

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Гиневская, О. А. Синкевич, К теории
двумерной контракции, *Докл. АН СССР*, 1984,
том 279, номер 4, 852–856

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

14 декабря 2024 г., 19:19:45



И.Ю. ГИНЕВСКАЯ, О.А. СИНКЕВИЧ
К ТЕОРИИ ДВУМЕРНОЙ КОНТРАКЦИИ

(Представлено академиком В.А. Кириллиным 8 VI 1983)

Явление контракции, часто наблюдаемое в различных средах, в простейшем случае заключается в самопроизвольном сжатии электрического разряда без силового воздействия с сохранением прежней симметрии. Причиной контракции могут являться как объемные (резкая зависимость проводимости σ и других параметров плазмы от температуры T), так и поверхностные (например, наличие термического сопротивления на электродах или изоляционных стенках) эффекты.

Как правило, контракция связана с неоднозначностью неоднородного стационарного состояния разряда и сопровождается явлениями гистерезисного характера. В настоящее время существует несколько моделей контракции [1–6], но все они относятся к одномерным (квазиодномерным) подходам, когда по одной из координат производят усреднение [4, 5], или посвящены только механизму соответствующей нелинейности. Ниже излагается теория двумерной контракции (плоские или осесимметричные системы), связанная с объемными эффектами: резкой зависимостью проводимости от температуры. Для термической равновесной плазмы используется так называемая скачковая модель проводимости [6]:

$$(1) \quad \sigma(\theta) = \begin{cases} \sigma_0, & \theta \geq \theta^* = 0, \\ \sigma_1, & \theta < \theta^* = 0, \end{cases}$$

где

$$\theta = \frac{T' - T^{*'}}{T^{*'}}; \quad T' = \frac{1}{\lambda_0} \int_{T_0}^T \lambda(T) dT;$$

T^* – температура, при которой происходит скачок проводимости; λ – коэффициент теплопроводности.

Рассматривается некоторая область G , заполненная неподвижной равновесной плазмой. Стационарное состояние такой плазмы описывается уравнениями энергии

$$(2) \quad \operatorname{div} \lambda(T) \operatorname{grad} T + \mathbf{jE} \equiv 0,$$

Максвелла

$$(3) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

$$(4) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

и законом Ома

$$(5) \quad \mathbf{j} = \sigma(T) \mathbf{E}.$$

На границе области G_1 , являющейся изоляционными стенками, задано равенство нулю нормальной к поверхности составляющей электрического тока $j_n(\bar{G}_1) = 0$, а на электродах \bar{G}_e – потенциал $\varphi(\bar{G}_e)$. Каждый электрод является эквипотенциалю, кроме того, на всей границе $\bar{G} = \bar{G}_1 \cup \bar{G}_e$ заданы условия по температуре. Развитый метод построения решения может быть осуществлен при достаточно общих граничных условиях для температуры. Из уравнений (3), (4) следует, что можно ввести функции φ и ψ такие, что

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad j_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad j_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Рис. 1. Физическая область интегрирования исходной системы уравнений

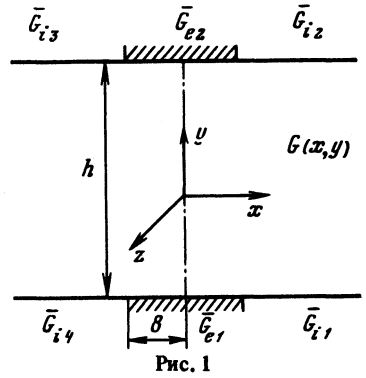


Рис. 2. Линии электрического тока: 1 – раздела "фаз", 2 – электрического тока, составляющего 0,99 от полного тока

Рис. 3. Влияние различных параметров на ВАХ. $(\sigma_1/\sigma_0)_2 > (\sigma_1/\sigma_0)_1$; $(T^*/T_w)_2 > (T^*/T_w)_1$; $(b/h)_1 > (b/h)_4$; индексы у скобок соответствуют номерам кривых

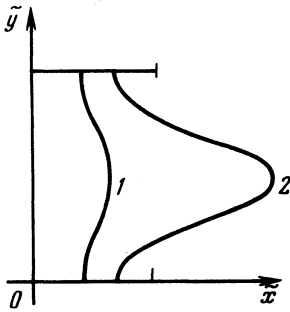


Рис. 2

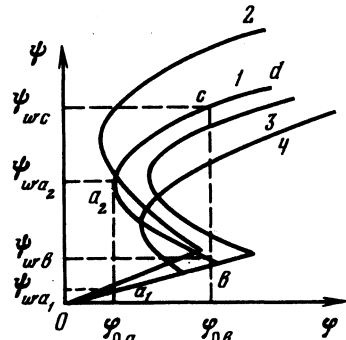


Рис. 3

Задача сводится к построению решения системы уравнений (2)–(5) с заданными граничными условиями и выделению областей $G(x, y)$ с различной проводимостью σ_0 и σ_1 , разделенных кривой $g^*(x, y)$, на которой температура равняется температуре включения: $\theta(x^*, y^*) = \theta^*$. На этой границе (g^*) должно выполняться условие непрерывности температуры и потока тепла:

$$(6) \quad \theta_I(x^*, y^*) = \theta_{II}(x^*, y^*) = \theta^*,$$

$$(7) \quad \left. \frac{\partial \theta_I}{\partial n} \right|_{x=x^*} = \left. \frac{\partial \theta_{II}}{\partial n} \right|_{x=x^*},$$

где θ_I и θ_{II} – температуры в разных "фазах". Эти условия позволяют решить задачу и определить линию раздела "фаз" (g^*). Использование модели (1) делает поставленную задачу похожей на известную задачу Стефана, когда требуется построить не только поле температур, но и определить положение границы раздела "фаз" с разной проводимостью. В рассматриваемых задачах даже для модельной зависимости (1) положение осложняется тем, что само уравнение теплопроводности (из-за джоулева тепловыделения) является нелинейным и его требуется решать совместно с уравнением для электрического потенциала φ (или для функции тока ψ). Сущность рассматриваемого подхода заключается в том, что внутри областей с постоянной проводимостью функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям Лапласа $\Delta \varphi = 0$, $\Delta \psi = 0$ и линии электрического тока и эквипотенциали образуют естественную систему координат. Действительно, вместо исходных координат x, y можно ввести новые координаты $\varphi = \varphi(x, y)$ и $\psi = \psi(x, y)$ и записать уравнение теплопроводности (2) в координатах φ и ψ . Затем можно перейти из физической области $x, y - G(x, y)$

в область переменных $\varphi, \psi - W(\varphi, \psi)$, записав

$$L(\theta, \varphi, \psi, x, y) \equiv \tilde{L}(\theta, \varphi, \psi) = 0.$$

Поскольку φ и ψ являются гармоническими функциями в области G , то можно использовать эффективно методы конформных отображений. Такие отображения P

исходной области G на область переменных φ и ψ $W(G(x, y)) \xrightarrow{P} W(\varphi, \psi)$ во многих интересных для приложения задач известны. Иногда, как показано на конкретной задаче, построение решения в переменных φ и ψ упрощается. При этом в области W могут быть найдены и границы $\tilde{g}(\varphi, \psi)$ смены "фаз". Зная обратное отображение $W(\varphi, \psi) \xrightarrow{P^{-1}} G(x, y)$ можно выразить полученное решение в переменных x, y . Некоторые свойства разряда можно исследовать, и не используя обратного преобразования P^{-1} . В этом кратко суть излагаемого метода, приложение которого продемонстрируем на задаче о канале с электродами конечной длины.

Рассмотрим канал с симметричными относительно оси y электродами конечной длины и изоляционными стенками (рис. 1). Стационарное состояние равновесной плазмы области описывается системой уравнений (2), (4), (5) и условиями непрерывности температуры и потока тепла на границе раздела "фаз" (6), (7), а также граничными условиями, заданными по всему контуру. На электродах задаем потенциалы. На изоляционных стенках задается равенство нулю нормальной к поверхности границы составляющей электрического тока. Поскольку задача симметрична относительно оси y , можно находить решение в интервале $x > 0, 0 \leq y \leq h$, используя условие симметрии по температуре и по электрическому току. В безразмерном виде исходные уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + \gamma \left[\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] = 0,$$

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{1}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \frac{1}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} = 0;$$

где γ относится к безразмерным величинам: $\gamma = \frac{\sigma_0 \varphi_0^2}{\tilde{\sigma} \lambda_0 T^*}$ - безразмерный комплекс, характеризующий интенсивность джоулева нагрева; $\tilde{x} = x/b; \tilde{y} = y/b; b$ -

половина длины электрода, $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sigma \varphi_0}, \tilde{\varphi} = \varphi/\varphi_0; \varphi_0$ - разность потенциалов элект-

родов, $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0 - 0 = \varphi_0$ (т.е. потенциал одного электрода выбираем нулевым), $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_0, \sigma_0$ - проводимость первой "фазы", $\sigma_0 > \sigma_1, T^*$ - заданная величина, зависящая от состава плазмы и давления. В новой системе координат φ и ψ уравнение (8) имеет вид

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{\psi}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{\varphi}^2} + \gamma = 0.$$

При этом граничные условия (6), (7) можно представить в эквивалентном виде:

$$\theta_I = \theta_{II}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}^*) = \theta^*, \quad \left. \frac{\partial \theta_I}{\partial \tilde{\psi}} \right|_{\tilde{\psi}=\tilde{\psi}^*} = \left. \frac{\partial \theta_{II}}{\partial \tilde{\psi}} \right|_{\tilde{\psi}=\tilde{\psi}^*}. \quad \text{Функции } \varphi, \psi \text{ удовлетворяют урав-$$

нениям Лапласа, поэтому можно ввести гармоническую функцию $\omega(\varphi, \psi) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ и использовать метод конформных отображений. Для рассматри-

ваемой задачи существует [7] представление вида

$$(11) \quad \omega(\varphi, \psi) = \varphi + i\psi = C \int_0^P \frac{dP}{\sqrt{(P^2 - 1)(P^2 - 1/k^2)}},$$

$$(12) \quad C = \left[2 \int_0^1 \frac{dP}{\sqrt{(P^2 - 1)(P^2 - 1/k^2)}} \right]^{-1}, \quad k = e^{-2\pi/H}, \quad H = \frac{h}{b}.$$

Здесь h – расстояние между электродами $P = \tau + it$, где $\tau = e^{(\pi/H)(1+\tilde{x})} \cos \frac{\pi}{H} \tilde{y}$, $t = e^{(\pi/H)(1+\tilde{x})} \sin \frac{\pi}{H} \tilde{y}$, ток, протекающий в области G , можно выразить в виде

$$(13) \quad \tilde{\psi}_w = \left(1 - \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_0} \right) \tilde{\psi}^* + \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_0} \tilde{\psi}_w^*,$$

Здесь $\tilde{\psi}_w$ – значение безразмерного полного тока, протекающего через весь электрод, $\tilde{\psi}^*$ – значение безразмерного тока, протекающего в части области с проводимостью $\tilde{\sigma}_0$, а $\tilde{\psi}_w^*$ – геометрический фактор полного тока, рассчитанный по формуле (11); значение $\tilde{\psi}^*$ должно быть определено в процессе решения всей задачи, так как заранее не известно, где расположена граница смены "фаз".

Общая система уравнений, описывающая стационарное состояние плазмы в области W , и отображение области G на область W состоят из уравнений (10), (11), (13) и соответствующих граничных условий. Уравнение (10) решается для областей W_1 (с проводимостью $\tilde{\sigma}_0$) и W_2 (σ_1) и решения сшиваются по условию непрерывности температуры и потока тепла на границе раздела. Рассмотрим более частный случай, сделав еще одно допущение, которое не является принципиальным для метода, но существенно упрощает получение окончательных результатов. Считаем, что температура изменяется только при переходе от одной линии электрического тока к другой ($\tilde{\psi}$), т.е. линии тока совпадают с изотермами. Уравнение (10) при этом становится одномерным. В физической плоскости температура, однако, является функцией координат x, y ($\theta(x, y) = f(x, y)$), так как линии электрического тока не являются прямыми, параллельными оси y). Дальнейшее построение решения уравнения (10) и нахождения границ смены "фаз" аналогично случаю, рассмотренному в [6], и поэтому здесь приводятся лишь окончательные результаты. Решения уравнения (10) при этом в двух областях (W_1 и W_2) записываются:

$$\theta_I = -\frac{\gamma_1}{2} (\tilde{\psi}^2 - \tilde{\psi}^{*2}), \quad \gamma_1 = \frac{\sigma_0 \varphi_0^2}{\tilde{\sigma}_0 \lambda_0 T^*}, \quad \tilde{\sigma}_0 = 1;$$

$$\theta_{II} = -\frac{\gamma_2}{2} \tilde{\psi}^2 + \left[\frac{\gamma_2}{2} (\tilde{\psi}^* + \tilde{\psi}_w) + \frac{\theta_w}{\tilde{\psi}_w - \tilde{\psi}^*} \right] \tilde{\psi} - \left[\frac{\gamma_2}{2} \tilde{\psi}_w \tilde{\psi}^* + \frac{\theta_w \tilde{\psi}^*}{\tilde{\psi}_w - \tilde{\psi}^*} \right],$$

где θ_w – температура среды при $x \rightarrow \infty$.

Неизвестные константы и само положение границы раздела g^* находятся из условий непрерывности температуры и теплового потока на границе раздела "фаз". Используя полученное решение, находим вольт-амперную характеристику (ВАХ) разряда:

$$(14) \quad \tilde{\psi}_w = \frac{[\gamma_1 + (\gamma_1 - \gamma_2) \tilde{\sigma}_1 / \tilde{\sigma}_0] \tilde{\psi}_w^*}{2\gamma_1 - \gamma_2 \tilde{\sigma}_1 / \tilde{\sigma}_0} \pm \frac{1 - \tilde{\sigma}_1 / \tilde{\sigma}_0}{2\gamma_1 - \gamma_2 \tilde{\sigma}_1 / \tilde{\sigma}_0} \times \\ \times \sqrt{(\gamma_1 \tilde{\psi}_w^*)^2 + 2\theta_w (2\gamma_1 \tilde{\sigma}_0 / \tilde{\sigma}_1 - \gamma_2)}.$$

Для части тока, протекающего через область с проводимостью $\tilde{\sigma}_0$, имеем

$$(15) \quad \tilde{\psi}^* = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2 \tilde{\sigma}_1 / \tilde{\sigma}_0) \tilde{\psi}_w^*}{2\gamma_1 - \gamma_2 \tilde{\sigma}_1 / \tilde{\sigma}_0} \pm \frac{1}{2\gamma_1 - \gamma_2 \tilde{\sigma}_1 / \tilde{\sigma}_0} \times \\ \times \sqrt{(\gamma_1 \tilde{\psi}_w^*)^2 + 2\theta_w(2\gamma_1 \tilde{\sigma}_0 / \tilde{\sigma}_1 - \gamma_2)}.$$

По полученным решениям построены граница раздела "фаз", линии электрического тока (рис. 2) и ВАХ (рис. 3). Из рис. 3 видно, что скачковая модель проводимости (1) приводит к неоднозначной и нелинейной ВАХ. Линия ab на рис. 3 соответствует неконтрагированному состоянию, когда весь ток протекает через достаточно большую область малой проводимости σ_1 , так как максимальная температура T_{\max} не превышает температуры включения высокой проводимости T^* . На рис. 2 кривая 2 отделяет область, в которой протекает 0,99 полного тока и соответствует неконтрагированному разряду. На ВАХ неконтрагированному разряду соответствует линия ab , на которой связь между разностью потенциалов и током линейна, а сопротивление определяется только геометрическими факторами. Контрагированному состоянию на ВАХ соответствует ветвь a_2cd . Контрагированный разряд состоит из области высокой проводимости (слева от линии l на рис. 2) и области низкой проводимости (справа от линии l). Несмотря на то, что в контрагированном состоянии полный ток выше, чем в неконтрагированном, он протекает в сравнительно узкой области (линия l на рис. 2). Видно, что в критических точках ВАХ (при разностях потенциалов $\varphi_{0a}, \varphi_{0b}$) ток изменяется скачком, т.е. существует гистерезис по току. Уравнение (14) позволяет получать критерии возникновения контракции и исследовать влияние различных параметров на характеристики разряда (рис. 3).

При $\sigma_1 \rightarrow 0$ зависимость проводимости от температуры вида (1) соответствует каналовой модели. Построенное решение, как и в одномерном случае [6, 8], позволяет определить радиус канала разряда (в данном случае радиус канала изменяется по высоте) без использования каких-либо экстремальных принципов. При этом ветвь ba_2 ВАХ является неустойчивой в режиме заданного тока [9].

В заключение авторы выражают благодарность И.М. Руткевичу за полезное обсуждение задачи.

Московский энергетический институт

Поступило
16 VIII 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов В.Ю., Ульянов К.Н. — Письма ЖЭТФ, 1967, т. 6, с. 622.
2. Дыхне А.М. В кн.: Некоторые вопросы исследования газоразрядной плазмы и создания сильных магнитных полей. Л.: Наука, 1970.
3. Елецкий А.В., Рахимов А.Т. В кн.: Химия плазмы. М.: Атомиздат, 1977, вып. 4.
4. Хаит В.Д. — ТВТ, 1977, т. 15, с. 496.
5. Bedeaux D., Mazur P., Pasmantier R.A. — Physica, 1977, vol. 86A, p. 355.
6. Руткевич И.М., Синкевич О.А. — ТВТ, 1980, т. 18, с. 27.
7. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970.
8. Руткевич И.М., Синкевич О.А. Итоги науки и техники. Мех. жидк. и газа, 1981, т. 14, с. 127.
9. Артемов В.И., Руткевич И.М., Синкевич О.А. — ТВТ, 1980, т. 18, с. 1126.