Yu. I. Lyubich, All ultranormal stochastic Bernstein mappings are regular,
Algebra i Analiz, 1999, Volume 11, Issue 2, 109–141

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 2

К 90-летию со дня рождения
Марка Григорьевича Крейна

ВСЕ УЛЬТРАНОРМАЛЬНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ БЕРНШТЕЙНОВСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫ

© Ю. И. Любич

Доказана одна из ключевых гипотез, относящихся к явному описанию всех стохастических квадратичных отображений V симплекса в себя, таких что $V^2 = V$.

§1. Введение

Настоящая статья написана на основе препринта [22]. В ней излагается доказательство результата, анонсированного в докладе автора на IX международной конференции по теории матриц (Хайфа, 1995) и в заметке [23]. Речь идет об одной проблеме С. Н. Бернштейна [1, 2], выросшей из анализа классических законов популяционной генетики. Воспроизведем постановку этой проблемы.

Пусть $\Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — базисный симплекс,

$$\Delta^{n-1} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = \sum_{i=1}^n x_i = 1,\ x = (x)_1^n \geq 0\Big\}. \tag{1.1}$$

Рассмотрим квадратичное отображение $V : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$,

$$x'_j \equiv (Vx)_j = \sum_{i,k=1}^n p_{ik,j} x_i x_k, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{1.2}$$

стохастическое в том смысле, что

$$p_{ik,j} \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^n p_{ik,j} = 1 \tag{1.3}$$

(обычная симметрия $p_{ki,j} = p_{ik,j}$ также предполагается). Отображение V называется *бернштейновским*, если $V^2 = V$. Иными словами, образ $\operatorname{Im} V$ совпадает с множеством неподвижных точек, т.е. каждая траектория $(V^k x)_{k=0}^{\infty}$ соответствующей динамической системы стабилизируется за один шаг. По идее Бернштейна (восходящей к Дарвину) такая простейшая популяционная динамика характерна для элементарных механизмов наследования. Основной из них, открытый Менделем в 1865 г., определяет *отображение Харди–Вайнберга* (см. [6]) и, обратно, определяется этим отображением путем естественной генетической интерпретации. Само же отображение имеет вид

$$x_1' = p^2, \qquad x_2' = q^2, \qquad x_3' = 2pq, \tag{1.4}$$

где

$$p = x_1 + \frac{1}{2}x_3, \qquad q = x_2 + \frac{1}{2}x_3. \tag{1.5}$$

Отображение Харди–Вайнберга бернштейновское. Действительно,

$$p' \equiv p(Vx) = x_1' + \frac{1}{2}x_3' = p^2 + pq = p, \tag{1.6}$$

так как $p + q = s(x) = 1$ при $x \in \Delta^2$. Аналогично $q' = q$. Следовательно, $x_1'' = (p')^2 = p^2 = x_1'$ и точно так же $x_2'' = x_2'$, $x_3'' = x_3'$.

Проблема Бернштейна состоит в явном описании всех бернштейновских отображений.

Тривиальные бернштейновские отображения, имеющиеся во всех размерностях: *единичное* отображение I ($Ix = x$) и *константные* отображения $V_c x = c$ ($c \in \Delta^{n-1}$). (Все они могут быть записаны как квадратичные: $x = xs(x)$; $c = cs^2(x)$). Легко доказать, что *при $n \leq 2$ не существует нетривиальных бернштейновских отображений.* Наименьшая размерность n, в которой проблема Бернштейна нетривиальна, равна 3. В этом случае решение было найдено самим С. Н. Бернштейном, который получил также ряд важных результатов в произвольной размерности n, но при специальных предположениях о коэффициентах $p_{ik,j}$. Однако, за исключением отображения Харди–Вайнберга, С. Н. Бернштейн не предложил генетической интерпретации своих отображений. В нашей статье [8] (см. также [12; 20, §4.3, 4.6]) такая интерпретация была дана в рамках введенного по этому поводу класса *регулярных* (или *правильных*) отображений. Что касается нерегулярного случая, то он, по-видимому, не имеет никакого естественного генетического смысла. По этой причине в [8] была поставлена более узкая проблема явного описания всех регулярных отображений. Она была решена в серии наших работ [8, 9, 12, 15]. Эти результаты изложены также в книге [20, гл. 4].

Воспроизведем определение регулярности. Для заданного стохастического квадратичного отображения: $V : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$ линейная форма

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{1.7}$$

называется *инвариантной*, если $f(Vx) = f(x)$ $(x \in \Delta^{n-1})$, или $f' = f$ для краткости. Таковы, например, p и q для отображения Харди–Вайнберга.

Множество J всех инвариантных линейных форм является линейным пространством. Очевидно, $s \in J$, следовательно, $\dim J \geq 1$. Формы, пропорциональные s, называются *тривиальными*. Для любого константного отображения все инвариантные линейные формы тривиальны. Для единичного отображения (и только для него) все линейные формы инвариантны, т.е. $\dim J = n$. В общем случае $1 \leq \dim J \leq n$.

Отображение V называется *регулярным*, если оно может быть записано в виде

$$x'_j = \sum_{i,k=1}^{r} c_{ik,j} f_i(x) f_k(x), \quad 1 \leq j \leq n, \tag{1.8}$$

где $f_1, \ldots, f_r$ — некоторые инвариантные линейные формы. Таково, например, отображение Харди–Вайнберга. Другой важный пример — *кадрильное* отображение $V : \Delta^3 \to \Delta^3$ $(n = 4)$, найденное еще С. Н. Бернштейном. Оно определяется как

$$x'_1 = p_1 q_1, \qquad x'_2 = p_2 q_2, \qquad x'_3 = p_1 q_2, \qquad x'_4 = p_2 q_1, \tag{1.9}$$

где

$$p_1 = x_1 + x_3, \qquad p_2 = x_2 + x_4, \qquad q_1 = x_1 + x_4, \qquad q_2 = x_2 + x_3. \tag{1.10}$$

Очевидно, линейные формы p_1, p_2, q_1, q_2 инвариантны.

Тривиальные отображения регулярны. Если отображение регулярно и все инвариантные линейные формы тривиальны (т.е. $\dim J = 1$), то отображение константное.

Все регулярные отображения бернштейновские.

Упомянутая генетическая интерпретация регулярных отображений, вообще говоря, допускает некоторую редукцию, после которой она становится „нормальной“ (см. [8; 20, §4.2]). В математических терминах это означает следующее.

Стохастическое квадратичное отображение V называется *нормальным* (или *неприводимым*), если

1) все x'_j отличны от тождественного нуля (*невырожденность*);

2) все пары x'_{j_1}, x'_{j_2} $(j_1 \neq j_2)$ линейно-независимы (*внешняя неприводимость*);

3) не существует пар x_i, x_k $(i \neq k)$ таких, что все x'_j зависят только от $x_i + x_k$ и остальных x_l (*внутренняя неприводимость*).

В противном случае отображение называется *приводимым* и может быть преобразовано в неприводимое путем некоторой процедуры *нормализации* (см. [20, §3.9]). Константные отображения при $n \geq 2$ приводимы.

Отображение Харди–Вайнберга, кадрильное отображение, единичное отображение — все нормальны и даже обладают более сильным свойством ультранормальности. Стохастическое квадратичное отображение V называется *ультранормальным* (или *вполне неприводимым*), если его ограничения на все инвариантные грани симплекса Δ^{n-1} нормальны. Из упомянутых выше результатов (см. [20, §4.3, 4.6]) непосредственно усматривается, что *все регулярные нормальные отображения ультранормальны.*

Основная теорема. *Все ультранормальные бернштейновские отображения регулярны.*

Отметим, что, кроме регулярного случая, проблема Бернштейна была ранее решена нами и в так называемом *исключительном* случае (см. [14; 20, §5.5]. При $n \leq 4$ все бернштейновские алгебры регулярны или исключительны. Тем самым проблема Бернштейна была решена, в частности, при $n = 4$ (см. также [10, 13]). При $n = 5, 6$ проблема была решена недавно в [4, 5].

Основная теорема была сформулирована в [19] как гипотеза и там же доказана в случаях $\dim(\operatorname{Im} V) \leq 2$ или $\geq n-2$, в частности, при $n \leq 5$ (см. также [20, §5.7]). Теперь мы доказываем ее в общем случае, усовершенствуя алгебраические и топологические методы, развитые нами в цитированных выше работах (см. также [18]). Соответствующий подготовительный материал собран в §2–5 настоящей статьи (по поводу доказательств там, где они опущены, см. [20, гл. 3–5]). Собственно доказательство основной теоремы изложено в §6. Оно проводится в терминах алгебры $\mathcal{A}_V$, определяемой таблицей умножения

$$e_i e_k = \sum_{j=1}^{n} p_{ik,j} e_j, \quad 1 \leq i, k \leq n, \tag{1.11}$$

в каноническом базисе $\{e_i\}_1^n$ пространства $\mathbb{R}^n$. Алгебраический подход мы систематически применяли, начиная с [9] (фактически — с [8], хотя там был использован язык отображений). Опишем его несколько подробнее.

В силу (1.11)

$$(xy)_j = \sum_{i,k=1}^{n} p_{ik,j} x_i y_k, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{1.12}$$

для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, в частности, в силу (1.2)

$$x^2 = Vx, \quad x \in \Delta^{n-1}. \tag{1.13}$$

Квадратичное отображение $\widetilde{V}x = x^2$, определенное во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, является продолжением отображения V.

Алгебра $\mathcal{A}_V$ коммутативна, так как $p_{ki,j} = p_{ik,j}$. Однако $\mathcal{A}_V$, как правило, неассоциативна.

Алгебра $\mathcal{A}_V$ — *стохастическая* в том смысле (см. [18; 20, 3.8]), что симплекс Δ^{n-1} инвариантен относительно умножения. Действительно, $x \geq 0 \& y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$ и $(s(x) = 1)\&(s(y) = 1) \Rightarrow s(xy) = 1$. Последнее вытекает из того, что линейный функционал s мультипликативен,

$$s(xy) = s(x)s(y). \tag{1.14}$$

Таким образом, пара $(\mathcal{A}_V, s)$ является *барической алгеброй с весом* s (см. [3; 20, §3.3]).

Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}_V$ *нормальна*, если нормально отображение V.

Заметим, что инвариантные грани симплекса Δ^{n-1} — это в точности такие грани Γ, что линейные оболочки $\operatorname{Lin}\Gamma$ (т.е. соответствующие координатные пространства) являются подалгебрами в $\mathcal{A}_V$. Подалгебра $\mathcal{A}_{V|\Gamma}$ — стохастическая, соответствующий вес равен $s|\operatorname{Lin}\Gamma$.

Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}_V$ *ультранормальна*, если ультранормально отображение V, т.е. все координатные подалгебры $\mathcal{A}_{V|\Gamma}$ нормальны.

Барическая алгебра $(\mathcal{A}, \sigma)$ с весом σ называется *бернштейновской*, если в ней выполняется тождество

$$(x^2)^2 = \sigma^2(x)x^2. \tag{1.15}$$

Лемма 1.1 (ср. [8]). *Стохастическое квадратичное отображение V является бернштейновским тогда и только тогда, когда алгебра $(\mathcal{A}_V, s)$ является бернштейновской.*

Тождество (1.15) в форме $\widetilde{V}^2x = s^2(x)\widetilde{V}x$ появилось уже в [8] и в окончательной форме — в [12]. Позднее Холгейт [7] и автор [17] рассмотрели некоторые внутренние проблемы бернштейновских алгебр. (Термин „бернштейновская алгебра" был введен в [17]). В настоящее время теория бернштейновских алгебр продвинута довольно далеко (см., например, [20, 21, 24, 25]; обзор [24] содержит ряд ссылок на недавние работы, но ранняя история вопроса изложена там весьма неточно).

Необходимые для дальнейшего свойства бернштейновских алгебр излагаются в §2. Некоторые из них являются новыми и приводятся с полными доказательствами.

Барическая алгебра $(\mathcal{A}, \sigma)$ называется *регулярной*, если произведение xy зависит только от значений инвариантных линейных форм на векторах x, y. При этом линейная форма f на $\mathcal{A}$ называется *инвариантной*, если $f(x^2) = f(x)$ при условии нормировки $\sigma(x) = 1$ или, что равносильно, $f(x^2) = \sigma(x)f(x)$ во всем пространстве. Для алгебры $(\mathcal{A}_V, s)$ инвариантные линейные формы — те же, что для отображения V.

Все регулярные барические алгебры бернштейновские.

Лемма 1.2. *Стохастическое квадратичное отображение V регулярно тогда и только тогда, когда алгебра $(\mathcal{A}_V, s)$ регулярна.*

В §3 мы приводим явное описание всех нормальных регулярных стохастических алгебр, соответствующее явному описанию всех нормальных регулярных стохастических квадратичных отображений (ср. [20, §4.3, 4.6]).

Теперь основная теорема может быть сформулирована на адекватном, с точки зрения доказательства, алгебраическом языке: *все ультранормальные стохастические бернштейновские алгебры регулярны.* Этим результатом в силу сказанного выше исчерпывается ультранормальный случай проблемы Бернштейна. Что касается проблемы Бернштейна в целом, то она, очевидно, эквивалентна явному описанию всех стохастических бернштейновских алгебр.

§2. Бернштейновские алгебры

В любой барической алгебре $(\mathcal{A}, \sigma)$ подпространство $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} \sigma = \{x : x \in \mathcal{A}, \sigma(x) = 0\}$ инвариантно для всех линейных операторов $x \mapsto zx$ $(z \in \mathcal{A})$, т.е. это — идеал (*баридеал*). Всюду ниже $(\mathcal{A}, \sigma)$ — *бернштейновская алгебра* над $\mathbb{R}$, $\dim \mathcal{A} = n$. В ней особую роль играет оператор $L_e x = 2ex$, где e — ненулевой идемпотент, т.е. $e^2 = e \neq 0$. Заметим, что $\sigma(e) = 1$, и, обратно, если $\sigma(\varepsilon) = 1$, то $e = \varepsilon^2$ является ненулевым идемпотентом в силу основного тождества (1.15).

Лемма 2.1. *Оператор L_e в $\mathcal{B}$ является проектором. Его ранг не зависит от выбора идемпотента e.*

Ниже идемпотент e фиксирован и $L_e \mid \mathcal{B} \equiv L$ для краткости. Пара чисел (m, δ), где $m = \operatorname{rank} L + 1$, $\delta = \operatorname{def} L$, называется *типом* алгебры $(\mathcal{A}, \sigma)$. Число m называется *рангом алгебры* $(\mathcal{A}, \sigma)$, δ — ее *дефектом*. Очевидно, $m + \delta = n$ в соответствии с разложением

$$\mathcal{A} = E \oplus U \oplus W, \tag{2.1}$$

где $E = \operatorname{Lin}\{e\}$, $U = \operatorname{Im} L$, $W = \operatorname{Ker} L$. При этом $\mathcal{B} = U \oplus W$. Оказывается, что

$$U^2 \subset W, \qquad UW \subset U, \qquad W^2 \subset U. \tag{2.2}$$

Поэтому если

$$x = \sigma e \oplus u \oplus w \tag{2.3}$$

в соответствии с (2.1), то

$$x^2 = \sigma^2 e \oplus (\sigma u + 2uw + w^2) \oplus u^2, \tag{2.4}$$

принимая во внимание, что $\sigma = \sigma(x)$, $2eu = Lu = u$, $2ew = Lw = 0$.

Сравнивая (2.3) и (2.4), легко видеть, что *вектор* $x \neq 0$ *является идемпотентом тогда и только тогда, когда* $x = e \oplus u \oplus u^2$, т.е. множество таких векторов является графиком отображения $U \to \mathcal{A}$, следовательно, его размерность равна $m-1$. В частности, для бернштейновского отображения V получается формула

$$\dim(\operatorname{Im} V) = m - 1, \tag{2.5}$$

где m — ранг алгебры $(\mathcal{A}_V, \sigma)$.

Тривиальные бернштейновские алгебры — это *константные* алгебры (*к.а.*), в которых $x^2 = c\sigma^2(x)$, где c — фиксированный вектор, $\sigma(c) = 1$, и *единичная* алгебра (*е.а.*), в которой $x^2 = \sigma(x)x$. Тип любой к.а. равен $(1, n-1)$, и, обратно, любая бернштейновская алгебра типа $(1, n-1)$ есть к.а. Тип е.а. равен $(n, 0)$, и, обратно, если тип бернштейновской алгебры равен $(n, 0)$, то она константная.

Алгебра $(\mathcal{A}_V, \sigma)$ является к.а. (е.а.) тогда и только тогда, когда V — константное (единичное) отображение.

Таблица умножения в к.а. имеет вид

$$e_i e_k = c, \quad 1 \leq i, k \leq n, \tag{2.6}$$

так как здесь вообще

$$xy = c\sigma(x)\sigma(y). \tag{2.7}$$

Эта алгебра ассоциативна.

В е.а.

$$e_i e_k = \frac{e_i + e_k}{2}, \quad 1 \leq i, k \leq n, \tag{2.8}$$

так как здесь вообще

$$xy = \frac{\sigma(y)x + \sigma(x)y}{2}. \tag{2.9}$$

Эта алгебра уже неассоциативна.

Алгебра, отвечающая отображению Харди–Вайнберга, называется *менделевской* (*м.а.*). Это бернштейновская алгебра типа (2,1) с таблицей умножения

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 e_2 = e_3, \tag{2.10}$$

$$e_1 e_3 = \frac{1}{2}(e_1 + e_3), \quad e_2 e_3 = \frac{1}{2}(e_2 + e_3), \tag{2.11}$$

$$e_3^2 = \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_3. \tag{2.12}$$

Предложение 2.2. *Пусть z_1 и z_2 — ненулевые идемпотенты, $z_3 = z_1 z_2$. Тогда*

$$z_1 z_3 = \frac{z_1 + z_3}{2}, \quad z_2 z_3 = \frac{z_2 + z_3}{2} \tag{2.13}$$

и

$$z_3^2 = \frac{1}{4} z_1 + \frac{1}{4} z_2 + \frac{1}{2} z_3. \tag{2.14}$$

Таким образом, подпространство $Z = \mathrm{Lin}\{z_1, z_2, z_3\}$ является бернштейновской подалгеброй, которая изоморфна м.а., если (и только если) $\dim Z = 3$, т.е. z_1, z_2, z_3 линейно независимы. В противном случае Z является е.а.

Для наших целей полезно ввести новое коммутативное умножение

$$R(x, y) = 2xy - \sigma(y)x - \sigma(x)y \tag{2.15}$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$ данной алгебры. Очевидно, $R(x, x) = 0$ для любого идемпотента x. Оба умножения, исходное и новое, имеют одни и те же подалгебры.

Отметим, что

$$R(x, y) = 2(xy - x \circ y), \tag{2.16}$$

где $x \circ y$ — умножение в е.а. (см. (2.9)). Поэтому

$$R(x, y) = 0 \iff xy = x \circ y. \tag{2.17}$$

Лемма 2.3. *Для любых идемпотентов z_1, z_2, z_3, z_4*

$$R(z_1 z_2, z_3 z_4) + R(z_1 z_3, z_2 z_4) + R(z_1 z_4, z_2 z_3) = 0. \tag{2.18}$$

Доказательство. Это тривиально, если среди z_i есть нуль. Если же все $z_i \neq 0$, то для получения (2.18) достаточно подставить

$$x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i z_i, \quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^{4} \xi_i$$

в (1.15) и сравнить коэффициенты при $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ в обеих частях равенства. •

Следствие 2.4. *Для любых идемпотентов z_1, z_2, z_3*

$$2R(z_1 z_2, z_1 z_3) + R(z_1, z_2 z_3) = 0. \tag{2.19}$$

Доказательство. Полагаем $z_4 = z_1$ в (2.18). •

Следствие 2.5. *Если* z_1, z_2, w_1, w_2 *— такие ненулевые идемпотенты, что*

$$R(z_i, w_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \tag{2.20}$$

то

$$R(z_1 z_2, w_1 w_2) = -\frac{R(z_1, z_2) + R(w_1, w_2)}{2}. \tag{2.21}$$

Доказательство. В силу (2.17), (2.18) и (2.20) имеем

$$\begin{aligned} R(z_1 z_2, w_1 w_2) &= -R(z_1 w_1, z_2 w_2) - R(z_1 w_2, z_2 w_1) \\ &= -R(z_1 \circ w_1, z_2 \circ w_2) - R(z_1 \circ w_2, z_2 \circ w_1) \\ &= -\frac{1}{4}[R(z_1 + w_1, z_2 + w_2) + R(z_1 + w_2, z_2 + w_1)]. \end{aligned}$$

Опять учитывая (2.20), получаем (2.21). •

Следствие 2.6. *Если* z_1, z_2, w *— такие ненулевые идемпотенты, что*

$$R(z_i, w) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.22}$$

то

$$R(z_1 z_2, w) = -\frac{1}{2} R(z_1, z_2). \tag{2.23}$$

Таким образом, $R(z_1 z_2, w)$ не зависит от w при данных условиях.

Доказательство. Полагаем $w_1 = w_2 = w$ в (2.21). •

В нашем контексте особенно важны регулярные алгебры, т.е. такие $(\mathcal{A}, \sigma)$, в которых xy зависит только от значений $f(x), f(y)$, где f пробегает пространство J всех инвариантных линейных форм. Определение инвариантной линейной формы f эквивалентно тождеству

$$f(xy) = \frac{\sigma(y) f(x) + \sigma(x) f(y)}{2}, \tag{2.24}$$

т.е.

$$f(R(x, y)) = 0. \tag{2.25}$$

Если ранг алгебры равен m, то $1 \leq \dim J \leq m$.

М.а., а также все тривиальные бернштейновские алгебры (т.е. к.а. и е.а.) регулярны.

Регулярность алгебры $(\mathcal{A}, \sigma)$ характеризуется тождеством

$$x^2 y = \sigma(x) xy, \tag{2.26}$$

тесно связанным со следующей серией характеризаций.

Теорема 2.7. *Для алгебры $(\mathcal{A}, \sigma)$ ранга m следующие условия эквивалентны:*

1) *алгебра регулярна;*
2) $\dim J = m$;
3) $UW + W^2 = 0$;
4) $UW = 0$, $W^2 = 0$, *т.е.* (2.4) *имеет вид*

$$x^2 = \sigma^2 e \oplus \sigma u \oplus u^2. \tag{2.27}$$

Следствие 2.8. *Если существует такой идемпотент $e \neq 0$, что выполняется тождество*

$$x^2 e = \sigma(x) x e, \tag{2.28}$$

то алгебра регулярна.

Доказательство. Подставляя x и x^2 из (2.3) и (2.4) в (2.28), получаем

$$\sigma^2 e \oplus \frac{1}{2}(\sigma u + 2uw + w^2) = \sigma^2 e \oplus \frac{1}{2}\sigma u,$$

откуда $uw + \frac{1}{2}w^2 = 0$. Заменяя u на αu и w на βw, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, получаем $uw = 0$, $w^2 = 0$. По теореме 2.7 алгебра регулярна. •

Следствие 2.9. *Пусть $\mathcal{A} = \mathrm{Lin}\{v_i\}_1^l$, $\sigma(v_i) = 1$, $1 \leq i \leq l$. Если существует такой идемпотент $e \neq 0$, что*

$$(v_i v_k)e = \frac{v_i e + v_k e}{2}, \quad 1 \leq i, k \leq l, \tag{2.29}$$

то алгебра регулярна.

Доказательство. Из (2.29) и разложения

$$x = \sum_{i=1}^{l} \xi_i v_i$$

следует (2.28). •

Отметим, что (2.29) можно записать в виде

$$R(v_i, v_k)e = 0, \quad 1 \leq i, k \leq l. \tag{2.30}$$

На этом же языке (2.26) выражается как $R(x,x)y = 0$, что эквивалентно тождеству $R(x,z)y = 0$ с независимыми переменными x, y, z.

В силу характеризации (2.26) любая барическая подалгебра $(L, \sigma \mid L)$ регулярной алгебры $(\mathcal{A}, \sigma)$ регулярна. Но подалгебра может оказаться регулярной и в нерегулярной бернштейновской алгебре $(\mathcal{A}, \sigma)$. Простейшая конструкция такого рода дается предложением 2.2. Нам понадобятся также некоторые более сложные конструкции.

Предложение 2.10. *Пусть* $\{z_i\}_1^\nu$ *— некоторое семейство идемпотентов такое, что* $L = \mathrm{Lin}\{z_i\}_1^\nu$ *является регулярной подалгеброй. Тогда*

1) *если* w *— такой идемпотент, что*

$$R(z_j, w) = 0, \quad 1 \leq j \leq n,$$

то $L[w] = L \oplus \mathrm{Lin}\{w\}$ *— регулярная подалгебра;*

2) *если* w_1, w_2 *— такие идемпотенты, что*

$$R(z_i, w_j) = 0, \quad 1 \leq i \leq \nu; \;\; j = 1, 2, \tag{2.31}$$

и

$$R(w_1, w_2) z_1 = 0, \tag{2.32}$$

то $L[w_1, w_2] = L \oplus \mathrm{Lin}\{w_1, w_2, w_1 w_2\}$ *— регулярная подалгебра.*

Доказательство. 1) В силу следствия 2.6 все $R(z_i z_k, w)$ принадлежат L, откуда $(z_i z_k) w \in L[w]$. Следовательно, $L[w]$ — подалгебра. Она является линейной оболочкой векторов $w, z_i z_k$, $1 \leq i, k \leq \nu$, среди которых есть $z_1 = z_1^2$. Применим следствие 2.9 с $e = z_1$. В силу (2.23)

$$z_1 R(z_i z_k, w) = -\frac{1}{2} z_1 R(z_i, z_k), \quad 1 \leq i, k \leq \nu.$$

Правая часть этого равенства обращается в нуль, так как подалгебра L регулярна. Следовательно, и $L[w]$ регулярна.

2) Мы уже знаем, что $L[w_1], L[w_2]$ и $\mathrm{Lin}\{w_1, w_2, w_1 w_2\}$ — регулярные подалгебры (последняя из них изоморфна м.а. или является е.а., согласно предложению 2.2). Кроме того, все $R(z_i z_k, w_1 w_2)$ принадлежат $L[w_1, w_2]$, согласно следствию 2.5, откуда $(z_i z_k)(w_1 w_2) \in L[w_1, w_2]$. Таким образом, $L[w_1, w_2]$ — подалгебра. Она регулярна, так как из следствия 2.5 и регулярности L вытекает, что

$$z_1 R(z_i z_k, w_1 w_2) = -\frac{1}{2} z_1 R(w_1, w_2) = 0, 1 \leq i, k \leq \nu,$$

и, кроме того,

$$R(w_j, w_1 w_2) = 0, \;\; j = 1, 2; \qquad R(w_1 w_2, w_1 w_2) = -\frac{1}{2} R(w_1, w_2),$$

согласно предложению 2.2. •

Некоторые важные достаточные условия регулярности бернштейновской алгебры $(\mathcal{A}, \sigma)$ формулируются в терминах типа (m, δ). Напомним, что (любая) алгебра $\mathcal{A}$ называется *нуклеарной*, если $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

Теорема 2.11. *Если бернштейновская алгебра нуклеарна и $m \le 3$ или $\delta \le 1$, или*

$$\delta \ge \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1, \tag{2.33}$$

то алгебра регулярна.

Следствие 2.12. *Любая нуклеарная бернштейновская алгебра размерности $n \le 5$ регулярна.*

В размерности $n = 6$ существует нерегулярная нуклеарная бернштейновская алгебра типа (4,2).

Бернштейновская алгебра $(\mathcal{A}, \sigma)$ называется *исключительной*, если $U^2 = 0$. *Если $m \le 2$ или $\delta \le 1$ (в частности, при $n \le 4$), любая нерегулярная бернштейновская алгебра типа (m, δ) исключительна.*

Теорема 2.13. *При $m \le 2$ или $\delta \le 1$ (в частности, при $n \le 4$) любая нормальная стохастическая бернштейновская алгебра регулярна.*

Сверх этого, имеет место

Теорема 2.14. *При $m \le 3$ или $\delta \le 1$ (в частности, при $n \le 5$) любая ультранормальная стохастическая бернштейновская алгебра регулярна.*

Это частный случай основной теоремы был получен в [19].

§3. Нормальные регулярные стохастические алгебры

Явный вид таких алгебр дает следующая теорема, доказанная шаг за шагом в [8, 9, 12, 17] (см. также [20, гл. 4]), но сформулированная там в терминах отображений.

Теорема 3.1. *Каждая нормальная регулярная стохастическая алгебра типа (m, δ) принадлежит к одному из следующих двух классов.*

1) *С точностью до нумерации канонического базиса $\{e_i\}_1^n$ векторы $e_1, \dots, e_m$ являются идемпотентами и перемножаются по формулам*

$$e_{i_j} e_{k_j} = \alpha_j e_{i_j} + \beta_j e_{k_j} + \gamma_j e_{m+j} \tag{3.1}$$

для некоторых различных пар (i_j, k_j) с $1 \le i_j < k_j \le m$, $\;1 \le j \le \delta$, и

$$e_i e_k = \frac{e_i + e_k}{2} \tag{3.2}$$

для остальных пар (i, k), т.е. для $1 \le i < k \le m$, $i \ne i_j$ или $k \ne k_j$. В (3.1) $\alpha_j \ge 0$, $\beta_j \ge 0$, $\gamma_j > 0$, $\alpha_j + \beta_j + \gamma_j = 1$.

Далее,

$$e_i e_{m+j} = c_j e_i e_{i_j} + \overline{c_j} e_i e_{k_j} \tag{3.3}$$

при $1 \le j \le \delta$ *и* $1 \le i \le m$, *где* $0 < c_j < 1$; $\overline{c}_j = 1 - c_j$ *и*

$$\alpha_j + c_j \gamma_j = \beta_j + \overline{c}_j \gamma_j = \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

Наконец,

$$e_{m+j} e_{m+l} = c_j c_l e_{i_j} e_{i_l} + c_j \overline{c}_l e_{i_j} e_{k_l} + \overline{c}_j c_l e_{k_j} e_{i_l} + \overline{c}_j \overline{c}_l e_{k_j} e_{k_l} \tag{3.5}$$

при $1 \le j \le l \le \delta$.

2) *Все базисные векторы* $e_1, \ldots, e_n$ *— идемпотенты. Размерность* n *является составным числом, т.е.* $n = \nu\overline{\nu}$, *где* $\nu \ge 2$, $\overline{\nu} \ge 2$. *Базис может быть занумерован в виде* $\{e_{ik} : 1 \le i \le \nu, \ \ 1 \le k \le \overline{\nu}\}$ *так, что*

$$e_{ik} e_{jl} = \frac{e_{il} + e_{jk}}{2} \tag{3.6}$$

для всех пар (i, k), (j, l).

Обратно, все вышеописанные стохастические алгебры нормальны и регулярны.

В соответствии с естественной генетической интерпретацией (см. [20, гл. 4] мы говорим, что в случае 1) имеет место *элементарная генная структура* (*э.г.с.*), а в случае 2) — *неэлементарная генная структура* (*н.г.с.*). Первая из них континуальна, вторая дискретна. В случае э.г.с. мы имеем 2δ-мерное многообразие (с краем) алгебр, в котором коэффициентами (независимыми параметрами) служат c_j, γ_j, подчиненные ограничениям $0 < c_j < 1$, $0 < \gamma_j \le \min(\frac{1}{2}c_j, \frac{1}{2}\overline{c}_j)$.

Единичная алгебра (е.а.) имеет э.г.с. В этом случае $\delta = 0$, отсутствуют e_{m+j} и пары (e_{i_j}, e_{k_j}), таблица умножения сводится к (3.2). Это единственная алгебра с э.г.с., в которой все базисные векторы — идемпотенты.

Константные алгебры (к.а.) при $n \ge 2$ не подпадают под теорему 3.1, так как не являются нормальными.

Первый нетривиальный пример появляется при $n = 3$.

Пример 3.2. Если $n = 3$ и алгебра нетривиальна, то $m = 2$, $\delta = 1$. Это случай э.г.с. с

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3, \tag{3.7}$$

где $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Далее,

$$e_3 e_1 = c e_1^2 + \overline{c} e_1 e_2,$$

так что

$$e_3 e_1 = (c + \overline{c}\alpha) e_1 + \overline{c}\beta e_2 + \overline{c}\gamma e_3 \tag{3.8}$$

и аналогично

$$e_3e_2 = ce_1e_2 + \bar{c}e_2^2 = c\alpha e_1 + (c\beta + \bar{c})e_2 + c\gamma e_3 \tag{3.9}$$

с $0 < c < 1$, $\bar{c} = 1 - c$ и

$$\alpha + \gamma c = \beta + \gamma\bar{c} = \frac{1}{2}. \tag{3.10}$$

Наконец,

$$e_3^2 = c^2e_1^2 + 2c\bar{c}e_1e_2 + \bar{c}^2e_2^2,$$

так что

$$e_3^2 = (c^2 + 2c\bar{c}\alpha)e_1 + (2c\bar{c}\beta + \bar{c}^2)e_2 + 2c\bar{c}\gamma e_3. \tag{3.11}$$

При $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ и $c = \bar{c} = \frac{1}{2}$ получается менделевская алгебра (м.а.). В общем случае мы обозначим алгебру (3.7)–(3.11) через $M(c,\gamma)$ и назовем ее *обобщенной менделевской* алгеброй (*о.м.а.*). Все о.м.а. изоморфны, так как $\{e_1, e_2, e_1e_2\}$ является базисом, относительно которого алгебра превращается в м.а. (предложение 2.2). Однако алгебры $M(c,\gamma)$ попарно различны, ибо попарно различны их таблицы умножения в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Термин о.м.а. удобно распространить на все случаи э.г.с. независимо от размерности. Соответствующее *обобщенное отображение Харди–Вайнберга* дается формулами

$$x_i' = p_i^2 + 2\sum_{k\neq i}\theta_{ik}p_ip_k, 1 \le i \le m, \tag{3.12}$$

и

$$x'_{m+j} = 2\gamma_j p_{i_j}p_{k_j}, \quad 1 \le j \le \delta, \tag{3.13}$$

где

$$p_i = x_i + \sum_{j=1}^{\delta}\pi_{ij}x_{m+j}, \tag{3.14}$$

$\theta_{i_jk_j} = \alpha_j$, $\theta_{k_ji_j} = \beta_j$, остальные $\theta_{ik} = \frac{1}{2}$; $\pi_{i_jj} = c_j$, $\pi_{k_jj} = \bar{c}$, остальные $\pi_{ij} = 0$.

Пример 3.3. При $n = 4$ появляется простейшая алгебра с н.г.с. Это - *кадрильная бернштейновская* алгебра (к.б.а.), соответствующая кадрильному отображению (1.9), (1.10) с измененной нумерацией координат: $x_1 \equiv x_{11}$, $x_2 \equiv x_{22}$, $x_3 \equiv x_{12}$, $x_4 \equiv x_{21}$. В этих обозначениях

$$x'_{ik} = p_iq_k, \tag{3.15}$$

где p_i — строчные, а q_k — столбцовые суммы в матрице $X = (x_{ik})$, т.е.

$$p_i = \sum_k x_{ik}, \quad q_k = \sum_i x_{ik}. \tag{3.16}$$

Обозначая столбец (p_i) через p и строку (q_k) через q, можно записать (3.15) в матричном виде

$$X' = p \otimes q. \tag{3.17}$$

Те же формулы (3.15)–(3.17) справедливы для произвольной алгебры с н.г.с., т.е. для любого $n = \nu\overline{\nu}$ и матрицы $X = (x_{ik} : 1 \le i \le \nu,\ 1 \le k \le \overline{\nu})$. В этом общем случае мы называем алгебру *обобщенной кадрильной бернштейновской* алгеброй (о.к.б.а.) и соответственно называем отображение.

Существует глубокое геометрическое различие между э.г.с. и н.г.с. Оно выявляется при рассмотрении конуса C неотрицательных инвариантных линейных форм. В случае э.г.с. конус C порождается линейно независимыми формами p_i,

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = s \tag{3.18}$$

(см. (3.14)). В случае н.г.с. конус C порождается формами p_i, q_k, и эти формы линейно зависимы,

$$\sum_{i=1}^{\nu} p_i = \sum_{k=1}^{\overline{\nu}} q_k = s, \tag{3.19}$$

хотя в C они лежат на крайних лучах (см. (3.16)).

Отметим, что C является порождающим конусом в пространстве J инвариантных линейных форм, так как $s \in \operatorname{Int} C$. В случае э.г.с. $\{p_i\}_1^m$ — базис в J. В случае н.г.с. система $\{p_i\}_1^{\nu} \bigcup \{q_k\}_1^{\overline{\nu}}$ полна в J, но линейно зависима, однако (3.19) — единственная (с точностью до множителя) линейная зависимость в этой системе. Поэтому тип о.к.б.а. есть

$$m = \nu + \overline{\nu} - 1, \quad \delta = (\nu - 1)(\overline{\nu} - 1). \tag{3.20}$$

(Напомним, что $\dim J = m$, так как алгебра регулярна (см. теорему 2.7); $\delta = n - m$). В частности, к.б.а. ($\nu = \overline{\nu} = 2$) имеет тип (3,1).

В наших новых терминах теорема 3.1 утверждает, что любая нормальная регулярная стохастическая алгебра есть либо о.к.б.а., либо, наконец, е.а. Для формальной полноты заметим, что к.а. при $n = 1$ одновременно является е.а.

Следствие 3.4. *В о.м.а. каждая координатная подалгебра размерности ≥ 2 есть о.м.а. В о.к.б.а. каждая координатная подалгебра есть о.к.б.а. или е.а.*

Доказательство. Полагая $l = j$ в (3.5), мы видим, что в о.м.а. каждая координатная подалгебра, содержащая e_{m+j}, содержит оба идемпотента e_{i_j}, e_{k_j}. Обратное также верно в силу (3.1). Следовательно, эта подалгебра является линейной оболочкой объединения некоторого подмножества $F \subset \{e_i\}_1^m$ и $\{e_{m+j} : e_{i_j}, e_{k_j} \in F\}$. В силу формул (3.1)–(3.5) она является о.м.а.

Рассмотрим теперь о.к.б.а. Если некоторое подпространство $\mathrm{Lin}\{e_{g_j h_j}\}_{j=1}^r$ является подалгеброй, то множество $S = \{(g_j, h_j)\}_{j=1}^r$ обладает свойством

$$(g_j, h_j) \in S \& (g_l, h_l) \in S \Rightarrow (g_j, h_l) \in S \& (g_l, h_j) \in S$$

(см. (3.6)). Поэтому с точностью до нумерации $S = G \times H$, где G — множество всех g_j, встречающихся в S („1-я проекция“ S), H — 2-я проекция. Если $\mathrm{card}\, G > 1$ и $\mathrm{card}\, H > 1$, то данная подалгебра оказывается о.к.б.а., в противном случае — е.а. •

Следствие 3.5. *Любая нормальная регулярная стохастическая алгебра ультранормальна.*

Следствие 3.6. *Любая нормальная регулярная стохастическая алгебра нуклеарна.*

Доказательство. В случае о.м.а.

$$\mathcal{A}^2 = \mathrm{Lin}\{e_i e_k\}_{i,k=1}^n = \mathrm{Lin}\{e_i\}_1^m \cup \mathrm{Lin}\{e_{i_j} e_{k_j}\}_1^\delta = \mathcal{A}, \tag{3.21}$$

так как в силу (3.1) второе из объединяемых в (3.21) множеств можно заменить на $\mathrm{Lin}\{e_{m+j}\}_1^\delta$.

В случае о.к.б.а. $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, так как $e_i^2 = e_i$ для всех i, $1 \le i \le n$. •

§4. Подалгебра потомков

Для любого вектора

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

его *носитель* определяется как

$$\mathrm{supp}(x) = \{e_i : x_i \neq 0\},$$

так что

$$x = \sum \{x_i e_i : e_i \in \mathrm{supp}(x)\}. \tag{4.1}$$

Очевидно, $\mathrm{supp}(x) \neq \varnothing$ при $x \neq 0$ и

$$\mathrm{supp}(\lambda x) = \mathrm{supp}(x), \quad \lambda \neq 0. \tag{4.2}$$

Если $x \geq 0$ и $y \geq 0$, то

$$\mathrm{supp}(x + y) = \mathrm{supp}(x) \cup \mathrm{supp}(y). \tag{4.3}$$

(В общем случае имеет место лишь включение $\subset$).

Алгебра $\mathcal{A}$ (с любым умножением) в $\mathbb{R}^n$ называется *неотрицательной*, если

$$x \geq 0 \& y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0, \tag{4.4}$$

или, что эквивалентно, ее структурные константы $a_{ik,j}$ в каноническом базисе неотрицательны. В частности, таковы все стохастические алгебры.

Лемма 4.1. *В любой неотрицательной алгебре $\mathcal{A}$ для любого $x \geq 0$*

$$\mathrm{supp}(x^2) = \bigcup\{\mathrm{supp}(e_i e_k) : e_i, e_k \in \mathrm{supp}(x)\}. \tag{4.5}$$

Таким образом, $\mathrm{supp}(x^2)$ зависит только от $\mathrm{supp}(x)$ при $x \geq 0$.

Доказательство. В силу (4.1)

$$x^2 = \sum\{x_i x_k e_i e_k : e_i, e_k \in \mathrm{supp}(x)\},$$

что влечет (4.5) благодаря (4.2) и (4.3). •

Заметим, что

$$\mathrm{supp}(e_i e_k) = \{e_j : a_{ik,j} > 0\}.$$

Для любого семейства $F \subset \{e_i\}_1^n$ мы определим множество его *потомков*

$$F' = \bigcup\{\mathrm{supp}(e_i e_k) : e_i, e_k \in F\},$$

называя при этом F *родительским* множеством для F'. Эта терминология отражает биологическую интерпретацию структурных констант стохастической алгебры (см. [8, 18; 20, §1.2]).

Если все элементы из F — идемпотенты, то $F' \supset F$.

Лемма 4.2. $\mathrm{Lin}\, F$ *является подалгеброй тогда и только тогда, когда* $F' \subset F$.

Доказательство. $(\forall e_i, e_k \in F : e_i e_k \in \mathrm{Lin}\, F) \Longleftrightarrow (\forall e_i, e_k \in F : \mathrm{supp}(e_i e_k) \subset F) \Longleftrightarrow \{\bigcup \mathrm{supp}(e_i e_k) : e_i, e_k \in F\} \subset F) \Longleftrightarrow (F' \subset F)$. •

Следствие 4.3. $\mathrm{Lin}\{\mathrm{supp}(x)\}$ *является подалгеброй для любого идемпотента* $x \geq 0$.

Доказательство. Если $F = \mathrm{supp}(x)$, то $F = F'$ по лемме 4.1. •

Всюду ниже $(\mathcal{A}, s)$ *— стохастическая бернштейновская алгебра, так что* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_V$, *где* V *— бернштейновское отображение,* $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$. *Тип алгебры обозначается через* (m, δ).

При этих условиях прежде всего справедлива

Лемма 4.4. $F'' = F'$ *для любого* $F \subset \{e_i\}_1^n$.

Доказательство. Возьмем $x \geq 0$ такой, что $\mathrm{supp}(x) = F$. Тогда $\mathrm{supp}(x^2) = F'$ по лемме 4.1 и

$$F'' = \mathrm{supp}(x^2)^2 = \mathrm{supp}[s^2(x)x^2] = \mathrm{supp}(x^2) = F'. \quad \bullet$$

Следствие 4.5. $\mathrm{Lin}(F')$ *является подалгеброй для любого* F.

Мы назовем ее *подалгеброй потомков* родительского множества F. Эта конструкция играет в дальнейшем важную роль.

Теорема 4.6. *Пусть* $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ *и* $F = \{e_1, e_2\}$. *Тогда ранг подалгебры потомков* $\mathrm{Lin}(F')$ *не превосходит* 3.

Для доказательства этой теоремы мы привлечем неотрицательный проектор, *ассоциированный* с e_1,

$$Bx = 2e_1x - (2e_1x, e_1)e_1, \tag{4.6}$$

где $(\,,\,)$ — стандартное скалярное произведение (см. [16; 20, §5.3, 5.4]). Очевидно,

$$Be_1 = 0, \qquad \mathrm{Im}\, B \perp e_1. \tag{4.7}$$

Известно, что проектор B имеет следующую структуру.

Лемма 4.7. *Существуют системы векторов* $\{b_i\}_1^{m-1}, \{b_k^*\}_1^{m-1}$ *такие, что*

$$s(b_i) = 1, \quad b_i \geq 0; \quad b_k^* \geq 0; \quad (b_i, b_k^*) = \delta_{ik} \tag{4.8}$$

и

$$\mathrm{supp}(b_k) \not\subset \bigcup_{i \neq k} \mathrm{supp}(b_i), \quad 1 \leq k \leq m-1, \tag{4.9}$$

и имеет место разложение

$$Bx = \sum_{i=1}^{m-1} (x, b_i^*) b_k. \tag{4.10}$$

Следствие 4.8. $\mathrm{rank}\, B = m - 1$.

Доказательство. Из (4.10) следует, что $\mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Lin}\{b_i\}_1^m$, и, более того, эти подпространства совпадают, так как $Bb_k = b_k$, $1 \leq k \leq m-1$, в силу (4.9) и (4.10). Система $\{b_i\}_1^{m-1}$ линейно независима ввиду ее биортогональности с $\{b_k^*\}_1^{m-1}$. Таким образом, это — базис в $\mathrm{Im}\, B$. •

Следствие 4.9. *Пересечение* $\Delta_B = \operatorname{Im} B \cap \Delta^{n-1}$ *совпадает с выпуклой оболочкой системы* $\{b_i\}_1^{m-1}$.

Таким образом, Δ_B — симплекс.

Доказательство. Включение Δ_B в упомянутую выпуклую оболочку очевидно. Обратно, если $x \in \Delta_B$, то $x = Bx$, так как B — проектор и в силу (4.8)

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i b_i$$

с $\alpha_i = (x, b_i^*) \geq 0$, $\sum \alpha_i = s(x) = 1$. •

Мы закончим этот список свойств оператора B следующим предложением.

Лемма 4.10 [16; 20, §5.3]. *Имеют место формулы*

$$e_1 b_i = \frac{e_1 + b_i}{2}, \quad 1 \leq i \leq m-1 \tag{4.11}$$

и

$$B(b_i b_k) = \frac{b_i + b_k}{2}, \quad 1 \leq i, k \leq m-1. \tag{4.12}$$

В частности, $B(b_i^2) = b_i$, $1 \leq i \leq m-1$.

Доказательство теоремы 4.6. Не умаляя общности, можно предположить, что $\mathcal{A} = \operatorname{Lin}(F')$, и тогда мы должны доказать, что $m \leq 3$.

Имеем

$$e_1 e_2 = \sum_{k=1}^{n} \pi_k e_k, \tag{4.13}$$

где $\sum \pi_k = 1$, $\pi_k \geq 0$, и, более того, $\pi_k > 0$ при $k \geq 3$, так как $\mathcal{A}$ является алгеброй потомков для $F = \{e_1, e_2\}$. В терминах оператора B

$$Be_2 = 2 \sum_{k=2}^{n} \pi_k e_k \tag{4.14}$$

и

$$Be_2 = 2 \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i b_i \tag{4.15}$$

с $\lambda_i = \frac{1}{2}(Be_2, b_i^*) \geq 0$, $1 \leq i \leq m-1$.

Применяя B к (4.14) с учетом того, что $B^2 = B$, получаем

$$Be_2 = 2 \sum_{k=2}^{n} \pi_k B e_k,$$

откуда

$$\lambda_i = \sum_{k=2}^{n} \pi_k(Be_k, b_i^*) = 2\pi_2\lambda_i + \sum_{k=3}^{n} \pi_k(Be_k, b_i^*). \tag{4.16}$$

Покажем, что все $\lambda_i > 0$.

Пусть некоторое $\lambda_i = 0$, т.е. $(Be_2, b_i^*) = 0$. Тогда в силу (4.16) $(Be_k, b_i^*) = 0$, $3 \le k \le n$, и, кроме того, $(Be_1, b_i^*) = 0$ (см. (4.7)). Следовательно, $(Bx, b_i^*) = 0$ для всех x, в частности, $(Bb_i, b_i^*) = 0$, в то время как $(Bb_i, b_i^*) = (b_i, b_i^*) = 1$.

Теперь разложение (4.15) показывает, что

$$\operatorname{supp}(Be_2) = \bigcup_{i=1}^{m-1} \operatorname{supp}(b_i). \tag{4.17}$$

Возвращаясь к (4.13) и (4.14), находим

$$e_1e_2 = \pi_1e_1 + \frac{1}{2}Be_2, \tag{4.18}$$

откуда

$$(e_1e_2)^2 = \pi_1^2e_1 + \pi_1e_1(Be_2) + \frac{1}{4}(Be_2)^2.$$

Умножая (4.15) на e_1 и используя (4.11), получаем

$$e_1(Be_2) = e_1\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i + \sum_{i=1}^{m-1}\lambda_ib_i = e_1\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i + \frac{1}{2}Be_2.$$

Но

$$\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i = \frac{1}{2}s(Be_2) = \sum_{k=2}^{m-1}\pi_k = 1 - \pi_1.$$

Окончательно

$$e_1(Be_2) = (1-\pi_1)e_1 + \frac{1}{2}Be_2,$$

откуда

$$(e_1e_2)^2 = \pi_1e_1 + \frac{1}{2}\pi_1Be_2 + \frac{1}{4}(Be_2)^2. \tag{4.19}$$

С другой стороны,

$$(e_1e_2)^2 = \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_1e_2,$$

согласно предложению 2.2. Подставляя e_1e_2 из (4.18), получаем

$$(e_1e_2)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\pi_1\right)e_1 + \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}Be_2. \tag{4.20}$$

Теперь мы сравним e_1-координаты в (4.19) и (4.20), используя тот факт, что $Be_2 \perp e_1$ и $(Be_2)^2 \geq 0$. Это дает неравенство $1/4 + \frac{1}{2}\pi_1 \geq \pi_1$, т.е. $\pi_1 \leq 1/2$.

Сравнивая e_2-координаты, получаем

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_1\pi_2 + \frac{1}{4}((Be_2)^2, e_2),$$

откуда

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \pi_1\right)\pi_2 = \frac{1}{4}((Be_2)^2, e_2) = \sum_{i,k=1}^{m-1} \beta_{ik}\lambda_i\lambda_k, \tag{4.21}$$

где $\beta_{ik} = (b_i b_k, e_2)$ в силу (4.15). Следовательно, $\beta_{ik} \geq 0$. Более того, существует $\beta_{i_1 k_1} > 0$, в противном случае все $\beta_{ik} = 0$ в противоречие с (4.21), где $1/2 - \pi_1 \geq 0$, $\pi_2 \geq 0$.

Применяя неотрицательный оператор B к неравенству $b_{i_1} b_{k_1} \geq \beta_{i_1 k_1} e_2$ и пользуясь формулой (4.12), приходим к неравенству

$$\frac{b_{i_1} + b_{k_1}}{2} \geq \beta_{i_1 k_1} Be_2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{supp}(Be_2) \subset \operatorname{supp}(b_{i_1}) \cup \operatorname{supp}(b_{k_1}).$$

Сопоставляя этот результат с (4.17), заключаем, что

$$\bigcup_{i=1}^{m-1} \operatorname{supp}(b_i) = \operatorname{supp}(b_{i_1}) \cup \operatorname{supp}(b_{k_1}).$$

Ввиду (4.9) $m = 3$, если $i_1 \neq k_1$, и $m = 2$, если $i_1 = k_1$. •

Следствие 4.11. *Пусть* $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ *и* $F = \{e_1, e_2\}$. *Если подалгебра потомков* $\operatorname{Lin}(F')$ *нормальна, то это либо двумерная е.а., либо трехмерная о.м.а., либо четырехмерная к.б.а.*

Доказательство. По теореме 4.6 ранг m данной подалгебры не превосходит 3. По теореме 2.11 она регулярна. Будучи нормальной, она либо е.а., либо о.м.а., либо о.к.б.а. по теореме 3.1. В первом случае она двумерна, а во втором трехмерна, будучи подалгеброй потомков для родительского множеств $F = \{e_1, e_2\}$ с $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$. Если же мы имеем о.к.б.а., то в силу (3.20) $\nu + \overline{\nu} \leq 4$, и так как $\nu \geq 2$, $\overline{\nu} \geq 2$, то $\nu = \overline{\nu} = 2$, что дает четырехмерную к.б.а. •

Алгебры, описанные в следствии 4.11, удобно обозначать соответственно через $\{e_1, e_2 \mid \varnothing\}$, $\{e_1, e_2 \mid e_k\}$ и $\{e_1, e_2 \mid e_k, e_l\}$, где справа от черты выписано множество $\operatorname{supp}(e_1 e_2) \setminus \{e_1, e_2\}$. (Обозначение $\{e_1, e_2 \mid e_k\}$ — родовое, оно охватывает $M(c, \gamma)$ при любых c, γ).

§5. Фундированные алгебры

Это понятие необходимо нам в связи с тем, что в доказательстве основной теоремы мы используем индукцию по размерности. Мы будем называть алгебру $(\mathcal{A}, s)$ *фундированной*, если $\mathcal{A} = \mathrm{Lin}(F')$, где $F = \{e_i : e_i^2 = e_i\}$. Теорема 3.1 показывает, что любая нормальная регулярная стохастическая алгебра фундирована.

Лемма 5.1. *Пусть* $(\mathcal{A}, s)$ *— не константная невырожденная алгебра. Если все собственные координатные подалгебры фундированы, то и вся алгебра фундирована.*

Мы докажем эту важную лемму, используя специальную комбинаторно-топологическую структуру на множестве $\mathrm{Im}\, V$, обнаруженную в [18] (см. также [19; 20, §5.7]). Для удобства читателя мы приводим ниже все необходимые сведения об этой структуре.

Для любого хаусдорфова топологического пространства X подмножество $C \subset X$ называется *d-мерной элементарной клеткой*, если существует открытое ограниченное подмножество $U \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 0$, замыкание которого $\overline{U}$ стягиваемо (по себе в точку) и гомеоморфно $\overline{C}$ посредством гомеоморфизма, сохраняющего границу.

Конечное разбиение множеств X на элементарные клетки называется *элементарным клеточным комплексом на* X, если 1) граница любой клетки в ее замыкании является объединением некоторых клеток меньших размерностей и 2) пересечение замыканий любых двух клеток стягиваемо. Максимум размерностей клеток называется *размерностью комплекса*.

Грань Γ симплекса Δ^{n-1} называется *существенной*, если пересечение $C_\Gamma = \mathrm{Im}\, V \cap \mathrm{Int}\, \Gamma$ непусто. (Здесь $\mathrm{Int}\, \Gamma$ означает топологическую внутренность множества Γ относительно его аффинной оболочки). Так как симплекс Δ^{n-1} является объединением внутренностей его граней, то

$$\mathrm{Im}\, V = \bigcup \{C_\Gamma : \Gamma \in E\}, \tag{5.1}$$

где E — множество всех существенных граней.

Лемма 5.2. *Разбиение* (5.1) *является* $(m-1)$*-мерным элементарным клеточным комплексом на* $\mathrm{Im}\, V$.

Каждая существенная грань Γ инвариантна и

$$\mathrm{Im}(V \mid \Gamma) = \mathrm{Im}\, V \cap \Gamma = \overline{C}_\Gamma.$$

Ее внутренность также инвариантна. Обратно, любая грань, внутренность которой инвариантна, существенна. Если Γ — существенная грань, то

$$\partial C_\Gamma = \mathrm{Im}\, V \cap \partial \Gamma, \tag{5.2}$$

где

$$\partial C_\Gamma = \overline{C}_\Gamma \setminus C_\Gamma. \tag{5.3}$$

Размерность клетки C_Γ равна $m_\Gamma - 1$, где m_Γ — ранг подалгебры $\mathcal{A}_{V|\Gamma}$. Если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ и $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, то $\dim C_{\Gamma_1} < \dim C_{\Gamma_2}$. Таким образом, размерность комплекса (5.1) равна $m_\Delta - 1$, где Δ — наименьшая грань, содержащая $\operatorname{Im} V$ (т.е. наибольшая существенная грань). С другой стороны, эта размерность равна $m - 1$, согласно (2.5). Таким образом, $m_\Delta = m$, $\dim C_\Delta = m - 1$; размерности остальных клеток меньше $m - 1$.

Отметим, что $\Delta = \Delta^{n-1}$, если алгебра — невырожденная (и только в этом случае).

Теорема 5.3. *Существует по крайней мере m константных координатных подалгебр в алгебре* $(\mathcal{A}, s)$.

Это вытекает из предыдущего и из чисто топологического утверждения [20, лемма 5.7.1] о том, что *существует по крайней мере $d+1$ нульмерных клеток в любом d-мерном элементарном клеточном комплексе*. В комплексе (5.1) нульмерные клетки — это в точности те $\Gamma \in E$, для которых подалгебры $\mathcal{A}_{V|\Gamma}$ константные.

Доказательство леммы 5.1. Рассмотрим константную координатную подалгебру. Эта подалгебра собственная, так как $(\mathcal{A}, s)$ не константная. Следовательно, она фундирована. Любая фундированная к.а. имеет вид $\operatorname{Lin}\{e_{i_0}\}$, где $e_{i_0}^2 = e_{i_0}$. Мы заключаем, что множество $\mathcal{F}$ базисных идемпотентов непусто. Обозначим через $\mathcal{A}_1$ его подалгебру потомков. Следует доказать, что $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$, т.е.что соответствующая инвариантная грань Γ_1 совпадает с $\Delta = \Delta^{n-1}$ (Обе грани существенные).

Если $\Gamma_1 \neq \Delta$, то $\Gamma_1 \subset \partial\Delta$ и тогда

$$\overline{C_{\Gamma_1}} = \operatorname{Im} V \cap \Gamma_1 \subset \operatorname{Im} V \cap \partial\Delta = \partial C_\Delta \tag{5.4}$$

в силу (5.2), (5.3). Но $\partial\Delta = \bigcup\{\operatorname{Int}\Gamma : \Gamma \neq \Delta\}$. Поэтому

$$\partial C_\Delta = \bigcup\{\operatorname{Im} V \cap \operatorname{Int}\Gamma : \Gamma \neq \Delta\} = \bigcup\{C_\Gamma : \Gamma \neq \Delta\},$$

и в силу замкнутости границы ∂C_Δ получаем

$$\partial C_\Delta = \bigcup\{\overline{C_\Gamma} : \Gamma \neq \Delta\}. \tag{5.5}$$

Все Γ в (5.5) можно считать существенными, так как только в этом случае $C_\Gamma \neq \varnothing$. Поэтому все они инвариантны. Соответствующие координатные подалгебры, будучи собственными, фундированы. Но тогда они содержатся в $\mathcal{A}_1$, т.е. $\Gamma \subset \Gamma_1$ для всех существенных Γ в (5.5), откуда $\overline{C_\Gamma} \subset \overline{C_{\Gamma_1}}$ и $\partial C_\Delta \subset \overline{C_{\Gamma_1}}$. Сопоставляя это включение с (5.4), получаем $\partial C_\Delta = \overline{C_{\Gamma_1}}$. Граница клетки C_Δ оказывается стягиваемой, вопреки известному топологическому факту. •

§6. Доказательство основной теоремы

Дана ультранормальная стохастическая бернштейновская алгебра $(\mathcal{A}, s)$. Мы должны доказать, что она регулярна.

Заметим, что в данном случае теорема 5.3 гарантирует существование по крайней мере m идемпотентов среди базисных векторов $e_1, \dots, e_\rho$. Пусть $e_1, \dots, e_\rho$ — идемпотенты ($\rho \geq m$), а e_j при $j > \rho$ не являются таковыми (возможно, их нет, т.е. $\rho = n$). Обозначим через B_j проектор, ассоциированный с идемпотентом e_j (см. (4.6), где определен $B \equiv B_1$), $1 \leq j \leq \rho$. В дополнение к свойствам, перечисленным в §4, имеет место

Лемма 6.1. *В обозначениях леммы* 4.7 *для каждого вектора* b_i *существует такой базисный идемпотент* e_k, $k \neq 1$, *и такое* $\lambda > 0$, *что* $Be_k = \lambda b_i$.

Доказательство. Так как b_i^2 — ненулевой идемпотент и $b_i^2 \geq 0$, то, согласно следствию 4.3, координатное подпространство $L = \mathrm{Lin}(\mathrm{supp}(b_i^2))$ является подалгеброй. Она нормальна, так как $(\mathcal{A}, s)$ ультранормальна. Если это — к.а., то $\dim L = 1$, т.е. $b_i^2 = e_k$ при некотором k, откуда $Be_k = b_i$ по лемме 4.10.

Если L — не к.а., то ее ранг ≥ 2, и по теореме 5.3 существует по крайней мере два базисных идемпотента, принадлежащих L. Пусть e_k — один из них, $k \neq 1$. В разложении

$$b_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$$

коэффициент $\beta_k > 0$. Применяя оператор B, получаем

$$b_i = \sum_{j=2}^{n} \beta_j B e_j.$$

Но вектор b_i является крайней точкой симплекса Δ_B (см. (4.9) и следствие 4.9). Следовательно, $Be_k = \lambda b_i$ с $\lambda \geq 0$. В действительности $\lambda > 0$, так как $Be_k = 0$ означает, что $e_1 e_k = e_1$, а тогда $\mathrm{Lin}\{e_1, e_k\}$ — подалгебра, но не к.а. и не е.а., что невозможно в двумерном случае. •

Следствие 6.2. $\mathrm{rank}\{Be_k\}_2^\rho = m - 1$.

Доказательство. Этот ранг не превосходит $m-1$ в силу следствия 4.8. По лемме 6.1 он не меньше $m-1$, ибо система $\{b_i\}_1^{m-1}$ линейно независима. •

Разумеется, лемма 6.1 и следствие 6.2 приложимы ко всем B_j.

Далее мы рассматриваем два случая: I) $\rho = n$ (*чистый* случай) и II) $\rho < n$ (*смешанный* случай). В чистом случае алгебра оказывается е.а. или о.к.б.а., а в смешанном — о.м.а.

I. Для любой пары $\{e_i, e_k\}$, $i \neq k$, алгебра потомков есть либо е.а. $\{e_i, e_k \mid \varnothing\}$, либо к.б.а. $\{e_i, e_k \mid e_g, e_h\}$ (согласно следствию 4.11; случай о.м.а. исключен ввиду того, что все базисные векторы — идемпотенты). В терминах умножения R (см. (2.16)) $R(e_i, e_k) = 0$ в е.а. Напротив, в к.б.а. $R(e_i, e_k) \neq 0$, но $R(e_i, e_g) = 0$ и $R(e_i, e_h) = 0$; то же для e_k (вместо e_i), но $R(e_g, e_h) \neq 0$.

Лемма 6.3. *Если $R(e_i, e_k) \neq 0$, то не существует e_j, кроме e_g и e_h, такого, что $R(e_i, e_j) = 0$ и $R(e_k, e_j) = 0$.*

Доказательство. Очевидно, $j \neq i$, $j \neq k$. Пусть также $j \neq g$, $j \neq h$. Рассмотрим пятимерное подпространство $L = \mathrm{Lin}\{e_j, e_i, e_k, e_g, e_h\}$. Это — подалгебра потомков семейства $\{e_j, e_i, e_k\}$. Она нуклеарна, так как все ее базисные элементы — идемпотенты. В силу следствия 2.12 она регулярна. Наконец, L нормальна, так как $(\mathcal{A}, s)$ ультранормальна. По теореме 3.1 L должна быть либо е.а., либо о.м.а., либо о.к.б.а. Первое невозможно, так как $R(e_i, e_k) \neq 0$; второе вообще невозможно в чистом случае; третье невозможно, так как $\dim L$ — простое число. •

Введем бинарное отношение R_0 на базисе $\{e_j\}_1^n$, полагая $e_j R_0 e_k$, если и только если $R(e_j, e_k) = 0$. Это отношение рефлексивно и симметрично. Для любого e_j определим *пул*

$$P(e_j) = \{e_k : e_j R_0 e_k\} = \{e_k : R(e_j, e_k) = 0\} \tag{6.1}$$

и *проколотый пул*

$$P^*(e_j) = P(e_j) \setminus \{e_j\}. \tag{6.2}$$

Лемма 6.4. *Имеет место формула*

$$\mathrm{card}\, P^*(e_j) = m - 1, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{6.3}$$

Доказательство. В терминах проектора B_j

$$B_j e_k = e_k, \quad e_k \in P^*(e_j) \tag{6.4}$$

и

$$B_j e_k = e_g + e_h, \quad e_k \notin P^*(e_j). \tag{6.5}$$

В (6.5) e_g и e_h приходят из к.б.а. $\{e_j, e_k \mid e_g, e_h\}$. Поскольку эти векторы принадлежат $P^*(e_j)$, то $\mathrm{rank}\, B_j = \mathrm{card}\, P^*(e_j)$ в силу (6.4) и (6.5). Но $\mathrm{rank}\, B_j = m - 1$, согласно следствию 4.8. •

Удобной для применения формулировкой леммы 6.4 является

Следствие 6.5. *Все проколотые пулы состоят из одного и того же числа элементов.*

Хотя отношение R_0 может быть нетранзитивным, однако имеет место

Лемма 6.6. *На каждом проколотом пуле $P^*(e_j)$ отношение R_0 является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Нужно лишь убедиться, что R_0 на $P^*(e_j)$ транзитивно. Рассмотрим такую тройку $\{e_i, e_k, e_l\} \subset P^*(e_j)$, что $R(e_i, e_l) = 0$, $R(e_k, e_l) = 0$, но $R(e_i, e_k) \neq 0$. Так как $R(e_i, e_j) = 0$ и $R(e_k, e_j) = 0$, то по лемме 6.3 к.б.а. $\{e_i, e_k \mid e_g, e_h\}$ совпадает с $\{e_i, e_k \mid e_j, e_l\}$. Но тогда $R(e_j, e_l) \neq 0$, т.е. $e_l \notin P^*(e_j)$ — противоречие. •

Очевидно, каждый класс эквивалентности $R_0 \mid P^*(e_j)$ является е.а. (Это свойство не нарушается при присоединении e_j к любому классу). Если $(\mathcal{A}, s)$ — е.а., то $P(e_j) = \mathcal{A}$ и $P^*(e_j)$ — класс эквивалентности R_0. *Далее мы предполагаем, не умаляя общности, что $(\mathcal{A}, s)$ — не е.а.*

Лемма 6.7. *На каждом проколотом пуле $P^*(e_j)$ имеется ровно два класса эквивалентности R_0.*

Доказательство. Пусть $e_l \notin P(e_j)$, т.е. $R(e_j, e_l) \neq 0$ и $\{e_j, e_l \mid e_i, e_k\}$ — соответствующая к.б.а. Тогда e_i и e_k принадлежат $P^*(e_j)$, но не эквивалентны. Таким образом, имеется по крайней мере два класса эквивалентности в $P^*(e_j)$.

Пусть число классов больше 2. Тогда существует тройка $\{e_i, e_k, e_l\} \subset P^*(e_j)$ такая, что $R(e_i, e_k) \neq 0$, $R(e_i, e_l) \neq 0$ и $R(e_k, e_l) \neq 0$. Соответственно имеем три к.б.а.

$$\{e_i, e_k \mid e_j, e_p\}, \qquad \{e_i, e_l \mid e_j, e_q\}, \qquad \{e_k, e_l \mid e_j, e_r\}. \tag{6.6}$$

(Участие e_j обязательно по лемме 6.3). Семь векторов, участвующих в (6.6), попарно различны. Например, $e_p \neq e_q$, так как $B_j e_p = e_i + e_k$, а $B_j e_q = e_i + e_l$ (см. (6.5)). Также, например, $e_p \neq e_l$, так как $R(e_p, e_i) \neq 0$, а $R(e_l, e_i) = 0$. Итак, мы имеем семимерную подалгебру потомков L для множества $\{e_j, e_i, e_k, e_l\}$.

В L проколотый пул $P^*(e_j)$ есть $\{e_i, e_k, e_l\}$. Согласно следствию 6.5, проколотый пул $P^*(e_i)$ в L состоит также из трех элементов. Но e_j, e_p, e_q уже входят в него, следовательно,

$$P^*(e_i) = \{e_j, e_p, e_q\}, \tag{6.7}$$

тогда $e_r \notin P^*(e_i)$, т.е. $R(e_i, e_r) \neq 0$. Возникает еще одна к.б.а. $\{e_i, e_r \mid e_g, e_h\}$, где

$$\{e_g, e_h\} \subset P^*(e_i) \cap P^*(e_r). \tag{6.8}$$

Кроме того, $P^*(e_r) \supset \{e_k, e_l\}$ (см. (6.6)) и $\operatorname{card} P^*(e_r) = 3$. В силу (6.7) существует не более одного элемента в $P^*(e_i) \cap P^*(e_r)$, вопреки (6.8). •

Обозначим классы эквивалентности $R_0 \mid P^*(e_j)$ через C_j, $\overline{C}_j$, $1 \le j \le n$, $\operatorname{card} C_j \le \operatorname{card} \overline{C}_j$.

Лемма 6.8. *Для каждого j существует взаимно-однозначное соответствие между дополнением пула $P(e_j)$ и декартовым произведением $C_j \times \overline{C}_j$.*

Доказательство. Для любого $e_k \notin P(e_j)$ мы имеем к.б.а. $\{e_j, e_k \mid e_{g_k}, e_{h_k}\}$, где e_{g_k} и e_{h_k} — оба из проколотого пула $P^*(e_j)$, а $R(e_{g_k}, e_{h_k}) \neq 0$, т.е. e_{g_k} не эквивалентно e_{h_k}. Пусть $e_{g_k} \in C_j$, $e_{h_k} \in \overline{C}_j$. Тем самым определено отображение дополнения пула $P(e_j)$ в декартово произведение $C_j \times \overline{C}_j$. Отображение инъективно, так как $e_k = 2e_{g_k}e_{h_k} - e_j$. Оно также сюръективно, так как $R(e_g, e_h) \neq 0$ для любой пары $(e_g, e_h) \in C_j \times \overline{C}_j$, а тогда мы имеем к.б.а. $\{e_j, e_k \mid e_g, e_h\}$, где присутствие e_j обязательно по лемме 6.3, а $R(e_j, e_k) \neq 0$, т.е. $e_k \notin P(e_j)$. •

Следствие 6.9. *Пусть* $m_j = \operatorname{card} C_j + 1$, $\overline{m}_j = \operatorname{card} \overline{C}_j + 1$. *Тогда*

$$m_j + \overline{m}_j = m + 1, \quad m_j \overline{m}_j = n, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{6.9}$$

Доказательство. Первое из этих равенств следует из (6.3), ибо $C_j \cup \overline{C}_j = P^*(e_j)$ и $C_j \cap \overline{C}_j = \varnothing$. Теперь второе равенство вытекает из леммы 6.8, ибо

$$n = \operatorname{card}(C_j \times \overline{C}_j) + \operatorname{card} P(e_j) = (m_j - 1)(\overline{m}_j - 1) + m. \quad \bullet$$

Следствие 6.10. $\delta = (m_j - 1)(\overline{m}_j - 1)$.

При этом $m_j \geq 2$, $\overline{m}_j \geq 2$, так как $\mathcal{A}$ не есть е.а., и потому $\delta > 0$.

Следствие 6.11. *Числа m_j, $\overline{m}_j$ не зависят от j.*

Доказательство. $m_j = \nu$, $\overline{m}_j = \overline{\nu}$, где $\nu, \overline{\nu}$ — соответственно наименьший и наибольший корни уравнения $\lambda^2 - (m+1)\lambda + n = 0$. •

Введем теперь новую нумерацию базиса $\{e_j\}$, полагая прежде всего

$$e_1 = e_{11}, \qquad C_1 = \{e_{i1}\}_{i=1}^{\nu}, \qquad \overline{C}_1 = \{e_{1k}\}_{k=1}^{\overline{\nu}}. \tag{6.10}$$

По лемме 6.8 дополнение пула $P(e_1)$ может быть занумеровано в виде $\{e_{ik} : 2 \leq i \leq \nu, 2 \leq k \leq \overline{\nu}\}$. Из доказательства леммы мы знаем, что это соответствие определяется семейством к.б.а. $\{e_{11}, e_{ik} \mid e_{i1}, e_{1k}\}$. В целом базис алгебры состоит из элементов матрицы $E = (e_{ik})$, $1 \leq i \leq \nu$, $1 \leq k \leq \overline{\nu}$.

Лемма 6.12. *Пул $P(e_{ik})$ является объединением i-й строки и k-го столбца матрицы E. Удаление элемента e_{ik} из этих множеств превращает их в классы эквивалентности $R_0 \mid P^*(e_{ik})$.*

Доказательство. Обозначим упомянутые проколотые множества через C_{ik} и $\overline{C}_{ik}$ соответственно. В частности, $C_{11} = C_1$, $\overline{C}_{11} = \overline{C}_1$ в силу (6.10), так что лемма верна для $P(e_{11})$.

Рассмотрим $P(e_{i1})$, $i > 1$. Так как первый столбец матрицы E является е.а., то C_{i1} входит в один из классов эквивалентности $R_0 \mid P^*(e_{i1})$. С другой стороны, наличие к.б.а. $\{e_{11}, e_{ik} \mid e_{i1}, e_{1k}\}$ показывает, что $\overline{C}_{i1}$ входит в другой класс эквивалентности $R_0 \mid P^*(e_{i1})$. (Отметим, что $e_{11} \in C_{i1}$). Но тогда C_{i1} и $\overline{C}_{i1}$ совпадают с соответствующими классами, ибо $\operatorname{card} C_{i1} = \nu - 1$, $\operatorname{card} \overline{C}_{i1} = \overline{\nu} - 1$. Итак, лемма верна для $P(e_{i1})$. Аналогично она верна для $P(e_{1k})$. Остается рассмотреть $P(e_{ik})$ с $i > 1$ и $k > 1$.

По доказанному C_{ik} и $\overline{C}_{ik}$ содержатся в классах эквивалентности $R_0 \mid P^*(e_{ik})$, и эти классы различны, так как $e_{i1} \in C_{ik}$, $e_{1k} \in \overline{C}_{ik}$. Как и выше, рассмотрение заканчивается сравнением мощностей: $\operatorname{card} C_{ik} = \nu - 1$, $\operatorname{card} \overline{C}_{ik} = \overline{\nu} - 1$. •

Теперь мы уже в состоянии найти таблицу умножения алгебры $\mathcal{A}$. Прежде всего по лемме 6.12

$$e_{ik}e_{jk} = \frac{e_{ik} + e_{jk}}{2}, \qquad e_{ik}e_{il} = \frac{e_{ik} + e_{il}}{2} \tag{6.11}$$

и $R(e_{ik}, e_{jl}) \neq 0$, если $i \neq j$ и $k \neq l$. Тогда имеется к.б.а. $\{e_{ik}, e_{jl} \mid e_g, e_h\}$ с

$$\{e_g, e_h\} \subset P(e_{ik}) \cap P(e_{jl}) = \{e_{il}, e_{jk}\}.$$

Следовательно, $\{e_g, e_h\} = \{e_{il}, e_{jk}\}$, откуда

$$e_{ik}e_{jl} = \frac{e_{il} + e_{jk}}{2}, \quad i \neq j, \ k \neq l. \tag{6.12}$$

Мы получили о.к.б.а. (ср. (3.6)). Тем самым $(\mathcal{A}, s)$ регулярна. Основная теорема доказана в чистом случае. Остается рассмотреть смешанный случай.

II. Напомним, что в этом случае число базисных идемпотентов $\rho < n$, и для определенности мы полагаем, что таковыми являются $e_1, \ldots, e_\rho$, $\rho \geq m$. Так как основная теорема верна во всех случаях при $n \leq 5$ (теорема 2.14), то дальнейшее рассмотрение можно проводить по индукции, предполагая, что $n \geq 6$ и что основная теорема верна во всех размерностях $< n$, в частности, — для всех собственных координатных подалгебр. Все последние ультранормальны ввиду ультранормальности $(\mathcal{A}, s)$. Поэтому они регулярны. В силу теоремы 3.1 они фундированы. По лемме 5.1 алгебра $(\mathcal{A}, s)$ фундирована. (Очевидно, ультранормальная алгебра — не к.а. и невырожденная).

Лемма 6.13. *Для каждого* e_j *с* $j > \rho$ *существует единственная пара* $\{e_{i_j}, e_{k_j}\}$ *с* $1 \le i_j < k_j \le \rho$ *такая, что* $\mathrm{Lin}\{e_{i_j}, e_{k_j}, e_j\}$ *является о.м.а.* $\{e_{i_j}, e_{k_j} \mid e_j\}$.

Доказательство. Так как $\mathcal{A}$ является алгеброй потомков семейства $\{e_i\}_1^\rho$, то существует такая пара $\{e_{i_j}, e_{k_j}\}$ в этом семействе, что $e_j \in \mathrm{supp}(e_{i_j} e_{k_j})$. Так как $e_j^2 \ne e_j$, то алгебра потомков этой пары не может быть ни е.а., ни к.б.а. Согласно следствию 4.11, это — трехмерная о.м.а.

Пара $\{e_{i_j}, e_{k_j}\}$ единственна, так как она состоит в точности из идемпотентов, принадлежащих $\mathrm{supp}(e_j^2)$ (ср. (3.1)). •

Мы будем говорить, что e_j $(j > \rho)$ является *потомком отмеченной пары* $\{e_{i_j}, e_{k_j}\}$.

Положим $e_{ik} = e_i e_k$, $1 \le i \le k \le n$, так что $e_{ii} = e_i$ при $1 \le i \le \rho$ и $\mathrm{Lin}\{e_{i_j}, e_{k_j}, e_{i_j k_j}\} = \mathrm{Lin}\{e_{i_j}, e_{k_j}, e_j\}$ (см. (3.1)).

Следствие 6.14. *Алгебра* $\mathcal{A}$ *нуклеарна.*

Для любой неотмеченной пары $\{e_i, e_k\}$, $1 \le i < k \le \rho$, подалгебра потомков есть е.а. или к.б.а. (согласно следствию 4.11). Докажем, что случай к.б.а. исключается.

Первым шагом к этому является

Лемма 6.15. *Для каждого* e_i, $1 \le i \le \rho$, *число таких идемпотентов* e_k $(k \ne i)$, *что подалгебра потомков пары* $\{e_i, e_k\}$ *является к.б.а., равно* $\rho - m$.

Таким образом, отсутствие таких подалгебр равносильно равенству $\rho = m$.

Доказательство. Примем для определенности $i = 1$, и пусть L_k — подалгебра потомков пары $\{e_1, e_k\}$, $2 \le k \le \rho$. Рассмотрим проектор B, ассоциированный с e_1. Если L_k — е.а., то $Be_k = e_k$. Если L_k — о.м.а., то $Be_k = \beta_k e_k + \gamma_k e_{j_k}$, где $\gamma_k > 0$, $j_k > \rho$. Наконец, если L_k — к.б.а., то $Be_k = e_j + e_l$, где e_j и e_l таковы, что L_j и L_l — е.а. Следовательно, $\mathrm{rank}\{Be_k\}_2^\rho$ равен числу тех L_k, которые являются е.а. или о.м.а. Этот ранг равен $m - 1$, согласно следствию 6.2, а число всех L_k равно $\rho - 1$. Поэтому число к.б.а. среди L_k равно $\rho - m$. •

Теперь уже может быть доказана

Лемма 6.16. *Среди координатных подалгебр нет к.б.а.*

Доказательство. По лемме 6.13 вектор $e_{\rho+1}$ является потомком некоторой отмеченной пары, скажем, $\{e_1, e_2\}$. По лемме 6.15 либо $\rho = m$, и тогда лемма 6.16 верна, либо e_1 участвует в некоторой к.б.а., скажем, $\{e_1, e_3 \mid e_4, e_5\}$. В последнем случае множество потомков тройки $\{e_1, e_2, e_3\}$ есть $\{e_j\}_1^5 \cup \{e_{\rho+1}\} \cup \mathrm{supp}(e_2 e_3)$. Его линейная оболочка (подалгебра потомков) совпадает со всей алгеброй $\mathcal{A}$, так как собственные координатные подалгебры регулярны по предположению индукции, и поэтому в них о.м.а. $\{e_1, e_2 \mid e_{\rho+1}\}$ и к.б.а. $\{e_1, e_3, e_4, e_5\}$ не совместимы (см. следствие 3.4).

Если подалгебра потомков пары $\{e_2, e_3\}$ есть е.а. или о.м.а., то $\mathrm{supp}(e_2e_3)$ не содержит идемпотентов, кроме e_2 и e_3. Тогда $\rho = 5$, $e_{\rho+1} = e_6$ и $\{e_1, e_3 \mid e_4, e_5\}$ — единственная к.б.а., содержащая e_1. По лемме 6.15 $\rho - m = 1$ (т.е. $m = 4$), и e_2 должен участвовать в некоторой к.б.а., скажем, $\{e_2, e_i \mid e_k, e_j\}$. Так как подалгебры потомков пар $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_2, e_3\}$ не есть к.б.а., то $i = 4$ или $i = 5$. Соответственно e_4 или e_5 входят в две к.б.а., т.е. $\rho - m \geq 2$ — противоречие.

Если подалгебра потомков пары $\{e_2, e_3\}$ есть к.б.а., скажем, $\{e_2, e_3 \mid e_i, e_k\}$, то $\mathcal{A} = \mathrm{Lin}(\{e_j\}_1^5 \cup \{e_i, e_k, e_{\rho+1}\})$. Теперь e_3 участвует в двух к.б.а., а e_1 — только в одной: $\{e_1, e_3 \mid e_4, e_5\}$. Действительно, любая другая к.б.а. с участием e_1 должна быть вида $\{e_1, e_i \mid e_g, e_h\}$ (с точностью до транспозиции $e_i \leftrightarrow e_k$). Тогда $R(e_1, e_g) = 0$, $R(e_i, e_g) = 0$ и, следовательно, $\{e_g, e_h\} = \{e_4, e_5\}$, откуда $\mathrm{supp}(e_4e_5) = \{e_1, e_i\}$, в то время как на самом деле $\mathrm{supp}(e_4e_5) = \{e_1, e_3\}$. •

Следствие 6.17. $\rho = m$.

Лемма 6.18. *Если $m \leq 4$, то алгебра $(\mathcal{A}, s)$ регулярна.*

Доказательство. Ввиду следствия 6.14 и теоремы 2.11 можно предположить, что $m = 4$ и $2 \leq \delta \leq 3$, так что $n = 6$ или $n = 7$.

Если $n = 6$, то $(\mathcal{A}, s)$ — алгебра типа (4,2). В силу следствия 6.17 и леммы 6.13 мы имеем базисные идемпотенты e_1, e_2, e_3, e_4 и в этом семействе две отмеченные пары, $\{e_{i_1}, e_{k_1}\}$ и $\{e_{i_2}, e_{k_2}\}$, потомками которых являются e_5 и e_6 соответственно. Пусть эти пары пересекаются, например, пусть они — $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_1, e_3\}$. По лемме 6.16 подалгебры потомков остальных пар $\{e_i, e_k\}$, $1 \leq i < k \leq 4$, являются е.а. Тогда подалгебра L потомков тройки $\{e_1, e_2, e_3\}$ есть $\mathrm{Lin}\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\} = \mathrm{Lin}\{e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}\}$. Так как $\dim L = 5$, то L регулярна, а тогда $\mathcal{A} = L[e_4]$ регулярна, согласно первой части предложения 2.10.

Если указанные отмеченные пары не пересекаются, то можно считать, что они — $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$. Тогда имеются е.а. $\{e_i, e_k \mid \varnothing\}$ с $i = 1, 2$ и $k = 3, 4$. Подалгебра потомков $L = \mathrm{Lin}\{e_1, e_2, e_5\} = \mathrm{Lin}\{e_1, e_2, e_{12}\}$ регулярна, будучи о.м.а., а тогда $\mathcal{A} = L[e_3, e_4]$ регулярна, согласно второй части предложения 2.10. (Заметим, что (2.32) в форме $R(e_3, e_4)e_1 = 0$ выполняется, так как подалгебра потомков $\mathrm{Lin}\{e_1, e_3, e_4, e_6\}$ регулярна).

На этом этапе основная теорема уже доказана при $n = 6$.

Теперь $n = 7$ и $(\mathcal{A}, s)$ — алгебра типа (4,3). Тогда имеется три отмеченных пары, $\{e_{i_1}, e_{k_1}\}$, $\{e_{i_2}, e_{k_2}\}$ и $\{e_{i_3}, e_{k_3}\}$, потомками которых являются e_5, e_6 и e_7 соответственно. Для остальных пар $\{e_i, e_k\}$, $1 \leq i < k \leq 4$, имеем е.а.

Предположим, что пересечение всех трех пар непусто, например, пусть они — $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_1, e_4\}$. Тогда каждая тройка $\{e_1, e_{ik}, e_{i'k'}\}$ принадлежит подалгебре потомков, размерность которой ≤ 5, и тем самым регулярной. Следовательно, $R(e_{ik}, e_{i'k'})e_1 = 0$. Согласно следствию 2.9, алгебра $(\mathcal{A}, s)$ регулярна.

Пусть пересечение всех трех отмеченных пар пусто. Тогда две из них имеют непустое пересечение, например, это — $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_1, e_3\}$. Если e_4 не входит в оставшуюся пару, то эта пара есть $\{e_2, e_3\}$. Подалгебра потомков $M = \mathrm{Lin}\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, e_7\}$ регулярна, так как $\dim M = 6$. Алгебра $\mathcal{A} = M[e_4]$ регулярна в силу первой части предложения 2.10. Остается рассмотреть случай трех пар $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_3, e_4\}$ (с точностью до транспозиции $e_2 \leftrightarrow e_3$).

Имея в виду опять использовать следствие 2.9, мы должны работать лишь с теми тройками $\{e_1, e_{ik}, e_{i'k'}\}$, которые не попадают ни в какую собственную подалгебру потомков, ибо все последние уже регулярны. Такие „плохие" тройки появляются, если и только если e_2, e_3, e_4 находятся среди $e_i, e_k, e_{i'}, e_{k'}$. В силу симметрии между e_{ik} и $e_{i'k'}$ можно считать, что пара индексов $\{i, k\}$ лексикографически предшествует паре $\{i', k'\}$. При этих условиях полный список пар $\{e_{ik}, e_{i'k'}\}$ таков:

$$\begin{array}{llll} \{e_{12}, e_{34}\}, & \{e_{13}, e_{24}\}, & \{e_{14}, e_{23}\}, & \{e_{22}, e_{34}\}, \\ \{e_{23}, e_{24}\}, & \{e_{23}, e_{34}\}, & \{e_{24}, e_{33}\}, & \{e_{24}, e_{34}\}. \end{array}$$

Здесь $e_{jl} = \frac{1}{2}(e_j + e_l)$ (т.е. $R(e_j, e_l) = 0$), кроме отмеченных e_{12}, e_{13} и e_{34}. В частности, $e_{14} = \frac{1}{2}(e_1 + e_4)$ и $e_{23} = \frac{1}{2}(e_2 + e_3)$. Следовательно,

$$R(e_{14}, e_{23}) = \frac{1}{4}\{R(e_1, e_2) + R(e_1, e_3) + R(e_3, e_4)\}, \tag{6.13}$$

поскольку $R(e_2, e_4) = 0$. Отсюда

$$R(e_{14}, e_{23})e_1 = 0, \tag{6.14}$$

так как тройки $\{e_1, e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_1, e_3\}$ и $\{e_1, e_3, e_4\}$ „хорошие". Аналогично

$$R(e_{23}, e_{24})e_1 = 0, \qquad R(e_{24}, e_{33})e_1 = 0, \tag{6.15}$$

ибо $R(e_{23}, e_{24}) = \frac{1}{4}R(e_3, e_4)$ и $R(e_{24}, e_{33}) = R(e_{24}, e_3) = \frac{1}{2}R(e_3, e_4)$. Теперь $R(e_{22}, e_{34}) = R(e_2, e_{34}) = -\frac{1}{2}R(e_3, e_4)$ в силу следствия 2.6. Поэтому

$$R(e_{22}, e_{34})e_1 = 0. \tag{6.16}$$

Отсюда и из равенства $R(e_{23}, e_{34}) = \frac{1}{2}\{R(e_2, e_{34}) + R(e_3, e_{34})\}$ получаем

$$R(e_{23}, e_{34})e_1 = \frac{1}{2}R(e_3, e_{34})e_1 = 0 \tag{6.17}$$

(тройка $\{e_1, e_3, e_{34}\}$ „хорошая"). Аналогично

$$R(e_{24}, e_{34})e_1 = 0. \tag{6.18}$$

Так как $R(e_{13}, e_{24}) = \frac{1}{2}\{R(e_{13}, e_2) + R(e_{13}, e_4)\}$ и тройки $\{e_1, e_{13}, e_2\}$, $\{e_1, e_{13}, e_4\}$ „хорошие", получаем

$$R(e_{13}, e_{24})e_1 = 0. \tag{6.19}$$

Наконец, $R(e_{12}, e_{34}) = -\{R(e_{13}, e_{24}) + R(e_{14}, e_{23})\}$ по лемме 2.3, а тогда

$$R(e_{12}, e_{34})e_1 = 0 \tag{6.20}$$

в силу (6.14) и (6.19). Соотношения (6.14)-(6.20) доказывают лемму 6.18. •

Теперь мы можем завершить доказательство основной теоремы, т.е. доказать, что рассматриваемая алгебра является о.м.а.

Во-первых, у нас уже есть идемпотенты $e_1, \ldots, e_m$, а e_j с $j > \rho$ не являются таковыми. Далее, из леммы 6.13 уже следует (3.1) с отмеченными парами $\{e_{i_j}, e_{k_j}\}$, а для остальных пар $\{e_i, e_k\}$, $1 \leq i < k \leq m$, мы имеем (3.2) в силу следствия 4.11 и леммы 6.16.

Рассмотрим подалгебру потомков множества $\{e_i, e_{i_j}, e_{k_j}\}$. Она регулярна, так как ее размерность ≤ 6 ($=$ 6, если обе пары $\{e_i, e_{i_j}\}$, $\{e_i, e_{k_j}\}$ отмеченные). Отсюда следуют формулы (3.3) и (3.4), причем c_j не зависит от i в силу (3.4), $\bar{c}_j = 1 - c_j$.

Наконец, рассмотрим подалгебру потомков M_{jl} множества $\{e_{i_j}, e_{k_j}, e_{i_l}, e_{k_l}\}$. Для всех шести пар элементов этого множеств подалгебра потомков является е.а. или о.м.а. Поэтому в каноническом базисе подалгебры M_{jl} идемпотентами являются только элементы родительского множества. Согласно следствию 6.17, $m \leq 4$. По лемме 6.18 алгебра M_{jl} регулярна. Следовательно, формулы (3.5) также справедливы, и доказательство основной теоремы закончено.

Список литературы

[1] Бернштейн С. Н., *О приложении математики к биологии*, Наука на Украине **1** (1922), 14–19.

[2] Бернштейн С. Н., *Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности*, Учен. зап. н.-и. кафедр Украины. Отд. мат. вып. 1 (1924), 83–115.

[3] Etherington I. M. H., *Genetic algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **59** (1939), 242–258.

[4] González S., Gutiérrez Fernández J. C., Martinez López C., *The Bernstein problem in dimension* 5, J. Algebra **177** (1995), 676–697.

[5] Gutiérrez Fernández J. C., *The Bernstein problem in dimension* 6, J. Algebra **185** (1996), 420–439.

[6] Hardy G. H., *Mendelian proportions in a mixed population*, Science **28** (1908), no. 706, 49–50.

[7] Holgate P., *Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle*, J. London Math. Soc. (2) **9** (1975), 613–623.

[8] Любич Ю. И., *Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций*, Успехи мат. наук **26** (1971), № 5, 51–116.
[9] Любич Ю. И., *К математической теории наследственности*, Докл. АН СССР **209** (1973), № 5, 1028–1030.
[10] Любич Ю. И., *Строение бернштейновских популяций типа* $(n-1,1)$, Успехи мат. наук **28** (1973), № 5, 247–248.
[11] Любич Ю. И., *Об одной теореме С. Н. Бернштейна*, Сиб. мат. ж. **14** (1973), № 3, 678–679.
[12] Любич Ю. И., *Двухуровневые бернштейновские популяции*, Мат. сб. **95** (1974), № 4, 606–628.
[13] Любич Ю. И., *Строение бернштейновских популяций типа* $(2,n-2)$, Успехи мат. наук **30** (1975), № 1, 247–248.
[14] Любич Ю. И., *Квазилинейные бернштейновские популяции*, Теория функций, функц. анал. и их прил. **26** (1976), 79–84.
[15] Любич Ю. И., *Бернштейновские алгебры*, Успехи мат. наук **32** (1977), № 6, 261–262.
[16] Любич Ю. И., *Стохастические алгебры и некоторые их применения в математической генетике*, Математические методы в биологии, Наукова Думка, Киев, 1977, сс. 119–131.
[17] Любич Ю. И., *Правильные бернштейновские популяции*, Пробл. передачи информ. **13** (1977), № 3, 91–100.
[18] Любич Ю. И., *Алгебраическое доказательство теоремы С. Н. Бернштейна о двух чистых типах*, Вестн. Харьков. ун-та. Сер. мех.-мат. вып. 44 (1979), 86–94.
[19] Любич Ю. И., *Топологический подход к одной проблеме математической генетики*, Успехи мат. наук **34** (1979), № 6, 53–58.
[20] Любич Ю. И., *Математические структуры в популяционной генетике*, Наукова Думка, Киев, 1983.
[21] Lyubich Yu. I., *The Bernstein problem in mathematical genetics and Bernstein algebras*, Non-Associative Algebra and Its Applications (Oviedo, 1993) (ed. S. González), Math. Appl., vol. 303, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994, pp. 241–244.
[22] Lyubich Yu., *A new advance in the Bernstein problem in mathematical genetics*, Preprint no. 9/1996, Inst. Math. Sci., Stony Brook, 1996.
[23] Любич Ю. И., *Ультранормальный случай проблемы Бернштейна*, Функц. анал. и его прил. **31** (1997), № 1, 77–80.
[24] Reed M. L., *Algebraic structure of genetic inheritance*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **34** (1997), 107–130.
[25] Wörz-Busekros A., *Algebras in genetics*, Lecture Notes in Biomath., vol. 36, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1980.

Поступило 26 апреля 1998 г.