M. M. Malamud, Some analogues of von-Heumann's inequality for $J$-contractions,
*Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1987, Volume 157, 165–172

https://www.mathnet.ru/eng/znsl5215

М.М.Маламуд

# О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГАХ НЕРАВЕНСТВА ДЖ.ФОН НЕЙМАНА ДЛЯ $J$-СЖАТИЙ

В спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве $H$ разнообразные приложения находит известное неравенство Дж.фон Неймана [I] (см.также [2-4] ): $\|f(T)\| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$ для любого сжатия $T$ ($\|T\| \leq 1$) и функции $f(z)$ аналитической в замыкании $\overline{\mathbb{D}}$ круга $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

В заметке доказываются некоторые аналоги этого неравенства для $J$-сжатий ( $J = J^* = J^{-1}$ ).

Будем придерживаться обычных обозначений: $[H]$ - множество линейных ограниченных операторов в $H$, $T_I = (T - T^*)/2i$, $T_R = (T + T^*)/2$ - мнимая и реальная части оператора $T$, $\rho(T)$ - резольвентное множество оператора $T$; $\sigma(T)$ - его спектр; $\sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)$ - соответственно точечный, непрерывный и остаточный спектры; $C_J$ - совокупность всех $J$-сжатий: $T \in C_J \Longleftrightarrow T \in [H]$ и $T^*JT - J \leq 0$.

I. ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $J = J^* = J^{-1}$, $B \in [H]$, $\|B\| < 1$, $BJ = JB$, и $1 \in \rho(B^*T)$. Тогда справедлива импликация: $T \in C_J \Rightarrow \Phi_B(T) \in C_J$, где

$$T_1 = \Phi_B(T) = (I - BB^*)^{-1/2}(T - B)(I - B^*T)^{-1}(I - B^*B)^{1/2} . \qquad (1)$$

Если к тому же $(-1) \in \rho(B^*T_1)$, то верна обратная импликация: $T_1 = \Phi_B(T) \in C_J \Rightarrow T \in C_J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{D}_B = (I - B^*B)^{1/2}$. Тогда

$$J - T_1^* J T_1 = \mathcal{D}_B (I - T^*B)^{-1} K (I - B^*T)^{-1} \mathcal{D}_B , \qquad (2)$$

где

$$K = (I - T^*B)\mathcal{D}_B^{-1} J \mathcal{D}_B^{-1}(I - B^*T) - (T^* - B^*)\mathcal{D}_{B^*}^{-1} J \mathcal{D}_{B^*}^{-1}(T - B) . \qquad (3)$$

Из соотношений $B\mathcal{D}_B^{-1} = \mathcal{D}_{B^*}^{-1}B$, $B^*\mathcal{D}_{B^*}^{-1} = \mathcal{D}_B^{-1}B^*$, $\mathcal{D}_B^{-1}J = J\mathcal{D}_B^{-1}$ следуют равенства

$$T^*\mathcal{D}_{B^*}^{-1} J \mathcal{D}_{B^*}^{-1} B = T^* B \mathcal{D}_B^{-1} J \mathcal{D}_B^{-1}, \quad B^*\mathcal{D}_{B^*}^{-1} J \mathcal{D}_{B^*}^{-1} T = \mathcal{D}_B^{-1} J \mathcal{D}_B^{-1} B^* T ,$$

$$B^*\mathcal{D}_{B^*}^{-1} J \mathcal{D}_{B^*}^{-1} B = J\mathcal{D}_B^{-2} - J, \quad T^* B \mathcal{D}_B^{-1} J \mathcal{D}_B^{-1} B^* T = -T^*JT + T^*J\mathcal{D}_{B^*}^{-2} T$$

с учетом которых выражение (3) для оператора $K$ примет вид: $K = J - T^*JT$. Поэтому из (2)

$$J - T_1^* J T_1 = \mathcal{D}_B (I - T^*B)^{-1} (J - T^*JT)(I - B^*T)^{-1} \mathcal{D}_B \ , \qquad (4)$$

что доказывает импликацию $T \in C_J \Rightarrow \Phi_B(T) \in C_J$. Обратная импликация (при условии $(-1) \in \rho(B^*T)$ ) следует теперь из равенства $T = \mathcal{D}_{B^*}^{-1}(T_1 + B)(I + B^*T_1)\mathcal{D}_B$. Предложение доказано. ●

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$, $f(z) = b_\alpha(z) = (\alpha - z)(1 - \bar{\alpha} z)^{-1} |\alpha| \alpha^{-1}$, $(\bar{\alpha})^{-1} \in \rho(T)$ Тогда верна импликация: $T \in C_J \Rightarrow f(T) \in C_J$.

Напомним, что функцию $f(z) \in H^\infty(\mathbb{D})$ называют внутренней, если $|f(z)| = 1$ для п.в. $z \in \partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$. Хорошо известно (см. [5,3] ), что $f(z) = g(z) B(z)$, где $B(z)$ - произведение Бляшке:

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} b_{\alpha_k}(z) , \quad b_{\alpha_k}(z) = \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \, \frac{|\alpha|}{\alpha} \ . \qquad (5)$$

$g(z) = exp\left( \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{z + \xi}{z - \xi} \, d\mu(\xi) \right)$ - сингулярная внутренняя функция.

Обозначим через $\mathcal{A}_f$ область голоморфности функции $f$. Известно (см. [5] ), что $B(z)$ сходится равномерно на любом замкнутом подмножестве $G \subset \mathbb{C} \setminus K_1$, где $K_1 = clos\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_k)^{-1}\right)$ и, тем самым, $\mathcal{A}_{B(z)} = \mathbb{C} \setminus K_1$. Далее, $\mathcal{A}_{g(z)} = \mathbb{C} \setminus K_2$, где $K_2 = supp\, \mu$ - носитель меры.

ТЕОРЕМА I. Пусть $T \in C_J$, $f(z)$ внутренняя в круге $\mathbb{D}$ функция, голоморфная на спектре $\sigma(T)$ оператора $T$ (т.е. $\sigma(T) \subset \mathcal{A}_f$ ). Тогда $f(T) \in C_J$. Если же $f(z) \in H^\infty(\mathbb{D})$, но не является внутренней и $J \neq \pm I$, то $\exists T \in C_J$, что $\sigma(T) \subset \mathcal{A}_f$, но $f(T) \notin C_J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произведений Бляшке $B(z)$ вида (5) утверждение следует из следствия I, мультипликативности класса $C_J$ и его замкнутости в равномерной операторной топологии. Для доказательства в общем случае воспользуемся теоремой Фростмана ([3, 5] ), в силу которой для п.в. $\lambda \in \mathbb{D}$ внутренняя функция $g_\lambda(z) = b_\lambda(f(z)) = (f(z) - \lambda)(1 - \bar{\lambda} f(z))^{-1}$ является произведением Бляшке и, следовательно, $g_\lambda(T) \in C_J$, если $T \in C_J$ и $\sigma(T) \subset \mathcal{A}_{g_\lambda(z)}$. Далее, для произвольного (не обязательно лежащего в круге) компакта $K$, на котором функция $f$ голоморфна, имеем

$$\lim_{\lambda\to 0}\|f(z)-g_\lambda(z)\|_{L^\infty(K)}=0 . \qquad (6)$$

Действительно, если $\|f\|_{L^\infty(K)}=M$ и $|\lambda|<(2M)^{-1}$, то

$$\left\|f(z)-\frac{f(z)-\lambda}{1-\bar\lambda f(z)}\right\|_{L^\infty(K)}=\sup_K\left|\frac{\lambda-\bar\lambda f(z)^2}{1-\bar\lambda f(z)}\right|\le\frac{1+M^2}{|\lambda^{-1}|-M}\le 2|\lambda|(1+M^2) \qquad (7)$$

и (6) следует из (7). Осталось заметить, что $\sigma(T)\subset\mathcal{A}_{g_\lambda}$, если $\sigma(T)\subset\mathcal{A}_f$ и $|\lambda|$ достаточно мал. Первая часть теоремы доказана.

Второе утверждение достаточно доказать для $H=C^2$, $J=diag(1,-1)$. Если $f(z)\in H^\infty(\mathbb{D})$ и не является внутренней, то $\exists$ множество $E\subset\partial\mathbb{D}$ положительной меры, на котором $\|f\|_{L^\infty(E)}<1$ (или $>1$). Тогда оператор $T=diag(\lambda_1,\lambda_2)\in\in C_J$ при $|\lambda_1|<1$ и $|\lambda_2|<1$. При $\lambda_2(\lambda_1)$ достаточно близком к $E$ $|f(\lambda_2)|<1(|f(\lambda_1)|>1)$ и $f(T)=diag(f(\lambda_1),f(\lambda_2))\notin C_J$. Теорема доказана. ●

2. Хорошо известно, что дробно-линейное преобразование

$$T=(J\mathcal{A}-I)(J\mathcal{A}+I)^{-1} \qquad (8)$$

переводит $m$ - аккретивные[ж)] операторы $\mathcal{A}$ (у которых $-1\in\rho(J\mathcal{A})$) в операторы класса $C_J$. Если же $\mathcal{A}$ $m$ - секториален (с вершиной в нуле и полууглом $\varphi$), то условие $Re(\mathcal{A}f,f)\ge$ $\ge ctg\varphi|Im(\mathcal{A}f,f)|$ трансформируется с учетом равенств $Re(\mathcal{A}(I-T)f,(I-T)f)=((J-T^*JT)f,f)$ и $Im(\mathcal{A}(I-T)f,(I-T)f)=2Im(JTf,f)$ в условие (9) для оператора $T$.

ЛЕММА I. Пусть $\varphi\in[0,\pi/2]$, $T\in[H]$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) $$2\,ctg\,\varphi\,|Im(JTf,f)|\le((J-T^*JT)f,f) \qquad (9)$$

б) $$ctg\,\varphi\,|[(T-T^+)f,f)]|\le[(I-T^+T)f,f] \qquad (10)$$

---

ж) Оператор $\mathcal{A}$ называется $m$ -аккретивным, если $Re(\mathcal{A}f,f)\ge$ $\ge 0$ и $\rho(\mathcal{A})\ne\emptyset$, $m$-секториальным с вершиной в нуле и полууглом $\varphi$, если $\rho(\mathcal{A})\ne\emptyset$ и $Re(\mathcal{A}f,f)\ge ctg\,\varphi\,|Im(\mathcal{A}f,f)|$ $(\forall f\in\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$.

в) $T\sin\varphi \pm i\cos\varphi I \in C_J$ (11)

г) $2\operatorname{ctg}\varphi|((JT)_I f,g)| \le \|(J-T^*JT)^{1/2}f\|\,\|(J-T^*JT)^{1/2}g\|$ (12)

д) $4\operatorname{ctg}\varphi|((JT)_I f,g)| \le ((J-T^*JT)f,f)+((J-T^*JT)g,g)$. (13)

Доказательство очевидно.

Совокупность операторов $T\in[H]$, удовлетворяющих одному из эквивалентных условий леммы 1, обозначим $C_J(\varphi)$. Ясно, что $C_J(\varphi_1)\subset C_J(\varphi_2)$ при $\varphi_1<\varphi_2$ и, в частности, $\forall\varphi\in[0,\pi/2]$ $C_J(\varphi)\subset C_J\equiv C_J(\pi/2)$. В силу а), б) - класс $C_J(0)$ - совокупность $J$-эрмитовых сжатий.

Отметим два простых свойства класса $C_J(\varphi)$:

1) если $\varphi<\pi/2$, $T\in C_J(\varphi)$ и $|\alpha|=1$, то $\alpha\in\sigma_p(T)\Rightarrow\alpha\in\sigma_p(T^*)$

2) если $\varphi<\pi/2$, $1\in\rho(T)$ и $T\in C_J(\varphi)$, то*) $T^*\in C_J(\varphi)$.

Свойство 1) следует из (12), а свойство 2) из следующих тождеств

$$\mathcal{A}+\mathcal{A}^*=2J(I-T)^{-1}(J-TJT^*)(I-T^*)^{-1}J$$

$$\mathcal{A}-\mathcal{A}^*=-2J(I-T)^{-1}(JT^*-TJ)(I-T^*)^{-1}J,$$

в которых $\mathcal{A}=J(I+T)(1-T)^{-1}$ - $m$-секториальный оператор с вершиной в нуле и полууглом $\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $T_1,T_2\in C_J(\varphi)$ и $T_1T_2=T_2T_1$, то $T_1T_2\in C_J(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия $T_1\in C_J(\varphi)$ и $T_2\in C_J(\varphi)$ в силу (13) ведут к неравенствам:

$$2\operatorname{ctg}\varphi|((JT_1-T_1^*J)T_2f,f)| \le ((J-T_1^*JT_1)f,f)+((J-T_1^*JT_1)T_2f,T_2f)$$

$$2\operatorname{ctg}\varphi|(T_1^*(JT_2-T_2^*J)f,f)| \le ((J-T_2^*JT_2)f,f)+((J-T_2^*JT_2)T_1f,T_1f).$$

Сложив их с учетом тождества $JT_1T_2-(T_1T_2)^*J=(JT_1-T_1^*J)T_2+T_1^*(JT_2-T_2^*J)$, придем к неравенству (9) для оператора $T_1T_2$.

СЛЕДСТВИЕ. $\forall n\in\mathbb{Z}_+$ верна импликация: $T\in C_J(\varphi)\Rightarrow T^n\in C_J(\varphi)$

ЛЕММА 2. Пусть $a=\bar a$, $|a|<1$, $b_a(z)=(z-a)(1-az)^{-1}$ и $a^{-1}\in\rho(T)$.

---

*) Возможно, импликация $T\in C_J(\varphi)\Rightarrow T^*\in C_J(\varphi)$ верна без условия $1\in\rho(T)$. При $\varphi=\pi/2$ это не так (см. [6]).

Тогда $\forall\varphi\in[0,\pi/2]$ справедлива импликация:

$$T\in C_J(\varphi)\Longrightarrow T_1=b_a(T)\in C_J(\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из тождеств:

$$J-T_1^*JT=(1-|a|^2)(I-aT^*)^{-1}(J-T^*JT)(I-aT)^{-1}$$

$$\pm i(JT_1-T_1^*J)=\pm i(1-|a|^2)(I-aT^*)^{-1}(JT-T^*J)(I-aT)^{-1}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $a\in\mathbb{C}$, $|a|<1$, $B_2(z)=b_a(z)\,b_{\bar a}(z)$ и $1/a$, $1/\bar a\in\rho(T)$. Тогда $\forall\varphi\in[0,\pi/2]$ верна импликация:

$$T\in C_J(\varphi)\Longrightarrow B_2(T)\in C_J(\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующим представлением $B_2(z)$ через элементарные множители Бляшке: $B_2(z)=b_\beta(z b_\alpha(z))$. Здесь

$$b_\alpha(z)=(z-\alpha)(1-\alpha z)^{-1},\quad \alpha=\bar\alpha=(a+\bar a)(1+|a|^2)^{-1}$$

$$b_\beta(z)=(z-\beta)(1-\beta z)^{-1},\quad \beta=\bar\beta=-|a|^2.$$

Так как $\alpha$ и $\beta$ вещественны, то утверждение следует из леммы 2 и предложения 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T\in[H]$, $f(z)$ – внутренняя в круге функция, причем $f^{t}(z)\overset{def}{=\!=}\overline{f(\bar z)}=f(z)$. Если $A_f\supset\sigma(T)$, то $\forall\varphi\in[0,\pi/2]$ справедлива импликация: $T\in C_J(\varphi)\Rightarrow f(T)\in C_J(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произведений Бляшке $B(z)=B^{t}(z)=\overline{B(\bar z)}$ теорема следует из лемм 2,3, предложения 2, и замкнутости (в равномерной операторной топологии) класса $C_J(\varphi)$. Из доказательства теоремы Фростмана, приведенного в [3, с.77] видно, что можно выбрать вещественную последовательность $\lambda_n=\bar\lambda_n$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$ и $g_{\lambda_n}(z)=b_{\lambda_n}(f(z))$ – произведения Бляшке. В таком случае $g_{\lambda_n}(z)=g^{t}_{\lambda_n}(z)$, ибо $f(z)=f^{t}(z)$ и доказательство завершается также, как в теореме I.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $J=I$ заключение теоремы сохраняется для более широкого класса функций, а именно $\forall f(z)\in H^\infty(\mathbb{D})$ и таких, что $\|f(z)\|_{H^\infty(\mathbb{D})}\le 1$. Для этого случая, т.е. для класса $C(\varphi)$ $(C(\varphi)\equiv C_I(\varphi))$ теорема доказана в [7]. Отметим еще, что в скалярном случае ($\dim H=1$) последнее утверждение означает следующее (аналог леммы Шварца): если $f(z)\in H^{\infty}(\mathbb{D})$ и отображает в себя круг $\mathbb{D}$ и отрезок $(-I,I)$, то $f(z)$ отображает в себя также лунки $|z\sin\varphi \pm i\cos\varphi|\leq 1$ $(\forall\varphi\in(0,\pi/2))$.

3. Здесь будут приведены еще некоторые утверждения о классах $C_J(\varphi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $B=B^*$, $\|B\|<1$ и $\Phi_B(T)$ определено равенством (I). Тогда: $T\in C(\varphi)\Rightarrow \Phi_B(T)\in C(\varphi)$. Если же $J\neq I$ и $BJ=JB$, $BT=TB$ и $1\in\rho(BT)$, то $\forall\varphi\in[0,\pi/2]$ верна импликация: $T\in C_J(\varphi)\Rightarrow \Phi_B(T)\in C_J(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (4) при $J=I$ получим:

$$I-\Phi_B(T)^*\Phi_B(T)=\mathbb{D}_B(I-T^*B)^{-1}(I-T^*T)(I-B^*T)^{-1}\mathbb{D}_B . \tag{I4}$$

Далее, если $K=\mathbb{D}_B(I-T^*B)^{-1}$, то

$$\Phi_B(T)-\Phi_B(T)^*=K\left[(I-T^*B)\mathbb{D}_B^{-2}(T-B)-(T^*-B)\mathbb{D}_B^{-2}(I-BT)\right]K^*=$$

$$=\mathbb{D}_B(I-T^*B)^{-1}(T-T^*)(I-BT)^{-1}\mathbb{D}_B . \tag{I5}$$

Импликация $T\in C(\varphi)\Rightarrow\Phi_B(T)\in C(\varphi)$ следует из (I4),(I5). Далее, если $[B,T]=0$, то $\Phi_B(T)=(T-B)(I-BT)^{-1}$. Поэтому

$$J\Phi_B(T)-\Phi_B(T)^*J=\mathbb{D}_B(I-BT)^{-1}(JT-T^*J)(I-T^*B)^{-1}\mathbb{D}_B . \tag{I6}$$

Импликация $T\in C_J(\varphi)\Rightarrow\Phi_B(T)\in C_J(\varphi)$ следует из (I6) и (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $P^2=P=P^*$, $Q=I-P$, $[J,P]=0$ и $T\in[H]$, $[T,P]=0$. Тогда $\forall\varphi\in[0,\pi/2]$ справедлива импликация: $T\in C_J(\varphi)\Rightarrow T_1=TP+Q\in C_J(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из тождеств:

$$J-T_1^*JT=P(J-T^*JT)P,\qquad JT_1-T_1^*J=P(JT-T^*J)P .$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия предложения 4 и $f_1(z)=$ $=z^nP+Q$, $f_2(z)=b_a(z)P+Q$ – элементарные множители Бляшке-Потапова. Если $T\in C_J$, то $f_1(T)=T^nP+Q\in C_J$ и $f_2(T)=$ $=(T-a)(I-aT)^{-1}P+Q\in C_J$. Если же $a=\bar a$ и $T\in C_J(\varphi)$, то

$f_1(T),\ f_2(T) \in C_J(\varphi) \qquad (\forall \varphi \in [0, \pi/2])$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть*) $J = P_+ - P_-$ (т.е. $2P_\pm = I \pm J$) $(P_+ + P_-T)^{-1} \in [H]$ и $\delta(T) = (P_- + P_+T)(P_+ + P_-T)^{-1}$ – преобразование Потапова-Гинзбурга. Тогда $\forall \varphi \in [0, \pi/2]$ имеет место импликация: $T \in C_J(\varphi) \Longrightarrow \delta(T) \in C(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из тождеств:

$$I - \delta(T)^* \delta(T) = (P_+ + T^* P_-)^{-1} (J - T^* J T)(P_+ + P_-T)^{-1}$$

$$\delta(T) - \delta(T)^* = (P_+ + T\ P_-)^{-1} (JT - T^* J)(P_+ + P_-T)^{-1} .$$

Предложение доказано.

Я признателен В.И.Мацаеву за интерес к работе, стимулировавший ее написание.

## Литература


1. N e u m a n J. von. Eine spectral Theorie für allgemeine Operatoren eines unitären Räumes. – Math.Nachr., 1951, Bd.4, S.258-281.
2. С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б., Ф о й а ш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М., 1970.
3. Н и к о л ь с к и й Н.К. Лекции об операторе сдвига. М., 1980.
4. П е л л е р В.В. Аналог неравенства Дж. фон Неймана. – Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1981, т.155, с.103-150.
5. Г о ф м а н К. Банаховы пространства аналитических функций. М., 1963.
6. А з и з о в Т.Я., И о х в и д о в И.С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой. – Итоги науки и техники. Мат.анализ, 1979, т.17, с.113-205.
7. К о л м а н о в и ч В.Ю., М а л а м у д М.М. Расширение спектральных операторов и дуальных пар сжатий. – 1985. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4428-85 Деп., 56 с.


---

*) Как известно ( [6] ), если $T \in C_J$, то $\mathrm{Ker}(P_+ + P_-T) = 0$ и $(P_+ + P_-T)H = \overline{(P_+ + P_-T)H}$, т.е. условие: $(P_+ + P_-T)^{-1} \in [H]$ эквивалентно такому: $0 \notin \sigma_r(P_+ + P_-T)$. Известно также [6], что $T^* \in C_J \Longrightarrow 0 \notin \sigma_r(P_+ + P_-T)$. Поэтому, если при $\varphi < \pi/2$ верна импликация $T \in C_J(\varphi) \Longrightarrow T^* \in C_J(\varphi)$, то условие $(P_+ + P_-T)^{-1} \in [H]$ излишне.

M.M.Malamud. Some analogues of von-Neumann's inequality for $\mathcal{J}$-contractions.

Summary

Let $\mathcal{J}$ be a self-adjoint operator satisfying $\mathcal{J}^2 = I$. We prove that for any $\mathcal{J}$-contraction $T$ (i.e. $T^*\mathcal{J}T - \mathcal{J} \leqslant 0$) and any inner function $f$ holomorphic on the spectrum of $T$ the function $f(T)$ is a $\mathcal{J}$-contraction too. It is also proved that for $\mathcal{J} \neq \pm I$ only inner functions $f$ satisfy this property. We consider other analogues of von-Neumann's inequality.