Доклады Академии наук СССР
1965. Том 161, № 5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ

О НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРВОГО РОДА

Целью настоящей статьи является развитие методов решения уравнений 1-го рода

$$A[z] = u \qquad (z \in Z,\ u \in U),$$

где $A[z]$ — непрерывный оператор из Z в U, удовлетворяющий условию единственности: $A[z_1] \neq A[z_2]$, если $z_1 \neq z_2$, и Z и U — метрические пространства, удовлетворяющие сформулированным ниже условиям. Эти методы являются развитием идей, изложенных в [1-3].

п. 1. Будем предполагать, что в Z существует множество $\bar{Z}$, которое допускает новую метризацию $\rho_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, мажорантную по отношению к метризации $\rho_0(z_1, z_2)$ пространства Z:

$$\rho_0(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \leqslant \rho_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2),$$

причем сфера $\bar{S}_C(\bar{z}_0) = \{\bar{z}\colon \rho_1(\bar{z}, \bar{z}_0) \leqslant C\}$ в смысле метрики ρ_0 компактна в Z. Будем говорить, что пространство $\bar{Z}_1$ (множество $\bar{Z}$ в метрике ρ_1) s-компактно вложено в Z.

Пусть в Z s-компактно вложено пространство $\bar{Z}_1$, являющееся выпуклым замкнутым множеством некоторого гильбертова пространства, так, что $\rho_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = (\bar{z}_1 - \bar{z}_2, \bar{z}_1 - \bar{z}_2)_1 = \| \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \|_1$ и определено понятие отрезка $[\bar{z}_1, \bar{z}_2] = \{\bar{z} = \alpha\bar{z}_1 + \beta\bar{z}_2 \subset \bar{Z}, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1\}$. Будем предполагать, что диаметр отрезка $[\bar{z}_1, \bar{z}_2]$ в норме ρ_0 стремится к нулю, если $\rho_0(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \to 0$, что всегда выполнено, если пространство Z нормировано.

Пространства $Z = C(a, b)$ и $\bar{Z} = W_2^1(a, b)$ или $\bar{Z} = \{\bar{z}(s)\colon \bar{z} \in W_2^1, q(s) \leqslant \bar{z}(s) \leqslant p(s)\}$, где $q(s)$ и $p(s)$ — заданные ограниченные функции, удовлетворяют этим условиям.

Рассмотрим сглаживающий функционал

$$M^\alpha[\bar{z}, \tilde{u}] = \rho_2^2(A[\bar{z}], \tilde{u}) + \alpha\Omega[\bar{z}] \qquad (\bar{z} \in \bar{Z}),$$

где $\tilde{u}$ — какой-либо элемент U; $\rho_2(u_1, u_2)$ — метрика U, $\Omega[\bar{z}] = \|\bar{z}\|^2$ и $\alpha > 0$ — числовой параметр.

Теорема 1. *Если $\bar{Z}$ — замкнутое выпуклое множество гильбертова пространства, то для всякого $\tilde{u}$ и $\alpha > 0$ существует элемент $z^\alpha \in \bar{Z}$, реализующий минимум $M^\alpha[\bar{z}, \tilde{u}]$.*

Пусть

$$M_0 = \inf M^\alpha[\bar{z}, \tilde{u}], \qquad \bar{z} \in \bar{Z},$$

и $\bar{z}_n$ — минимизирующая последовательность

$$M_n = M^\alpha[\bar{z}_n, \tilde{u}] \to M_0 \qquad (\text{при } n \to \infty).$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $M_{n-1} \leqslant M_n$. Тогда имеем

$$\Omega(\bar{z}_n) \leqslant C_1^2 \qquad \left(C_1^2 = \frac{1}{\alpha} M_1\right),$$

т. е. $\bar{z}_n \in \bar{S}_{C_1}$ при любом n. Не меняя обозначений, будем предполагать, что последовательность $\bar{z}_n$ сходится к z^α в смысле метрики ρ_0. Нетрудно видеть, что $z^\alpha \in \bar{Z}$. В самом деле, для любого ε имеем $\|\bar{z}_n - \bar{z}_{n+p}\|_1 \leqslant \varepsilon$, если $n \geqslant n(\varepsilon)$ и $p > 0$. Предположим, что это не так, т. е. что существует ε_0 такое, что

$$\|\bar{z}_n - \bar{z}_{n+p_n}\|_1 \geqslant \varepsilon_0$$

при как угодно больших номерах n. Положим $\zeta_n = \bar{z}_n - \bar{z}_{n+p_n}$. Очевидно, что $\rho_0(\bar{z}_n, \bar{z}_{n+p_n}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Рассмотрим элемент $\xi_n = {}^1/_2(z_n + z_{n+p_n}) = z_n - {}^1/_2\zeta_n = \bar{z}_{n+p_n} + {}^1/_2\zeta_n$ и

$$M^\alpha[\xi_n, u] = \rho_2^2(A[\bar{z}_n - {}^1/_2\xi_n], \tilde{u}) + \alpha(\|\bar{z}_n\|_1^2 - (\bar{z}_n, \xi_n) + {}^1/_4\|\xi_n\|_1^2) \geqslant M_0.$$

В силу того что $\rho_0(\xi_n, z^\alpha) \to 0$ и $\rho_0(\xi_n, \bar{z}_n) \to 0$, имеем

$$\rho_2^2(A[\xi_n], \tilde{u}) = \rho_2^2(A[z_n], \tilde{u}) + \Delta_n^{(1)} \qquad (\Delta_n^{(1)} \to 0 \text{ при } n \to \infty),$$

откуда следует, что

$$\alpha(-(z_n, \zeta_n)_1 + {}^1/_4\|\zeta_n\|_1^2) \geqslant M_0 - M_n - |\Delta_n^{(1)}| = -\Delta_n'$$

$$(\Delta_n' > 0 \text{ и } \Delta_n' \to 0,\ n \to \infty).$$

Аналогично, представляя ξ_n как $\bar{z}_{n+p_n} + {}^1/_2\zeta_n$, получим

$$\alpha((z_{n+p_n}, \zeta_n)_1 + {}^1/_4\|\zeta_n\|_1^2) \geqslant -\Delta_n'' \qquad (\Delta_n'' > 0 \text{ и } \Delta_n'' \to 0,\ n \to \infty),$$

а также

$$\alpha(-(\bar{z}_n - \bar{z}_{n+p_n}, \zeta_n)_1 + {}^1/_2\|\zeta_n\|_1^2) = -{}^1/_2\alpha\|\zeta_n\|_1^2 \geqslant -(\Delta_n' + \Delta_n'')$$

или

$$\|\zeta_n\|_1 = \|\bar{z}_n - \bar{z}_{n+p_n}\|_1 \leqslant \varepsilon_0/2 \quad \text{для } n \geqslant n(\varepsilon),$$

что противоречит предположению. В силу полноты пространства $\bar{Z}$ элемент $z^\alpha \in \bar{Z}$.

Теорема 2. *Пусть $\bar{u}^{(0)} = A[\bar{z}^0]$, где $\bar{z}^{(0)} \in \bar{Z}$ ($\bar{Z}$ удовлетворяет условиям теоремы 1), и пусть $\rho_2(\tilde{u}, \bar{u}^{(0)}) \leqslant \delta$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $\alpha_0(\delta)$: $\alpha_0(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и $\alpha_0(\delta) \geqslant q_0\delta^2$, существует такое $\delta_0(\varepsilon\|\bar{z}^{(0)}\|_1, \alpha_0, q_0)$, что любой элемент z^α, реализующий минимум $M^\alpha[\bar{z}, \tilde{u}]$ в $\bar{Z}$, удовлетворяет условию*

$$\rho_0(z^\alpha, \bar{z}^{(0)}) \leqslant \varepsilon, \text{ если } q_0\delta^2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta).$$

В самом деле,

$$M^\alpha[z^\alpha, \tilde{u}] \leqslant M^\alpha[\bar{z}^{(0)}, \tilde{u}] \leqslant \delta^2 + \alpha\|\bar{z}^{(0)}\|_1^2,$$

откуда:

1°. $\|z^\alpha\|_1^2 \leqslant \frac{1}{\alpha}(\delta^2 + \alpha\|\bar{z}^{(0)}\|_1^2) \leqslant \frac{1}{q_0} + \|\bar{z}^{(0)}\|_1^2 = C^2$ (т. е. $z^\alpha \in \bar{S}_C$).

2°. $\rho_2(A[z^\alpha], A[\bar{z}^{(0)}]) \leqslant \rho_2(A[z^\alpha], \tilde{u}) + \delta \leqslant \delta + \sqrt{\delta^2 + \alpha_0(\delta)\|\bar{z}^{(0)}\|_1^2} = \eta(\delta)$.

В силу того что все z^α и $\bar{z}^{(0)}$ принадлежат компактному множеству K_C — замыканию $\bar{S}_C$ в Z — существует такое $\eta(\varepsilon)$, что если $\rho_2(u^\alpha, \bar{u}^{(0)}) \leqslant \eta(\varepsilon)$, то $\rho_0(z^\alpha, \bar{z}^{(0)}) \leqslant \varepsilon$. Выбирая δ_0 так, что $\eta(\delta) \leqslant \eta(\varepsilon)$ при $\delta \leqslant \delta_0$, будем иметь

$$\rho_0(z^\alpha, \bar{z}^{(0)}) \leqslant \varepsilon \text{ при } \delta \leqslant \delta_0, \text{ если } q\delta^2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta).$$

п. 2. Если не делать предположения о полноте пространства $\bar{Z}$, то утверждение о том, что $z^\alpha \in \bar{Z}$, неверно. Однако, если обозначить $\hat{z}^\alpha$ какой-либо элемент, для которого

$$M^\alpha[\hat{z}^\alpha, \tilde{u}] \leqslant M_0 + \alpha C \qquad (C = \mathrm{const}),$$

то имеет место

Теорема 3. *Пусть $\bar{Z}$ s-компактно вложено в Z, $\bar{u}^{(0)} = A[\bar{z}^{(0)}]$, где $\bar{z}^{(0)} \in \bar{Z}$. Тогда для любого ε и любой функции $\alpha_0(\delta)$: $\alpha_0(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и $\alpha_0(\delta) \geqslant q_0\delta^2$, существует такое δ_0 $(\varepsilon, \|\bar{z}\|, \alpha_0, q_0, C)$,* что любой элемент $\hat{z}^\alpha$, *для которого*

$$M^\alpha[\hat{z}^\alpha, \tilde{u}] \leqslant M_0 + \alpha C \qquad (\rho_2(\tilde{u}, \bar{u}^{(0)}) \leqslant \delta),$$

удовлетворяет условию

$$\rho_0(\hat{z}^\alpha, \bar{z}^{(0)}) \leqslant \varepsilon, \qquad \textit{если } q_0\delta^2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta).$$

Доказательство этой теоремы по идее близко к доказательству теоремы 2.

п. 3. В настоящем пункте мы приведем условие, при котором z^α определяется однозначно.

Теорема 4. *Если Z нормированное, $\bar{Z}$ и U гильбертовы пространства, $A[\bar{z}^{(0)}] = \bar{u}^{(0)}$ и оператор $A(z) = u$ имеет первый дифференциал $A[z, \zeta]$, удовлетворяющий условиям:*

1) $\|A_1[z_1, \zeta] - A_1[z_2, \zeta]\|_2 \leqslant A_2[\bar{z}^{(0)}]\|z_1 - z_2\|_0\|\zeta\|_0$, *если* $\|z_1 - \bar{z}^{(0)}\|_0 \leqslant \leqslant \varepsilon$, $\|z_2 - z^{(0)}\|_0 \leqslant \varepsilon$;

2) $A_1[\bar{z}^{(0)}, \zeta] \equiv 0$ *только при* $\zeta \equiv 0$

и если $q_0\delta^2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta)$, то существует такое $\delta_1(\|\bar{z}^{(0)}\|_1, q_0, \alpha_0)$, что для всякой функции $\tilde{u}$ такой, что $\|\tilde{u} - \bar{u}^{(0)}\|_2 \leqslant \delta_1$, функция z^α определена однозначно.

Пусть z^α — какой-либо элемент, реализующий минимум

$$M^\alpha[\bar{z}, \tilde{u}] = \|A[\bar{z}] - \tilde{u}\|_2^2 + \alpha\|\bar{z}\|_1^2.$$

В этом случае

$$\delta M^\alpha[z^\alpha, \zeta, \tilde{u}] = (A[z^\alpha] - \tilde{u}; A_1[z^\alpha, \zeta])_2 + \alpha(z^\alpha, \zeta) = 0.$$

Если существуют два элемента z_1^α и z_2^α, для которых δM^α, то, беря их разность $v = z_1^\alpha - z_2^\alpha$, получим

$$R = \delta M^\alpha[z_1^\alpha, \zeta, \tilde{u}] - \delta M^\alpha[z_2^\alpha, \zeta, \tilde{u}] = (A[z_1^\alpha] - A[z_2^\alpha]; A_1[z_1^\alpha, \zeta])_2 + \\ + (A[z_2^\alpha] - \tilde{u}; A_1[z_1^\alpha, \zeta] - A_1[z_2^\alpha, \zeta])_2 + \alpha(v, \zeta)_1 = 0.$$

Воспользуемся тем, что

1^0. $A[z_1^\alpha] - A[z_2^\alpha] = A_1[\bar{z}^{(0)}, v] + \hat{u}$, $\|\hat{u}\|_2 \leqslant \eta(\delta)\|v\|_0$ $(\eta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0)$, так как z_1^α и z_2^α, в силу теоремы 2, при достаточно малом δ находятся в ε-окрестности $\bar{z}^{(0)}$.

2^0. $\|A_1[z_1^\alpha, \zeta] - A_1[z_2^\alpha, \zeta]\|_2 \leqslant A_2\|v\|_0\|\zeta\|_0$.

3^0. $A_1[z_1^\alpha, \zeta] = A_1[\bar{z}_1^{(0)}, \zeta] + \hat{\hat{u}}$, $\|\hat{\hat{u}}\|_2 \leqslant \eta(\delta)\|v\|_0$.

4^0. $\|A[z_2^\alpha] - \tilde{u}\|_2 \leqslant \eta(\delta)$.

Полагая $\zeta = v$, будем иметь

$$R = \|A_1[\bar{z}^{(0)}, v]\|_2^2 + r + \alpha\|v\|_1^2 = 0, \qquad |r| \leqslant \eta(\delta)\|v\|_0^2.$$

Убедимся в том, что

$$\|A_1[\bar{z}^{(0)}, v]\|_2^2 \geqslant s_0^2\|v\|_0^2,$$

откуда будет следовать, что $v \equiv 0$.

В самом деле, при доказательстве теоремы 2 было установлено, что $\|z^\alpha\|_1 \leqslant C$; таким образом, $\|v\|_1 \leqslant 2C$. Рассмотрим

$$s_0 = \inf\|A_1[\bar{z}^{(0)}, \zeta]\|_2, \qquad \zeta \in \bar{\bar{Z}}\{\zeta: \|\zeta\|_0 = 1, \|\zeta\|_1 \leqslant 2C\}.$$

Покажем, что $s_0 > 0$. Пусть ζ_n — миниминизирующая последовательность $\| A_1[\bar{z}^{(0)}, \zeta_n] \|_2 = s_n \to s_0$ (при $n \to \infty$). В силу того что $\bar{\bar{Z}}$ компактно в Z, мы можем считать, что ζ_n сходится в метрике $\| \quad \|_0$ к некоторому элементу ζ_0 и, в силу непрерывности $A_1[\bar{z}^{(0)}, \zeta]$ по ζ, в метрике $\| \quad \|_0$ будем иметь $\|A_1[\bar{z}^{(0)}, \zeta_0]\| = s_0$, откуда и заключаем, что $s_0 \neq 0$, так как $\|\zeta_0\| = 1$.

Приведенное доказательство основано на том, что функционал $M^\alpha[z, \tilde{u}]$ имеет лишь единственную стационарную точку при достаточно малом α. С помощью этого предложения обосновывается метод скорейшего спуска для достаточно малых α.

Поступило
18 XI 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, ДАН, 151, № 3, 501 (1963). [2] А. Н. Тихонов, ДАН, 156, № 6, 1296 (1964). [3] А. Н. Тихонов, С. Б. Гласко, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 4, 564 (1964).