А. Ю. Хасанова, Обратная краевая задача теории теплопереноса, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1983, выпуск 20, 212–219

УДК 536.24

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

А. Ю. ХАСАНОВА

Рассматривается задача отыскания контура, обтекаемого потенциальным потоком несжимаемой жидкости, по заданным на контуре значениям температуры и плотности потока тепла. Используются решения прямых задач о теплообмене при обтекании замкнутого контура [1] и полубесконечного тела [2].

1. Постановка задачи. Найти область течения D_z, распределение температуры T в этой области и комплексный потенциал w потока несжимаемой жидкости, обтекающего неизвестный симметричный замкнутый контур L_z, по заданным на L_z постоянной температуре T_0 и плотности потока тепла $Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$ при наличии теплообмена.

Таким образом, требуется найти решение обратной краевой задачи для уравнения теплообмена

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = a \Delta T \tag{1}$$

по граничным условиям

а) $T = T_0$ на L_z;

б) $\frac{\partial T}{\partial n} = f(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant l)$;

в) $\psi = 0$ на L_z.

Здесь ψ — функция тока, $a = \lambda / c\rho$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость, ρ — плотность жидкости, s — дуговая абсцисса, l — периметр контура, функция $f(s)$ — непрерывная, положительная и удовлетворяет условию

$$f(s) = f(l - s).$$

Температуру в бесконечно удаленной точке обозначим T_∞. Введем функцию

$$T^* = T - T_\infty. \tag{2}$$

Функция T^* удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям

а′) $T^* = T_0 - T_\infty$ на L_z;

б′) $\frac{\partial T^*}{\partial n} = f(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant l)$.

Если течение потенциальное, то уравнение (1) для функции T^* можно представить в виде

$$\frac{\partial T^*}{\partial \varphi} = a\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \psi^2}\right), \tag{3}$$

где φ — потенциал скорости.

Введем комплексный потенциал

$$w = \varphi + i\psi$$

потока, обтекающего контур L_z. В плоскости комплексного потенциала области D_z соответствует область D_w — вся плоскость w с разрезом по отрезку оси φ (рис. 1). Для простоты потенциал скорости в точке разветвления потока положим равным нулю; циркуляцию Γ будем считать равной нулю:

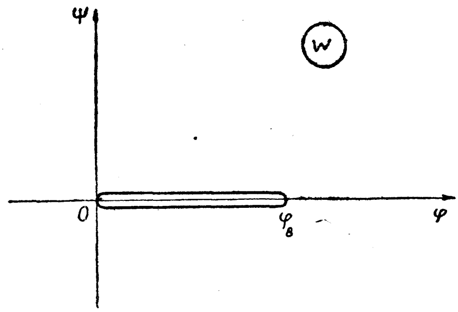

Рис 1.

$$\Gamma = 0.$$

Обозначим $\varphi_B = 2h$, где B — точка схода потока. Величины φ_B и h подлежат определению.

Как известно [1], решение уравнения (3) при граничном условии а′) имеет вид

$$T^* = e^{\frac{a}{2} h \operatorname{ch} \xi \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n \operatorname{in}_n(i\xi, -q)}{\operatorname{in}_n(0, -q)} \operatorname{ce}_n(\eta, -q). \qquad (4)$$

Здесь $q = -\frac{h^2 a^2}{16}$, координаты ξ и η связаны с φ и ψ соотношениями

$$\varphi - \frac{\varphi_B}{2} = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta,$$

$$\psi = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta \quad (0 \leqslant \xi < \infty, \ -\pi \leqslant \eta \leqslant \pi).$$

$\operatorname{ce}_n(\eta, -q)$ — эллиптико-цилиндрические функции Матье, являющиеся периодическими, ортогональными. Они представимы в виде рядов

$$1. \ \operatorname{ce}_{2n}(\eta, -q) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} \cos 2r\eta;$$

$$2. \ \operatorname{ce}_{2n+1}(\eta, -q) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos (2r+1)\eta,$$

где постоянные коэффициенты $A_r^{(n)}$ отыскиваются из рекуррентных соотношений [3]. Функции Матье удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{d^2 y}{d\eta^2} + (\mu - 2q \cos 2\eta) y = 0.$$

Функции Айнса $\operatorname{in}_n(i\xi, -q)$ выражаются через присоединенные функции Матье $\operatorname{ce}_n(i\xi, -q)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - (\mu - 2q \operatorname{ch} 2\xi) y = 0,$$

по формуле

$$\operatorname{in}_n(i\xi, -q) = \operatorname{ce}_n(i\xi, -q) \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{[\operatorname{ce}_n(i\xi, -q)]^2}.$$

Коэффициенты k_n в выражении (4) определяются формулой

$$k_n = \frac{(T_0 - T_\infty) \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{a}{2} h \cos\eta} \operatorname{ce}_n(\eta, -q)\, d\eta}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ce}_n^2(\eta, -q)\, d\eta}.$$

Таким образом, распределение температуры в плоскости w выражается известной функцией

$$T^* = T^*(\varphi, \psi, h, T_\infty),$$

содержащей две неизвестные величины h и T_∞.

Найдем производную $\frac{\partial T^*}{\partial \psi}$ на берегах разреза $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_B$, $\psi = 0$,

$$\frac{\partial T^*}{\partial \psi} = \vartheta(\varphi, h, T_\infty).$$

Тогда поток тепла с некоторого участка разреза запишется в виде

$$-\lambda \int\limits_0^{\varphi} \vartheta(\varphi, h, T_\infty)\, d\varphi. \tag{5}$$

Соответствующий тепловой поток с участка контура L_z определится по формуле

$$-\lambda \int\limits_0^{s} \frac{\partial T^*}{\partial n}\, ds = -\lambda \int\limits_0^{s} f(s)\, ds. \tag{6}$$

Приравнивая (5) и (6), получим

$$\int\limits_0^{\varphi} \vartheta(\varphi, h, T_\infty)\, d\varphi = \int\limits_0^{s} f(s)\, ds. \tag{7}$$

Так как функция $f(s)$ задана, $\vartheta(\varphi, h, T_\infty)$ — известная функция от φ, то, вычислив интегралы в обеих частях равенства (7), получим связь между φ и s

$$\Phi(s) = F(\varphi, h, T_\infty), \tag{8}$$

где

$$\Phi(s) = \int\limits_0^{s} f(s)\, ds, \quad F(\varphi, h, T_\infty) = \int\limits_0^{\varphi} \vartheta(\varphi, h, T_\infty)\, d\varphi.$$

Воспользуемся условием равенства потоков тепла с верхнего берега разреза $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_B$, $\psi = 0$ и соответствующего ему участка контура $L_z : 0 \leqslant s \leqslant s_B$.

Это условие, очевидно, запишется

$$\Phi(s_B) = F\left(\varphi_B, \frac{\varphi_B}{2}, T_\infty\right). \tag{9}$$

Так как контур L_z симметричен, то $s_B = \frac{l}{2}$ — известная величина. Следовательно, из равенства (9) T_∞ можно представить в виде функции от φ_B

$$T_\infty = g(\varphi_B). \tag{10}$$

Решая уравнение (8) относительно φ, найдем φ как функцию дуговой абсциссы s искомого контура, содержащую параметр φ_B

$$\varphi = \varphi(s, \varphi_B). \tag{11}$$

Дифференцируя φ по s, получим распределение скорости на контуре L_z в функции дуговой абсциссы

$$V(s, \varphi_B) = \varphi'(s, \varphi_B).$$

Метод построения контура по заданному на нем распределению скорости изложен в монографии [4].

Пусть $w = \frac{\varphi_B}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + 1\right]$ — функция, отображающая область $|\zeta| > 1$ переменного $\zeta = re^{i\gamma}$ на плоскость w с разрезом по отрезку $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_B$, $\psi = 0$.

Тогда равенство

$$\varphi = \frac{\varphi_B}{2}\cos\gamma + \frac{\varphi_B}{2}$$

устанавливает соответствие между точками окружности $|\zeta| = 1$ и точками берегов разреза в плоскости w.

Пользуясь соотношением (11), находим зависимость

$$s = s(\gamma, \varphi_B).$$

Тогда

$$\ln\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \ln\frac{ds}{d\gamma} = \omega(\gamma, \varphi_B).$$

Пользуясь формулой Шварца, получим

$$\chi(\zeta, \varphi_B) = \ln\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(\gamma', \varphi_B)\frac{\zeta + e^{i\gamma'}}{\zeta - e^{i\gamma'}}d\gamma' + i\beta,$$

где β — произвольная постоянная.

Искомая отображающая функция будет

$$z(\zeta, \varphi_B) = \int e^{\chi(\zeta, \varphi_B)} d\zeta + C. \qquad (12)$$

Для того, чтобы контур L_z был замкнутым, необходимо и достаточно потребовать однозначность функции $z = z(\zeta, \varphi_B)$ определяемой формулой (12).

Для этого должны выполняться условия разрешимости [4]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{ds}{d\gamma} \cos\gamma \, d\gamma = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{ds}{d\gamma} \sin\gamma \, d\gamma = 0. \qquad (13)$$

Наличие в $\ln \frac{ds}{d\gamma}$ неизвестного параметра φ_B облегчает выполнение этих условий.

Значение φ_B будем выбирать таким образом, чтобы для некоторой функции $f(s)$ условия (13) выполнялись одновременно.

Если удастся подобрать одно или несколько таких значений φ_B, то задача будет иметь соответственно одно или несколько решений.

Может случиться, что условия (13) не будут выполняться ни при каких φ_B и $f(s)$. Тогда задача не имеет решения.

Предположим, что существуют такие φ_B и $f(s)$, что условия (13) выполняются. Тогда по формуле (10) можно определить T_∞.

Найденная область D_z может оказаться неоднолистной, что будет означать практическую непригодность полученного решения. Для однолистности области D_z необходимым и достаточным является условие

$$|\omega(\gamma_1) - \omega(\gamma_2)| < K|\gamma_1 - \gamma_2|,$$

где по Л. А. Аксентьеву [4]

$$K = \frac{1}{2\ln 2} \arccos\left\{\frac{1}{2} \exp \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\max\omega(\gamma) - \omega(\gamma)]\, d\gamma\right\}.$$

2. Перейдем к решению обратной краевой задачи для полубесконечного контура L_z.

Постановка задачи. Найдем область течения D_z, распределение температуры T в этой области и комплексный потенциал w потока несжимаемой жидкости, обтекающего неизвестный симметричный полубесконечный контур L_z, при наличии теплообмена, если температура на контуре постоянна и равна T_0, плотность потока тепла задана в функции дуговой абсциссы.

Таким образом, требуется найти решение обратной краевой задачи для уравнения (1) по граничным условиям

А) $T = T_0$ на L_z;

Б) $\frac{\partial T}{\partial n} = f(s)$, $(0 \leqslant s < \infty)$;

В) $T_\infty = 0$;

Г) $\psi = 0$ на L_z.

Считая течение потенциальным и вводя комплексный потенциал потока $w = \varphi + i\psi$, уравнение (1) приведем к уравнению вида (3) относительно функции T.

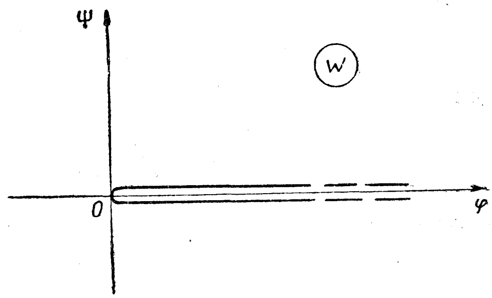

Рис. 2.

Области течения D_z соответствует область D_w — вся плоскость w с разрезом по положительной полуоси φ (положим $w = 0$ при $z = 0$) (рис. 2).

Решение уравнения (3) при граничном условии А) в переменных φ и ψ записывается в виде [2]

$$T(\varphi, \psi) = \frac{T_0}{Y_0^{(2)}(0)} Y_0^{(2)} \left(\sqrt{\frac{1}{2a}} \cdot \sqrt{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2} - \varphi} \right). \qquad (14)$$

Здесь $Y_0^{(2)}(u)$ — функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2 Y}{du^2} + 2u \frac{dY}{du} - 2n Y = 0.$$

$Y_n^{(2)}(u)$ связана с полиномом Чебышева

$$P_n(u) = e^{u^2} \frac{d^n e^{-u^2}}{du^n}$$

следующими формулами:

$$Y_n^{(2)}(u) = Y_n^{(1)}(u) \int\limits_u^\infty \frac{e^{-\alpha^2} d\alpha}{[Y_n^{(1)}(\alpha)]^2};$$

$$Y_n^{(1)}(u) = \begin{cases} -i P_n(-iu), & \text{если } n \text{ — нечетно,} \\ P_n(-iu), & \text{если } n \text{ — четно.} \end{cases}$$

Дифференцируя (14) по ψ, получим

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{T_0}{Y_0^{(2)}(0)} Y_0^{(2)\prime} \left(\sqrt{\frac{1}{2a}} \cdot \sqrt{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2} - \varphi} \right) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{2a}} \cdot \frac{\psi}{2\sqrt{\varphi^2 + \psi^2} \sqrt{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2} - \varphi}}.$$

При $\psi \to 0$ найдем

$$\lim_{\psi \to 0} \frac{\psi}{2\sqrt{\varphi^2 + \psi^2} \sqrt{\sqrt{\varphi^2 + \varphi^2} - \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2\varphi}}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} = \frac{c}{\sqrt{\varphi}},$$

где

$$c = \frac{T_0}{Y_0^{(2)}(0)} Y_0^{(2)\prime}(0) \cdot \sqrt{\frac{1}{4a}}.$$

Поток тепла с некоторого участка разреза будет

$$-\lambda \int_0^{\varphi} \frac{c}{\sqrt{\varphi}} d\varphi. \tag{15}$$

Соответствующий поток тепла с участка контура равен

$$-\lambda \int_0^{s} f(s)\, ds. \tag{16}$$

Приравнивая (15) и (16) и интегрируя (15), получим

$$2c\sqrt{\varphi} = \int_0^{s} f(s)\, ds,$$

отсюда

$$\varphi = \frac{1}{4c^2}\left(\int_0^{s} f(s)\, ds\right)^2, \quad (0 \leqslant s < \infty). \tag{17}$$

Формула (17) позволяет построить контур L_z по известному на нем распределению скорости.

Функция

$$t = \sqrt{w} \tag{18}$$

отображает область D_w на верхнюю полуплоскость в плоскости t.

Функция

$$t = i\,\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \tag{19}$$

устанавливает соответствие между верхней полуплоскостью в плоскости t и областью $|\zeta| > 1$ плоскости переменного $\zeta = re^{i\gamma}$.

Подставляя (19) в (18), найдем функцию, отображающую область $|\zeta| > 1$ на область D_w,

$$w = t^2 = -\left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}\right)^2. \tag{20}$$

Полагая в (20) $\zeta = e^{i\gamma}$, получим

$$\varphi = \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (-\pi \leqslant \gamma \leqslant \pi). \tag{21}$$

Сравнивая (17) и (21), можно найти s, как функцию γ,

$$s = s(\gamma).$$

Тогда по формуле Шварца получим

$$\chi(\zeta) = \ln\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\frac{ds}{d\gamma}\cdot\frac{\zeta + e^{i\gamma}}{\zeta - e^{i\gamma}}\, d\gamma + i\beta.$$

Функция, отображающая область $|\zeta| > 1$ на область течения D_z, будет

$$z(\zeta) = \int e^{\chi(\zeta)}\, d\zeta + C. \tag{22}$$

Полагая в (22) $\zeta = e^{i\gamma}$, можно получить формулу, определяющую координаты искомого контура L_z.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хасанова А. Ю., Тумашев Г. Г. Нагревание потенциального потока идеальной жидкости твердыми стенками.— „Изв. вузов. Математика“, 1978, № 6 (193), с. 109—116.
2. Померанцев А. А. Курс лекций по теории тепло-массообмена. М., 1965.
3. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М., ИИЛ, 1953.
4. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во КГУ, 1965.

Доложено на семинаре 28 января 1982 г.