А. Н. Шерстнев, О понятии случайного нормированного пространства,
Докл. АН СССР, 1963, том 149, номер 2, 280–283

https://www.mathnet.ru/dan27705

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 149, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Н. ШЕРСТНЕВ

О ПОНЯТИИ СЛУЧАЙНОГО НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 X 1962)

§ 1. В предлагаемой статье рассматривается класс линейных пространств, в которых вместо понятия нормы вектора вводится понятие распределения нормы. Эти пространства мы будем называть случайными нормированными пространствами (с.н.п.). Подобное обобщение метрического пространства было впервые осуществлено Менгером ([1]) и привело к теории случайных метрик. Принципиальным пунктом аксиоматики случайной метрики является «неравенство треугольника». Менгер предложил связывать с пространством со случайной метрикой некоторую функцию T от двух вещественных переменных. С помощью этой функции T и вводится неравенство треугольника. Вслед за этим Вальд ([2]), отметив некоторые неудобства менгеровой аксиоматики, предложил свое неравенство треугольника. Затем Швайцер и Склар ([3]) отметили, что пространство Вальда является пространством Менгера со специальной функцией T. Однако пространство Менгера с этой T, вообще, не является пространством Вальда. Поэтому теория Вальда не вытекает из теории Менгера.

В настоящей работе строится аксиоматика, включающая в себя теории Менгера и Вальда как частные случаи. Необходимо помнить только, что в нашем случае изложение ведется для более узкого класса пространств. Переформулировка предлагаемой аксиоматики для случайных метрик не представляет, однако, затруднений. Применительно к цели этой работы введена дополнительная аксиома ($\mu 5$), выражающая в вероятностной интерпретации следующее: событие {норма суммы двух векторов не меньше $x+y$} влечет, что либо {норма первого элемента не меньше x}, либо {норма второго элемента не меньше y}. Понятие с.н.п. довольно общее. Нами показано, что произвольное счетно-нормированное пространство можно рассматривать как с.н.п. В настоящей работе изучается также вопрос о пополнении с.н.п.

§ 2. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество всех невозрастающих непрерывных слева функций $\xi(x)$, определенных на всей вещественной оси R, таких, что $\xi(x)=1$, если $x \leqslant 0$, и $\xi(\infty)=0$. Пусть B — некоторое подмножество множества $\mathfrak{B}$. Для заданной функции α, определенной на $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ со значениями в $\mathfrak{B}$, образуем множество $B[\alpha]=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n[\alpha]$, где $B_0[\alpha]=B$, $B_n[\alpha]=B_{n-1}[\alpha] \cup \alpha(B_{n-1}[\alpha] \times B_{n-1}[\alpha])$. В множестве $\mathfrak{B}$ введем отношение порядка, считая $\xi \leqslant \eta$, если $\xi(x) \leqslant \eta(x)$ для любого $x \in R$. Функцию α назовем *B-функцией*, если для всех ξ, η, ζ из $B[\alpha]$:

($\mu 1$) $\alpha(\xi, \eta)=\alpha(\eta, \xi)$.

($\mu 2$) $\alpha(\Delta, \xi)=\xi$, где Δ — функция из $\mathfrak{B}$ такая, что $\Delta(x)=0$ при $x>0$.

($\mu 3$) $\alpha(\xi, \eta) \geqslant \alpha(\xi_1, \eta_1)$, если $\xi \geqslant \xi_1$, $\eta \geqslant \eta_1$.

($\mu 4$) $\alpha(\alpha(\xi, \eta), \xi)=\alpha(\xi, \alpha(\eta, \xi))$.

($\mu 5$) $\alpha(\xi, \eta \mid x) \leqslant \inf\limits_{t \in [0,1]} \min \{\xi(tx)+\eta((1-t)x), 1\}$, $x \in R$.

Здесь $\alpha(\xi, \eta/x)$ — значение функции $\alpha(\xi, \eta)$ в точке $x \in R$.

Определение. С. н. п. — это набор $(\mathfrak{L}, f, \mu)$, где $\mathfrak{L}$ — некоторое линейное пространство над полем Λ комплексных или вещественных чисел, f — отображение $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{B}$: $\varphi \in \mathfrak{L} \to f(\varphi) = \|\varphi\| = \|\varphi; \cdot\| \in \mathfrak{B}$, μ — некоторая $f(\mathfrak{L})$-функция. При этом выполняются следующие аксиомы:

I. $\|\varphi\| = \Delta$ тогда и только тогда, когда $\varphi = \theta$ (θ — нулевой элемент $\mathfrak{L}$).

II. $\|a\varphi; x\| = \|\varphi; x/|a|$ для любого $\varphi \in \mathfrak{L}$ и любого $a \in \Lambda$;

III. $\|\varphi + \psi\| \leqslant \mu(\|\varphi\|, \|\varphi\|)$, $\varphi \in \mathfrak{L}$, $\psi \in \mathfrak{L}$.

С. н. п. является обобщением обычных нормированных пространств. Функцию $\|\varphi; x\|$ можно трактовать как вероятность того, что норма вектора φ не меньше чем x. Обычное нормированное пространство с нормой $p(\varphi)$ становится с. н. п., если в качестве μ взять произвольную $f(\mathfrak{L})$-функцию такую, что $\mu(\xi, \eta \mid x) \geqslant \mu_0(\xi, \eta \mid x) = \inf\limits_{t \in [0,1]} \max\{\xi(tx), \eta((1-t)x)\}$, и положить

$$\|\varphi; x\| = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant p(\varphi), \\ 0, & \text{если } x > p(\varphi). \end{cases}$$

Если в качестве μ взять $\mu(\xi, \eta \mid x) = \eta(x) - \int\limits_0^x \xi(x-s)\, d\eta(s)$, получим пространство Вальда. Можно показать также, что теория Менгера включается в нашу теорию.

Если μ' и μ'' таковы, что $\mu'(\xi, \eta) \leqslant \mu''(\xi, \eta)$ для произвольных $\xi \in \mathfrak{B}$, $\eta \in \mathfrak{B}$, то пространство $(\mathfrak{L}, f, \mu')$ является также пространством $(\mathfrak{L}, f, \mu'')$. Это замечание приводит к следующей задаче. Пусть $\mathfrak{L}$ — линейное пространство и f — некоторое отображение $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{B}$ такое, что для элементов образа $f(\mathfrak{L})$ выполняются аксиомы I и II. Требуется среди всех $f(\mathfrak{L})$-функций μ, для которых $(\mathfrak{L}, f, \mu)$ является с. н. п., найти «наилучшую». Введем в множестве всех $f(\mathfrak{L})$-функций отношение порядка, считая $\mu' \leqslant \mu''$, если $\mu'(\xi, \eta) \leqslant \mu''(\xi, \eta)$ для произвольных $\xi \in \mathfrak{B}$, $\eta \in \mathfrak{B}$. Тогда эту задачу естественно понимать как задачу отыскания минимального элемента в множестве всех $f(\mathfrak{L})$-функций μ, для которых $(\mathfrak{L}, f, \mu)$ — с. н. п. Можно доказать следующий результат, который является аналогом теоремы 4 ([4]).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — линейное пространство и f — некоторое отображение $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{B}$ такое, что для элементов образа $f(\mathfrak{L})$ выполняются аксиомы* I *и* II. *Пусть J — множество всех $f(\mathfrak{L})$-функций μ таких, что:* 1) $(\mathfrak{L}, f, \mu)$ — *с. н. п.*; 2) *свойства* $(\mu 1)$ — $(\mu 5)$ *выполняются на всем* $\mathfrak{B}$; 3) $\mu(\cdot, \eta \mid x)$ *непрерывна относительно сходимости монотонных убывающих сетей на $\mathfrak{B}$ по первому аргументу при фиксированном втором (если под сходимостью понимать поточечную сходимость). Тогда J обладает минимальным элементом.*

§ 3. Введем в рассмотрение множества $U_{\varepsilon, \delta} = \{\varphi \in \mathfrak{L}: \|\varphi; \delta\| < \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $0 < \delta < \infty$. Система $\mathfrak{A} = \{U_{\varepsilon, \delta}\}$ оказывается определяющей системой окрестностей нуля в $\mathfrak{L}$ и, следовательно, $\mathfrak{L}$ можно рассматривать как топологическое линейное пространство. В $\mathfrak{L}$ выполняется первая аксиома счетности, поэтому топологию можно описывать с помощью счетных сходящихся последовательностей. При этом последовательность φ_n сходится к элементу $\varphi \in \mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда $\|\varphi - \varphi_n; x\| \to 0$ каково бы ни было $x > 0$.

Теорема 2. *Если $(\mathfrak{L}, f, \mu)$ — с. н. п., то $\mu(\|\varphi\|, \|\psi\|)$ — непрерывная функция φ и ψ в том смысле, что если $\varphi_n \to \varphi$, $\psi_m \to \psi$, то $\mu(\|\varphi_n\|, \|\psi_m\| x) \to \mu(\|\varphi\|, \|\psi\| \mid x)$ $(n, m \to \infty)$ для любой точки непрерывности функции $\mu(\|\varphi\|, \|\psi\|)$.*

Отсюда следует, в частности, что $f(\varphi) = \|\varphi\|$ — непрерывная функция φ в том же смысле. Общее определение ограниченного множества в топологическом линейном пространстве дает следующий критерий ограниченности множества в с. н. п.: множество $A \subset \mathfrak{L}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует функция $\xi \in \mathfrak{B}$ такая, что $\|\varphi\| \leqslant \xi$ каково бы ни было $\varphi \in A$.

§ 4. Далее будут изложены некоторые результаты о пополнении с. н. п. Как обычно, последовательность φ_n элементов с. н. п. $\mathfrak{L}$ назовем фундаментальной, если $\varphi_n - \varphi_m \to \theta$ $(n, m \to \infty)$. $\mathfrak{L}$ — полное пространство, если всякая фундаментальная последовательность φ_n элементов из $\mathfrak{L}$ сходится. Как известно, всякое нормированное пространство можно изометрично вложить в некоторое полное нормированное пространство. Интересно исследовать вопрос о таком вложении в случае с. н. п. Под изометрией здесь естественно понимать отображение, сохраняющее функции $\|\varphi\|$. В дальнейшем под пополнением понимается такая изометрия в некоторое полное пространство.

Теорема 3. *Всякое с. н. п.* $(\mathfrak{L}, f, \mu)$ *имеет некоторое пополнение* $(\mathfrak{L}', f', \mu)$, *если* μ — $\mathfrak{B}$-*функция, непрерывная относительно топологии* $\mathfrak{B}$ *как топологии, индуцируемой поточечной сходимостью.*

Если с. н. п. $\mathfrak{L}$ удовлетворяет аксиоме более сильной, чем аксиома I, именно, если для любого $\varphi \in \mathfrak{L}$

$$\|\varphi; +0\| = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \neq \theta, \\ 0, & \text{если } \varphi = \theta, \end{cases}$$

то пополнение $\mathfrak{L}'$ уже, вообще говоря, не удовлетворяет этой аксиоме. В этом можно убедиться построением соответствующего примера.

В условиях теоремы 3 пополнение осуществляется таким образом, что пополненное пространство наследует $f(\mathfrak{L})$-функцию исходного пространства. Возможна постановка задачи пополнения с одновременным изменением μ.

Теорема 4. *Для всякого с. н. п.* $(\mathfrak{L}, f, \mu)$ *существует некоторое пополнение* $(\mathfrak{L}', f', \mu')$, *где* $\mu' \geqslant \mu$.

Приведем пример бесконечномерного с. н. п. Пусть $\{\xi_i\}_1^\infty$ — последовательность функций из $\mathfrak{B}$, отличных от Δ. Пусть m — множество последовательностей $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ комплексных чисел таких, что $\sup\limits_i \xi_i (x/|\varphi_i|) \to 0$ при $x \to \infty$. Нетрудно показать, что m — линейное пространство относительно естественных векторных операций над элементами φ. Определим f, полагая

$$\|\varphi; x\| = \sup_i \xi_i \left(\frac{x}{|\varphi_i|}\right).$$

Тогда (m, f, μ_0) — полное локально выпуклое пространство.

§ 5. В настоящем параграфе будет показано, что всякое счетно-нормированное пространство можно рассматривать как с. н. п. Пусть (Φ, q) — произвольное счетно-нормированное пространство. Здесь q — мультинорма на Φ: $q = \{|\cdot|_1, |\cdot|_2, \ldots\}$. Можно считать, что преднормы $|\cdot|_k$, $k = 1, 2, \ldots$, таковы, что $|\cdot|_1 \leqslant |\cdot|_2 \leqslant \ldots$ Присоединим формально к этой последовательности преднорм нулевую преднорму $|\cdot|_0$, считая $|\varphi|_0 = 0$ для любого $\varphi \in \Phi$. Пусть τ — произвольная случайная величина, принимающая неотрицательные целые значения, причем $P(\tau \geqslant N) > 0$, каково бы ни было N. Коль скоро τ задана, нам известна функция $\xi(x) = P(\tau \geqslant x)$. Поставим в соответствие каждому элементу $\varphi \in \Phi$ функцию, определенную для любого $x \in R$: $\|\varphi; x\| = P(|\varphi|_\tau \geqslant x)$. Если ввести в рассмотрение функцию

$$\varphi[x] = \begin{cases} \min\{n\colon |\varphi|_n \geqslant x\}, & \text{если } \{n\colon |\varphi|_n \geqslant x\} \neq \phi; \\ \infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то нетрудно показать, что

$$\|\varphi; x\| = \xi(\varphi[x]). \qquad (*)$$

Теорема 5. *Пусть* (Φ, q) — *произвольное счетно-нормированное пространство,* $q = \{|\cdot|_0, |\cdot|_1, \ldots\}$ — *мультинорма, заданная на* Φ. *Тогда тройка* (Φ, f_τ, μ_0) — *с. н. п.* (*здесь* f_τ — *отображение, задаваемое с помощью* (*)). *Более того, отображение, переводящее каждый элемент* φ *исходного пространства* (Φ, q) *в тот же элемент, рассматриваемый как элемент с. н. п.* (Φ, f_τ, μ_0), *осуществляет алгебраический и топологический изоморфизм между этими пространствами.*

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
24 IV 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Menger, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **28**, 535 (1942). [2] A. Wald, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **29**, 196 (1943). [3] B. Schweizer, A. Sklar, C. R., **247**, 2092 (1958). [4] E. Thorp, Proc. Am. Math. Soc., **11**, 734 (1960).