathbf{P}^{g+2}$ степени

$2g-2$, и образ $V_{2g-2}\subset\mathbf{P}^{g+2}$ является пересечением квадрик. Основной результат работы составляет следующая

Теорема. *Для каждого целого $g$, $5\leqslant g\leqslant 8$, существует четырехмерное рациональное многообразие Фано $V=V_{2g-2}\subset\mathbf{P}^{g+2}$ индекса 2 рода $g$ с* $\operatorname{Pic}V=\mathbf{Z}$.

Теорема является следствием предложений 1—4. Все конструкции рациональности связаны с некоторой плоскостью. Как и в случае четырехмерной кубики, неизвестен ответ на вопрос о рациональности общих многообразий указанных типов [3].

**1.** Лемма 1. *Теорема Римана—Роха для обратимого пучка $\mathcal{O}_X(D)$ на четырехмерном многообразии $X$ имеет вид*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D))=\frac{1}{24}[D^4+2D^3\cdot c_1(X)+D^2\cdot(c_1(X)^2+c_2(X))+$$
$$+D\cdot c_1(X)\cdot c_2(X)]+\chi(\mathcal{O}_X).$$

Пусть $F\hookrightarrow X$ — вложение гладкой поверхности в гладкое четырехмерное многообразие $X$, $\rho:\tilde{X}\to X$ — раздутие $F$, $E$ — исключительный дивизор и $H^*=\rho^*H$ — полный прообраз дивизора $H$ на $\tilde{X}$.

Лемма 2 [4, утверждение 8.3.9]. *В кольце Чжоу $A(\tilde{X})$ имеют место следующие соотношения*:

$$H^{*4}=H^4,\ H^{*3}\cdot E=0,\ H^{*2}\cdot E^2=-F\cdot H^2,$$
$$H^*\cdot E^3=H|_F\cdot c_1(F)-c_1(X)\cdot H\cdot F,$$
$$E^4=c_2(X)\cdot F+c_1(X)|_F\cdot c_1(F)-c_2(F)-c_1(X)^2\cdot F.$$

Лемма 3 [4, утверждение 15.4, 3]. *Для классов Чженя многообразия $\tilde{X}$*

$$c_1(\tilde{X})=\rho^*c_1(X)-E,\ c_2(\tilde{X})=\rho^*c_2(X)+\rho^*F-\rho^*c_1(X)\cdot E.$$

**2. Случай $g=5$.** Всякое многообразие Фано $V=V_8\subset\mathbf{P}^7$ представляется в виде пересечения трех квадрик:

$$V=Q_1\cap Q_2\cap Q_3\ [1].$$

Лемма 4. (i). *Существует многообразие Фано $V=V_8\subset\mathbf{P}^7$, содержащее плоскость $P=\mathbf{P}^2$.*

(ii). *Общее многообразие Фано $V=V_8\subset\mathbf{P}^7$, содержащее плоскость $P$, не содержит других плоскостей, пересекающих $P$ по прямой.*

Доказательство. (i). Рассмотрим плоскость $P\subset\mathbf{P}^7$, заданную уравнениями $x_0=x_1=x_2=x_3=x_4=0$. Тогда квадрики $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, проходящие через $P$, имеют вид

$$\begin{aligned}Q_1&: x_0l_{10}+x_1l_{11}+x_2l_{12}+x_3l_{13}+x_4l_{14}+q_1=0,\\ Q_2&: x_0l_{20}+x_1l_{21}+x_2l_{22}+x_3l_{23}+x_4l_{24}+q_2=0,\\ Q_3&: x_0l_{30}+x_1l_{31}+x_2l_{32}+x_3l_{33}+x_4l_{34}+q_3=0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $l_{ij}=l_{ij}(x_5,x_6,x_7)$ — линейные, а $q_i=q_i(x_0,\ldots,x_4)$ — квадратичные формы. Докажем, что для общих $l_{ij}$ и $q_i$ многообразие будет гладким. По теореме Бертини для общих $l_{ij}$ и $q_i$ многообразие $V$ не имеет особых точек вне $P$. В точках $x\in P$ матрица частных производных для уравнений (1) имеет вид $\|l_{ij}(x)\|$.

Нетрудно указать формы $l_{ij}$, такие, что $rk\|l_{ij}(x)\|=3$ в каждой точке $x\in P$. (Например, $l_{i,i-1}=x_5$, $l_{i,i}=x_6$, $l_{i,i+1}=x_7$ и $l_{ij}=0$ при $|i-j|>1$.) Следовательно, для общих $l_{ij}$ и $q_i$ многообразие $V$ — неособое.

(ii). Простой счет параметров. ■

Предложение 1. *Пусть $V=V_8\subset\mathbf{P}^7$ — многообразие Фано, содержащее плоскость $P$, $\rho:\tilde{V}\to V$ — вздутие $P$, $H^*=\rho^*H$ — полный прообраз гиперплоского сечения $V$ и $E$ — исключительный дивизор. Тогда:*

(i) *линейная система $|H^*-E|$ определяет бирациональный морфизм $\varphi:\tilde{V}\to\mathbf{P}^4$, стягивающий неприводимый дивизор $D\sim 3H^*-4E$ на поверхность $F\subset\mathbf{P}^4$;*

(ii) *если, кроме того, для плоскости $P$ и многообразия $V$ выполняются условия* (ii) *леммы* 4, *то $\varphi$ — раздутие гладкой поверхности $F\subset\mathbf{P}^4$. Поверхность $F$ является поверхностью общего типа с инвариантами:*

$$K_F^2=2,\ q(F)=0,\ p_g(F)=3,\ c_2(F)=46,$$

$$K_F\cdot\mathcal{O}_F(1)=7,\ \deg F=9.$$

Доказательство. (i). Пусть $\psi: V\dashrightarrow\mathbf{P}^4$ — проекция из плоскости $P$, тогда раздутие $\rho$ устраняет неопределенности рационального отображения $\psi$. Поэтому отображение $\varphi=\psi\circ\rho:\tilde{V}\to\mathbf{P}^4$ является морфизмом и задается линейной системой $|H^*-E|$. Поскольку $c_1(V)=2H$, $c_2(V)=4H^2$, то из леммы 2 получаем $H^{*4}=8$, $H^{*3}\cdot E=0$, $H^{*2}\cdot E^2=-1$, $H^*\cdot E^3=1$, $E^4=3$. Откуда $\deg\varphi=(H^*-E)^4=1$, т. е. морфизм $\varphi$ бирационален. По теореме об обращении в нуль [5] и лемме 1 имеем $h^0(\mathcal{O}_{\tilde{V}}(3H^*-4E))=1$, т. е. в линейной системе $|3H^*-4E|$ существует единственный дивизор $D$. Так как $D\cdot(H^*-E)^3=0$, то $D$ стягивается морфизмом $\varphi$.

(ii). Поскольку $V$ не содержит плоскостей, пересекающих $P$ по прямой, то $\varphi:\tilde{V}\to\mathbf{P}^4$ не имеет слоев размерности $\geqslant 2$. Из результатов работы [6] следует тогда, что $\varphi$ является раздутием с гладким центром $F$. В силу леммы 1, примененной к $\varphi$, $\deg F=9$, $K_F\cdot\mathcal{O}_F(1)=7$, $c_2(F)=46$. По формуле для поверхностей в $\mathbf{P}^4$ [7, добавление $A$] $K_F^2=2$, $\chi(\mathcal{O}_F)=4$. ■

Замечание. Согласно [8] поверхность $F$ изоморфна минимальному разрешению особенностей двулистного накрытия $\mathbf{P}^2$ с ветвлением в кривой $C\subset\mathbf{P}^2$ степени 8.

**3. Случай $g=6$.** Каждое многообразие Фано $V=V_{10}\subset\mathbf{P}^8$ может быть реализовано одним из двух способов: как гладкое сечение грассманиана $G=\mathrm{Gr}(2,5)\subset\mathbf{P}^9$ гиперплоскостью $\mathbf{P}^8\subset\mathbf{P}^9$ и квадрикой $Q\subset\mathbf{P}^9$ или как двулистное накрытие многообразия Фано индекса 3 степени 5 [1]. Мы построим пример рационального многообразия $V=V_{10}\subset\mathbf{P}^8$ первого типа. Хорошо известно, что грассманиан $G=\mathrm{Gr}(2,5)$ содержит два типа плоскостей — многообразия Шуберта $\sigma_{22}$ и $\sigma_{31}$ [9].

Лемма 5. *Существует многообразие Фано $V=V_{10}\subset\mathbf{P}^8$, $V=G\cap Q\cap\mathbf{P}^8$, содержащее $\sigma_{31}$-плоскость $P$ и не содержащее других плоскостей, пересекающих $P$ по прямой.*

Доказательство. Несложные вычисления с циклами Шуберта в грассманиане $\mathrm{Gr}(3,10)$ показывают, что для любой квадрики $Q$ многообразие $Q\cap G$ содержит $\sigma_{31}$-плоскость $P$. Существование гиперплоскости $\mathbf{P}^8\subset\mathbf{P}^9$, такой, что $V=G\cap Q\cap\mathbf{P}^8$ — гладкое многообразие, содержащее $P$, следует теперь из работы [10, лемма 8.4]. Вторая часть леммы доказывается аналогично лемме 4.

Предложение 2. *Пусть $V=V_{10}\subset\mathbf{P}^8$ — многообразие Фано, такое, что для $V$ выполняется лемма* 5, *$\rho:\tilde{V}\to V$ — раздутие $P$, $H^*=$*

$=\rho^*H$ *— полный прообраз гиперплоского сечения $V$, $E$ — исключительный дивизор. Тогда линейная система $|H^*—E|$ определяет морфизм $\varphi:\tilde V\to W\subset \mathbf{P}^5$ на гладкую четырехмерную квадрику $W=W_2\subset\mathbf{P}^5$. Морфизм $\varphi$ является раздутием с центром в поверхности $F\subset W$ и с исключительным дивизором $D\sim 2H^*—3E$. Поверхность $F$ изоморфна раздутию точки на гладкой $K3$-поверхности,* $\deg F=9$, $K_F\cdot\mathcal{O}_F(1)=1$.

Доказательство. По формулам Гаусса—Бонне [9] имеем

$$c_1(G)=5\sigma_{10},\ c_2(G)=11\sigma_{20}+12\sigma_{11},$$

$$c_3(G)=15\sigma_{30}+30\sigma_{21},\ c_4(G)=35\sigma_{31}+25\sigma_{22}.$$

Откуда $c_2(V)=(3\sigma_{22}+4\sigma_{11})|_V$, $c_4(V)=28$, $b_4(V)=24$.

Аналогично предложению 1 доказывается теперь, что $|H^*—E|$ задает бирациональный морфизм на квадрику $W_2\subset\mathbf{P}^5$ и стягивает дивизор $D\sim\sim 2H^*—3E$ на поверхность $F$. Морфизм $\varphi$ не имеет слоев размерности $\geqslant 2$ и стягивает экстремальный луч. Из результатов [11] следует, что $F$ и $W$ — гладкие и $\varphi$ — раздутие с центром $F$. Как и в предложении 1, получаем $\deg F=9$, $K_F\cdot\mathcal{O}_F(1)=1$, $c_2(F)=25$. Из точной последовательности для нормального пучка $F$ на $W$ получаем $F^2=c_2(N_{F/W})=c_2(W)\cdot F——c_2(F)+4K_F\cdot\mathcal{O}_F(1)+K_F^2$. Откуда $K_F^2=F^2—42$. Квадрика $W$ может быть реализована как $\mathrm{Gr}(2, 4)$, поэтому $F\sim\alpha\sigma_{20}+\beta\sigma_{11}$. Так как $\deg F=9$, то $\alpha+\beta=9$. Следовательно, $F^2=\alpha^2+(9—\alpha)^2\geqslant 41$ и $K_F^2\leqslant 1$. Но $K_F^2==12p_g—13$. Возможны два случая: $p_g=0$, $K_F^2=—13$ и $p_g=1$, $K_F^2=—1$. Уравнение $—13=K_F^2=2\alpha^2—18\alpha+39$ не имеет целочисленных решений. Откуда $p_g=1$, $K_F^2=—1$, $\varkappa(F)\geqslant 0$. Так как $K_F\cdot\mathcal{O}_F(1)=1$, то $\varkappa(F)\leqslant 0$. Далее используется классификация поверхностей с $\varkappa(F)=0$. ■

**4. Случай $g=8$.** Согласно [1] каждое многообразие Фано $V=V_{14}\subset\subset\mathbf{P}^{10}$ изоморфно сечению грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 6)\subset\mathbf{P}^{14}$ подпространством коразмерности 4. Аналогично лемме 5 доказывается

Лемма 6. *Существует многообразие Фано $V=V_{14}\subset\mathbf{P}^{10}$, содержащее $\sigma_{42}$-плоскость $P$ и не содержащее плоскостей, пересекающих $P$ по прямой.*

Предложение 3. *Пусть $V=V_{14}\subset\mathbf{P}^{10}$—многообразие Фано, удовлетворяющее условиям леммы 6, $\rho:\tilde V\to V$—раздутие плоскости $P$, $H^*==\rho^*H$—полный прообраз гиперплоского сечения $V$, $E$—исключительный дивизор, тогда линейная система $|H^*—E|$ определяет морфизм $\varphi:\tilde V\to\to W\subset\mathbf{P}^7$ на гладкое многообразие Фано индекса 3 степени 5 $W=W_5\subset\subset\mathbf{P}^7$. Морфизм $\varphi$ является раздутием гладкой поверхности $F$ на $W$ с исключительным дивизором $D\sim H^*—2E$. Поверхность $F$ изоморфна раздутию 6 точек на $\mathbf{P}^2$,* $\deg F=7$, $K_F\cdot\mathcal{O}_F(1)=5$.

Доказательство аналогично доказательству предложений 1, 2. ■

Следствие. *Многообразие $V_{14}\subset\mathbf{P}^{10}$, удовлетворяющее условиям леммы 6, рационально.*

Доказательство следует из того, что $W_5\subset\mathbf{P}^7$ рационально [10]. ■

**5. Случай $g=7$.** Предложение 4. *Пусть $F=F_5\subset\mathbf{P}^5$—антиканонически вложенная поверхность дель Пеццо степени 5. Зафиксируем некоторое вложение $\mathbf{P}^5\subset\mathbf{P}^6$. Тогда в $\mathbf{P}^6$ существуют квадрики $Q_1$, $Q_2$, такие, что*

(i) *$W=W_4=Q_1\cap Q_2\subset\mathbf{P}^6$—гладкое четырехмерное многообразие, содержащее $F$;*

(ii) *если $\varphi:\tilde W\to W$—раздутие $F$, $L^*=\varphi^*L$—полный прообраз гиперплоского сечения $W$ и $D$—исключительный дивизор, то линейная система*

$|2L^*-D|$ *определяет бирациональный морфизм* $\rho: \widetilde{W} \to V = V_{12} \subset \mathbf{P}^9$ *на гладкое многообразие Фано рода* 7;

(iii) *морфизм* $\rho$ *стягивает дивизор* $E \sim L^* - D$ *на плоскость* $P \subset V$ *и является раздутием* $P$ *на* $V$.

Доказательство. Поверхность $F \subset \mathbf{P}^5$ является пересечением квадрик. Выберем пару квадрик $Q_1'$, $Q_2' \subset \mathbf{P}^5$, проходящих через $F$.

Лемма 7. *Если* $Q_1'$, $Q_2' \subset \mathbf{P}_5$ *выбраны достаточно общими, то многообразие* $U = Q_1' \cap Q_2'$ *имеет лишь изолированные особенности.*

Доказательство. Пусть $C = F \cap \mathbf{P}^4$ — общее гиперплоское сечение, тогда $C$ — эллиптическая кривая степени 5. Она содержится в гладкой поверхности дель Пеццо $R$ степени 4 — пересечении двух квадрик $Q_1''$, $Q_2''$. Поскольку $F$ — проективно нормальная поверхность, то квадрики $Q_1''$, $Q_2''$ могут быть продолжены до квадрик $Q_1'$, $Q_2' \subset \mathbf{P}^5$, содержащих $F$. Пусть $U = Q_1' \cap Q_2'$, тогда $R = U \cap \mathbf{P}^4$ — неособое. Поэтому $U$ может иметь лишь изолированные особенности. ■

Аналогично доказательству леммы 4 (i) можно показать, что $Q_1'$, $Q_2'$ продолжаются до квадрик $Q_1, Q_2 \subset \mathbf{P}^6$, причем $W = Q_1 \cap Q_2$—неособое. Отсюда следует, что для общих квадрик $Q_1$, $Q_2$, содержащих $F$, многообразие $W = Q_1 \cap Q_2$ удовлетворяет условию (i). Поскольку поверхность $F$ является пересечением квадрик, то линейная система $|2L^* - D|$ свободна. По теореме Кодаиры об обращении в нуль $H^i(\mathcal{O}_{\widetilde{W}}(2L^* - D)) = 0$ при $i > 0$. В силу лемм 1—3 $\dim|2L^* - D| = 9$. Далее, из леммы 2 получаем $L^{*4} = 4$, $L^{*3} \cdot D = 0$, $L^{*2} \cdot D^2 = -5$, $L^* \cdot D^3 = -10$, $D^4 = -12$. Откуда $\deg\rho \cdot \deg\rho(\widetilde{W}) = (2L^* - D)^4 = 12$, $\dim\rho(\widetilde{W}) = 4$. Пусть $E$—собственный прообраз гиперплоского сечения, проходящего через $F$, тогда $E \sim L^* - D$ и $(2L^* - D)^3 \cdot E = 0$, т. е. дивизор $E$ стягивается морфизмом $\rho$. Сказанное выше позволяет утверждать, что линейная система $|n(2L^* - D)|$ при $n \gg 0$ задает стягивание экстремального луча $\rho': \widetilde{W} \to V$ бирационального типа. Из [11] и леммы 8 следует тогда, что $\rho'$ является раздутием с центром в гладкой поверхности $P$ на гладком многообразии $V$. Отсюда получаем: $V$—многообразие Фано индекса 2, группа $\operatorname{Pic} V$ порождается дивизором $H = \rho'_*(2L^* - D)$ и $H^4 = 12$. Поэтому $V = V_{12} \subset \mathbf{P}^9$ имеет род 7, $\rho = \rho'$ и $V = \rho(\widetilde{W})$.

Лемма 8. *Морфизм* $\rho$ (*а следовательно*, и $\rho'$) *не имеет слоев размерности* $\geqslant 2$.

Доказательство. Двумерными слоями $\rho$ могут быть только собственные прообразы плоскостей $S \subset \mathbf{P}^5 \subset \mathbf{P}^6$, пересекающих $F$ по конике. Такие плоскости заметают 5 многообразий Сегре $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ в $\mathbf{P}^5$. Каждая из квадрик $Q_1$, $Q_2$ высекает на многообразии Сегре дивизор $F + S_i$. При общем выборе $Q_1$, $Q_2$ имеем $S_1 \neq S_2$, т. е. $W = Q_1 \cap Q_2$ не содержит плоскостей, пересекающих $F$ по конике. ■

Автор выражает благодарность С. Л. Трегубу за полезные обсуждения.

Работа частично поддержана фондом «Про—математика» (Франция).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mukai S. Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex 3//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1989. **86**. 3000—3002.
2. Wilson P. M. H. Fano fourfolds of index greater than one//J. reine und agnew. Math. 1987. **389**. 172—181.
3. Трегуб С. Л. Три конструкции рациональности четырехмерной кубики//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1984. № 3. 8—14.

4. Фултон У. Теория пересечений. М., 1989.
5. Kawamata Y. A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem//Math. Ann. 1982. 261. 43—46.
6. Данилов В. И. Декомпозиция некоторых бирациональных морфизмов//Изв. АН СССР. Матем. 1980. 44, № 2. 465—477.
7. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М., 1981.
8. Horikawa E. Algebraic surfaces of general type with small $c^2_1$, I//Ann. Math. 1976. 104. 357—387.
9. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М., 1982.
10. Fujita T. On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, II// //J. Math. Soc. Japan. 1981. 33. 415—434.
11. Ando J. On extremal rays of higher dimensional varieties//Inv. Math. 1985. 81. 347—357.

Поступила в редакцию
15.05.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 517.52.75

**С. А. Степанянц**

## ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО

Изучение тауберовых условий, появившихся в конце прошлого века в работах Таубера (см., например, [1]), занимает важное место в теории рядов. В данной работе будет рассмотрено некоторое обобщение тауберовых условий, а именно $T_Q(P)$-условие (где $Q$ и $P$ — некоторые методы суммирования рядов).

Пусть для последовательностей действительных чисел введено некоторое условие $R$. Будем говорить, что условие является $T_Q(P)$-условием, если любой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, суммируемый методом $P$ и такой, что $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $R$, будет суммируем и методом $Q$ (здесь и в дальнейшем рассматриваются последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и соответствующие им ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$).

Если $Q$ — обычная сходимость, то $T_Q(P)$-условие есть просто тауберово условие для метода $P$. В качестве $Q$ и $P$ будем рассматривать методы суммирования Чезаро $(C, \alpha)$ с различными $\alpha$; $\alpha\geqslant 0$. Определение и простейшие свойства методов Чезаро можно найти в [2, § 5.4, 5.5, 5.7] и [3, § 15].

Так как мы в основном ограничиваемся методами суммирования Чезаро целого порядка, то везде далее, если не оговорено противное, $k$ — целое число, $k\geqslant 0$; $\alpha$ — действительное число, $\alpha\geqslant 0$.

Обозначения $a_n=O(c_n)$ и $a_n=o(c_n)$, где $\{c_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, будем понимать в обычном смысле, т. е. $a_n=O(c_n)$ тогда и только тогда, когда существует действительное положительное число $M$, такое, что $|a_n|\leqslant M\,c_n$ для всех $n$; $a_n=o(c_n)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует $N$, такое, что для любого $n>N$ верно неравенство $|a_n|\leqslant\varepsilon\,c_n$.

Далее будем неоднократно пользоваться следующим определением.

Последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^{\infty}$ называется лакунарной по Адамару, если существует действительное число $\lambda$, такое, что $\lambda>1$ и $n_{r+1}/n_r\geqslant\lambda$ для $r=1, 2, 3\ldots$ .