С. Б. Гашков, О сложности приближенного вычисления действительных чисел схемами и формулами в различных рациональных базисах, *Дискрет. матем.*, 1990, том 2, выпуск 4, 26–46

Дискретная математика

том 2 выпуск 4 * 1990

УДК 519.7

О СЛОЖНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ СХЕМАМИ И ФОРМУЛАМИ В РАЗЛИЧНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

С. Б. Гашков

Для ряда рациональных, полиномиальных или линейных базисов получены асимптотики сложности и глубины ε-приближения почти всех чисел схемами в этих базисах и установлен континуальный аналог эффекта Шеннона из теории сложности булевых функций, а для некоторых монотонных линейных базисов — так называемый полуэффект Шеннона в случае реализации чисел формулами (для мультипликативных аналогов линейных базисов подобные утверждения верны для равномерного приближения степенных функций $x^a \in \mathbf{C}[0, 1]$). При этом базис $\{x-y, xy, 1/2\}$ и некоторые базисы вида $\{x-y, a_0, \ldots, a_m\}$ оказываются параллелизуемыми (т. е. для них глубина по порядку равна логарифму сложности реализации формулами), а базис $\{x-y, x/2, 1\}$ — нет. Показано, что для почти всех базисов $\{x-y, ax, 1\}$ сложность ε-приближения схемами почти всех чисел бесконечно мала при $\varepsilon \to 0$ по сравнению с таковой для базисов, состоящих из линейных функций, у которых коэффициенты — алгебраические числа, а также что не существует универсальной верхней оценки функций Шеннона для базисов вида $\{x-y, a, 1\}$.

В работе приведены доказательства соответствующих утверждений из [1], а также некоторых дополнений и уточнений к ним. Рассматриваемая задача является частным случаем задачи о сложности приближенной реализации непрерывных функций схемами и формулами в непрерывных базисах, исследовавшейся автором в [2—7]. В этом случае удается получить более полные результаты, например, продемонстрировать зависимость функций Шеннона от базиса, и наблюдать так называемый полуэффект Шеннона, а также для некоторых мер сложности привести эффективные примеры сложно реализуемых чисел. Часть утверждений имеет теоретический, теоретико-множественный характер, но другая часть, видимо, представляет определенный прикладной интерес, так как в некотором смысле они моделируют приближенные вычисления на вычислительной технике.

Вероятно, впервые вопрос о сложности вычисления действительных чисел в указанном смысле был рассмотрен в последней части работы Штрассена [8]. Если использовать принятые в [1—7] обозначения, то упомянутые результаты из [8] можно сформулировать так: для базиса $B = \{1, x+y, x-y, xy, x/y\}$ и любого числа $a \in \mathbf{R}$ верно, что

$$L_B(a, \varepsilon) \leqslant \frac{(1+o(1))\log(1/\varepsilon)}{\log\log(1/\varepsilon)}, \quad \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{D_B(a, \varepsilon)}{\log\log(1/\varepsilon)} = 1,$$

$$D_B(a, \varepsilon) \leqslant (1+o(1)) \log\log(1/\varepsilon),$$

причем для почти всех $a \in \mathbf{R}$ (в теоретико-вероятностном смысле) вместо неравенств справедливы соответствующие асимптотические равенства, а для любого иррационального алгебраического $a \in \mathbf{R}$

$$L_B(a, \varepsilon) \asymp \log\log(1/\varepsilon).$$

Здесь и далее через $L_B(a, \varepsilon)$ и $D_B(a, \varepsilon)$ обозначаем сложность и глубину наилучших схем в базисе B, вычисляющих число a с точностью ε, а через $\tilde{L}_B(a, \varepsilon)$ — сложность ε-приближенной реализации числа a формулами (т. е. схемами без ветвлений). Для краткости обозначаем k-кратную итерацию двоичного логарифма через $\log^{(k)}$, множество всех рациональных функций любого числа переменных с рациональными коэффициентами — через $\mathfrak{R}$, множество всех полиномов, принадлежащих $\mathfrak{R}$,— через $\mathcal{P}$, множество натуральных чисел — через $\mathbf{N}$, кольцо целых чисел — через $\mathbf{Z}$, поле рациональных чисел — через $\mathbf{Q}$, кольцо m-ичных рациональных чисел — через $\mathbf{Q}_m$, поле действительных алгебраических чисел — через A, степень числа $a \in A$ — через $\deg a$. Как и в [1—7], положим $\rho_B = 1/(m-1)$, а $\tau_B = 1/\log m$, где m — наибольшее число существенных переменных у функций из B. Индексы у констант и символов O будут означать зависимость их от соответствующих параметров.

Назовем *высотой полинома* $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$ число $h(p)$, равное сумме модулей его коэффициентов, *высотой рациональной функции* $r(x) \in \mathfrak{R}$ — число

$$h(r) = \min\{\max(h(p), h(q)) \mid p/q = r, \ p, q \in \mathbf{Z}[x]\},$$

высотой базиса $B \subset \mathfrak{R}$ — число

$$h(B) = \max\{h(r) \mid r \in B\}.$$

Тогда сформулированные в [8] результаты можно уточнить и дополнить следующим образом (когда писалась работа [1], автор о работе [8] не знал).

Теорема 1. 1) *Для любого конечного базиса B и почти всех $a \in \mathbf{R}$*

$$L_B(a, \varepsilon) \geqslant \rho_B \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)}\left(1 + \frac{\log^{(3)}(1/\varepsilon) - O(1)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)}\right),$$

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) \leqslant c_B \log(1/\varepsilon) - c_a, \quad D_B(a, \varepsilon) \geqslant \tau_B \log^{(2)}(1/\varepsilon) - c_{B,a}.$$

Пусть $B \subset \mathfrak{R}$ и любая переменная входит в числитель и знаменатель любой функции из B только в первой степени. Тогда:

2) *для почти всех $a \in \mathbf{R}$ и любого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_a$*

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) \geqslant (\log_{h(B)}(1/\varepsilon) - 2\log^{(2)}_{h(B)}(1/\varepsilon))/2;$$

3) *для любого плохо приближаемого числа a (т. е. такого, что для любых $p, q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ верно, что $|a - p/q| > c_a q^{-2}$), в частности, для любой квадратичной иррациональности справедливо неравенство*

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\log_{h(B)}(1/\varepsilon) - c_a.$$

4) *Для любого нелиувиллевского числа a (т. е. такого, что для любых $p, q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ верно, что $|a - p/q| > c_a q^{-d_a}$), в частности, для любого $a \in A \setminus \mathbf{0}$, а также e и π*

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) \geqslant c_a \log_{h(B)}(1/\varepsilon),$$

а для любого $a \in A \setminus \mathbf{0}$

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) \geqslant (1/2 - o(1))\log_{h(B)}(1/\varepsilon).$$

5) *Для любого $m \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 2$, $B = \{x \pm y, \ xy, \ \mp 1/m\}$ и любого $a \in \mathbf{R}$*

при $\varepsilon \to \infty$

$$L_B(a,\ \varepsilon) \leqslant \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)}\left(1+\frac{3\log^{(3)}(1/\varepsilon)+O_a(1)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)}\right),$$
$$\tilde{L}_B(a,\ \varepsilon) \leqslant O(\log(1/\varepsilon))+O_a(1),$$
$$D_B(a,\ \varepsilon) \leqslant \log^{(2)}(1/\varepsilon)+O(\log^{(2)}(1/\varepsilon))^{1/2}+O_a(1),$$

а для любого $a \in A$ *и* $\varepsilon \leqslant 1/4$

$$L_B(a,\ \varepsilon) \leqslant 7\deg a \log^{(2)}(1/\varepsilon)+c_{a,\ m}.$$

Доказательство. Утверждение 1) доказывается с помощью леммы Бореля — Кантелли и оценок О. Б. Лупанова [9—10]

$$N \leqslant (c_B L)^{L/\rho_B+1}, \qquad N \leqslant c_B^L \tag{1}$$

для числа N схем и формул сложности не больше L в базисе B. Оценка для $D_B(a,\ \varepsilon)$ следует из оценки для $\tilde{L}_B(a,\ \varepsilon)$ и неравенства

$$D_B(\Phi) \geqslant \tau_B \log \tilde{L}_B(\Phi) \tag{2}$$

(см. [11]).

Для доказательства 2) — 4) потребуются три леммы.

Лемма 1. *Для любого числа* $a \in \mathbf{Q}$ *справедливо неравенство*

$$h(a) \leqslant h(B)^{\tilde{L}_B(a)}.$$

Доказательство. Докажем неравенство индукцией по $\tilde{L}_B(a)$. База индукции очевидна. Шаг индукции. Согласно предположению индукции для любого числа $a \in \mathbf{Q}$

$$\tilde{L}_B(a) \leqslant l-1 \Rightarrow h(a) \leqslant h(B)^{\tilde{L}_B(a)}.$$

Пусть $a=m/n$, $m,\ n \in \mathbf{Z}\diagdown\{0\}$, $\tilde{L}_B(m/n)=l$. Тогда $m/n=g(a_1,\ \ldots,\ a_k)$, где

$$g(x_1,\ \ldots,\ x_k)=\frac{\sum\limits_{\beta} c_\beta x_1^{\beta_1}\ldots x_k^{\beta_k}}{\sum\limits_{\beta} b_\beta x_1^{\beta_1}\ldots x_k^{\beta_k}} \in B, \quad \beta=(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_k) \in \{0,\ 1\}^k,$$

$$a_1,\ \ldots,\ a_k \in \mathbf{Q},\ 1+\sum_{j=1}^{k} \tilde{L}_B(a_j)=l.$$

Значит, $h(g) \leqslant h(B)$, и согласно предположению индукции

$$a_i=m_i/n_i,\ m_i,\ n_i \in \mathbf{Z};\ \max\{|m_i|,\ |n_i|\} \leqslant h(B)^{\tilde{L}_B(a_i)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Но тогда

$$\frac{m}{n}=\frac{\sum\limits_{\beta} c_\beta \prod\limits_{i=1}^{k}(\beta_i m_i+(1-\beta_i)n_i)}{\sum\limits_{\beta} b_\beta \prod\limits_{i=1}^{k}(\beta_i m_i+(1-\beta_i)n_i)},$$

откуда

$$\max\{|m|,\ |n|\} \leqslant d(h)\prod_{i=1}^{n}\max\{|m_i|,\ |n_i|\} \leqslant h(B)^{1+\sum\limits_{i=1}^{k}\tilde{L}_B(a_i)} \leqslant h(B)^{\tilde{L}_B(a)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* φ: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ — *монотонно убывающая функция,* ψ — *обратная к ней функция и* $a \in \mathbf{R}$ — *такое число, что для любого числа* $q \in \mathbf{Q}$ *выполнено неравенство* $|a-q| \geqslant \varphi(h(q))$. *Тогда справедливо нера-*

венство

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) \geqslant \log_{h(B)} \psi(\varepsilon).$$

Доказательство. Пусть $q \in \mathbf{Q}$ таково, что

$$|a-q| \leqslant \varepsilon, \quad L_B(q) = \tilde{L}_B(a, \varepsilon).$$

Согласно условию леммы $\varphi(h(q)) \leqslant \varepsilon$, значит, $h(q) \geqslant \psi(\varepsilon)$. Из леммы 1 тогда следует, что

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) = \tilde{L}_B(q) \geqslant \log_{h(B)} h(q) \geqslant \log_{h(B)} \psi(\varepsilon).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Мощность множества всех чисел* $q \in \mathbf{Q}$ *таких, что* $\tilde{L}_B(q) \leqslant L$, *не превосходит* $2h(B)^{2L}+1$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что любое число $q \in \mathbf{Q}$ такое, что

$$\tilde{L}_B(q) \leqslant L,$$

представляется в виде m/n, где

$$m, n \in \mathbf{Z}, \; \max\{|m|, |n|\} \leqslant h(B)^{L_B(m/n)}.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь 2)—4). Пункт 2) следует из леммы 2 и того известного факта, что для почти всех $a \in \mathbf{R}$ в качестве $\varphi(x)$ при $x \geqslant x_a$ можно взять $x^{-2}\log^{-2} x$ (см. [12, теорема 32]), а значит, в качестве $\psi(\varepsilon)$ можно взять

$$\frac{\varepsilon^{-1/2}}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Аналогично доказывается 3)—4), если учесть, что для любого плохо приближаемого числа a в качестве $\varphi(x)$ можно взять $c_a x^{-d_a}$, причем для иррационального алгебраического a в качестве d_a можно взять любое число, большее 2 (согласно теореме К. Рота).

Докажем 5). Все оценки здесь являются некоторыми уточнениями соответствующих оценок Штрассена [8]. Для любого $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$n =]\log_m(1/\varepsilon)[, \quad k = -]\log_m|a|[+1$$

и выберем $\sigma = \pm 1$ и $\beta_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $k \leqslant i \leqslant n$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| a - \sigma \sum_{i=k}^{n} \beta_i m^{-i} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для получения оценок $L_B(a, \varepsilon)$, $\tilde{L}_B(a, \varepsilon)$, $D_B(a, \varepsilon)$ достаточно оценить $L_B(b)$, $\tilde{L}_B(b)$, $D_B(b)$, где

$$b = \sigma \sum_{i=k}^{n} \beta_i m^{-i},$$

с помощью одномерного варианта теоремы из [13]. В случае $m=2$ оценки для $L_B(b)$ и $\tilde{L}_B(b)$ подробно изложены в [2], а оценки для $L_B(b)$ и $D_B(b)$ — в [8] (в несколько менее точном виде).

Оценим $L_B(a, \varepsilon)$ для $a \in A$ (в случае $B = \{x+y, x-y, xy, x/y\}$ эта оценка имеется в [8]). Сначала с помощью ньютоновых итераций проверим, что для $a \in \mathbf{Q}$

$$L_B(a, \varepsilon) \leqslant 3\log^{(2)}(1/\varepsilon) + c_{a, m}.$$

Действительно, можно считать, что $a=1/q$, $q\in\mathbf{N}$, и рассмотреть последовательность

$$x_1=m^{-k}<1/q\leqslant m^{-k+1},\qquad x_{n+1}=x_n(2-x_nq),\qquad n\in\mathbf{N}.$$

Так как

$$\delta_{n+1}=1/q-x_{n+1}=\delta_n^2q,\qquad n\in\mathbf{N},$$

то при $n=\log^{(2)}(1/\varepsilon)+c_{q,m}$

$$\delta_n=(\delta_1 q)^{2^n-1}\delta_1\leqslant\frac{1}{q}\left(\left(\frac{1}{q}-x_1\right)q\right)^{2^n-1}\leqslant\varepsilon,$$

значит,

$$L_B(1/q,\varepsilon)\leqslant L_B(x_n)\leqslant 3+L_B(x_{n-1})\leqslant 3n+c_{q,m}\leqslant 3\log^{(2)}(1/\varepsilon)+c_{a,m}.$$

Пусть теперь a — корень уравнения

$$p(x)=0,\quad \deg p(x)=\deg a,\quad p(x)\in\mathbf{Z}[x].$$

Тогда $p'(a)\neq 0$ и согласно свойствам поля $\mathbf{Q}(a)$ найдется полином $q(x)\in\in\mathbf{Q}[x]$ такой, что

$$\deg q(x)\leqslant\deg a-1,\qquad q(a)=1/p(a).$$

Рассмотрим последовательность ньютоновских итераций $r_{n+1}=r_n-p(r_n)q(r_n)$, где r_1 выберем позднее. Так как полином $f(x)=x-p(x)q(x)$ удовлетворяет равенствам $f(a)=a$, $f'(a)=0$, то при $|r_n-a|\leqslant O(1)$

$$|r_{n+1}-a|=|f(r_n)-f(a)|=O(r_n-a)^2.$$

Выберем окрестность $U(a)$ такую, что

$$f\colon U(a)\to U(a).$$

Для любого числа $\delta>0$, заменяя коэффициенты полинома $q(x)$ на числа из $\mathbf{Q}_m$ с точностью $O(\delta)$, можно получить полином $f_\delta(x)\in\mathbf{Q}_m[x]$ такой, что $f_\delta(x)=x-p(x)q_\delta(x)$ и $\|f-f_\delta\|_{C(U(a))}\leqslant\delta$. Можно считать также, что $f_\delta\colon U(a)\to U(a)$, если $\delta\leqslant\delta_a$ и $U(a)$ выбраны соответствующим образом. Рассмотрим последовательность

$$r_{n+1}^\delta=f_\delta(r_n^\delta),\quad r_1^\delta=r_1.$$

Так как

$$|r_{n+1}^\delta-r_{n+1}|=|f_\delta(r_n^\delta)-f(r_n)|\leqslant|f_\delta(r_n^\delta)-f(r_n^\delta)|+|f(r_n^\delta)-f(r_n)|\leqslant$$
$$\leqslant\delta+|f(r_n^\delta)-f(a)|+|f(r_n)-f(a)|\leqslant\delta+O((r_n-a)^2+(r_n^\delta-a)^2),$$

то, обозначив через δ_n число

$$\max\{|r_n-a|,\ |r_n^\delta-a|\},$$

получаем, что

$$\delta_1=|r_1-a|,\qquad \delta_{n+1}\leqslant O(\delta_n^2)+\delta.$$

Поэтому пока $\delta_n\geqslant\delta^{1/2}$, справедливо неравенство

$$\delta_n\leqslant O(\delta_{n-1}^2)\leqslant O(\delta_1)^{2^n-1}.$$

Поэтому при $n=\log^{(2)}(1/\delta)+O(1)$ и достаточно малом δ_1 справедливо неравенство $\delta_n\leqslant\delta^{1/2}$, т. е. при $n=\log^{(2)}(1/\varepsilon)+O(1)$

$$|r_n^{\varepsilon^2}-a|\leqslant\varepsilon.$$

Вычислим заранее все коэффициенты полиномов $p(x)$ и $q_{\varepsilon^2}(x)$, для чего требуется

$$3\deg a\log^{(2)}(1/\varepsilon)+c_{a,m}$$

операций. Тогда

$$L_B(a, \varepsilon) \leqslant L_B(r_n) \leqslant 4\deg a + L_B(r_{n-1}) \leqslant$$
$$\leqslant 4 \deg a \log^{(2)}(1/\varepsilon) + 3 \deg a \log^{(2)}(1/\varepsilon) + c_{a, m}.$$

Теорема доказана.

Пункт 5) показывает, что оценки 1)—4), вообще говоря, близки к точным, и обратно, 1)—4) показывают, что первая и третья оценки 5) для почти всех $a \in \mathbf{R}$ асимптотически точные, а вторая и четвертая оценки 5) точные по порядку. Аналогично 2)—4) с помощью неравенств (1), (2) получаются оценки для $L_B(a, \varepsilon)$ и $D_B(a, \varepsilon)$. Оценка 2) несколько уточняет соответствующую оценку 1), а оценка 3) — оценку 2). Соответствующие оценки 4) менее точные, но справедливы для более широкого класса чисел. В сочетании с 5) они позволяют по порядку точно оценить $\tilde{L}_B(a, \varepsilon)$ и асимптотически точно оценить $D_B(a, \varepsilon)$ для любого нелиувиллевского числа a и $B = \{x \pm y, xy, \mp 1/m\}$, а для любого $a \in A \setminus \mathbf{Q}$ — так же по порядку точно оценить $L_B(a, \varepsilon)$.

С другой точки зрения вопрос о сложности вычисления алгебраических чисел рассматривался в [14, 15].

Теорема 2. 1) *Пусть B — произвольный конечный базис, состоящий из линейных функций с алгебраическими коэффициентами. Тогда для почти всех $a \in \mathbf{R}$ и любых $\varepsilon \leqslant \varepsilon_a$*

$$D_B(a, \varepsilon) \geqslant c_B \log(1/\varepsilon).$$

2) *Если B состоит из линейных функций с рациональными коэффициентами и $H(B) = \text{НОК}\,\{H(f)\colon f \in B\}$, где $H(f)$ — наименьший общий знаменатель всех коэффициентов функции f, то для почти всех $a \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство*

$$D_B(a, \varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}(\log_{H(B)}(1/\varepsilon))\left(1 - \frac{c_a \log^{(2)}(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}\right); \qquad (\alpha)$$

для любого числа $a \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}_{H(B)}$ — неравенство

$$D_B(a, \varepsilon) \geqslant \log_{H(B)}(1/\varepsilon) - c_a; \qquad (\beta)$$

для любого плохо приближаемого числа $a \in \mathbf{R}$ — неравенство

$$D_B(a, \varepsilon) \geqslant \frac{1}{2} \log_{H(B)}(1/\varepsilon) - c_a; \qquad (\gamma)$$

для любого числа $a \in A \setminus \mathbf{Q}$ — неравенство

$$D_B(a, \varepsilon) \geqslant \left(\frac{1}{2} - o(1)\right) \log_{H(B)}(1/\varepsilon); \qquad (\delta)$$

для любого нелиувиллевского числа $a \in \mathbf{R}$ — неравенство

$$D_\beta(a, \varepsilon) \geqslant c_a \log_{H(B)}(1/\varepsilon). \qquad (\sigma)$$

3) *Пусть $B = \{(x+y)/2, x-y, 1\}$. Тогда для любого числа $a \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство*

$$D_B(a, \varepsilon) \leqslant L_B(a, \varepsilon) \leqslant D_B(a, \varepsilon) + O_a(1) \leqslant \log(1/\varepsilon) + O_a(1), \qquad (*)$$

для почти всех $a \in \mathbf{R}$ — неравенство

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(1/\varepsilon) - D_B(a, \varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)} = 1, \qquad (**)$$

для любого числа $a \notin \mathbf{Q}_2$ — неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} (\log(1/\varepsilon) - D_B(a, \varepsilon)) \leqslant 1. \qquad (***)$$

4) *Если же $B = \{1, x - y, x/2\}$, то для почти всех $a \in \mathbf{R}$ справедливо*

равенство (**) *и для любого числа* $a \in \mathbf{R}$ *справедливы неравенства*

$$D_B(a, \varepsilon) \leqslant \log(1/\varepsilon) + O_a(1), \tag{I}$$

$$L_B(a, \varepsilon) \leqslant \log(1/\varepsilon) + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)} + O\left(\frac{\log(1/\varepsilon)\log^{(3)}(1/\varepsilon)}{(\log^{(2)}(1/\varepsilon))^2}\right) + O_a(1) \tag{II}$$

и для почти всех $a \in \mathbf{R}$

$$L_B(a, \varepsilon) = \log(1/\varepsilon) + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)} + O\left(\frac{\log(1/\varepsilon)\log^{(3)}(1/\varepsilon)}{(\log^{(2)}(1/\varepsilon))^2}\right) + O_a(1). \tag{III}$$

Доказательство. Докажем 1). Каждый коэффициент β_i функции из B удовлетворяет некоторому равенству

$$\beta_i^{d_i} = \sum_{j=0}^{d_i-1} \beta_i^j p_{ji}/q_{ji}, \quad p_{ji},\ q_{ji} \in \mathbf{Z}.$$

Обозначим $\max\limits_{i,j} |p_{ji}/q_{ji}|$ через c_1, $\prod\limits_i d_i$ через c_2, НОК $\{q_{ji}\}$ через c_3 и наибольшее число существенных переменных у функций из B через c_4. Далее понадобятся леммы 4 и 5 и обозначение $\leqslant$ для частичного порядка на множестве $\mathbf{R}^m$:

$$(a_i) \leqslant (b_i) \Leftrightarrow \forall i\ a_i \leqslant b_i.$$

Лемма 4. *Любое число, вычисляемое схемой глубины не более D в базисе B, представляется в виде*

$$c_3^{-D} \sum_{k=(k_i) \leqslant (d_i-1)} n_k \prod_i \beta_i^{k_i},$$

где $n_k \in \mathbf{Z}$, $|n_k| \leqslant (c_3 c_4 (c_1+1))^D$.

Доказательство. Индукция по D. База ($D=0$) очевидна. Шаг индукции. Пусть

$$a = \sum_j \beta_{i_j} a_j,$$

где a_j вычисляются схемами глубины не больше $D-1$. Согласно предположению индукции каждое из них представимо в виде

$$c_3^{-D+1} \sum_{k=(k_i) \leqslant (d_i-1)} n_{k,j} \prod_i \beta_i^{k_i},$$

где $n_{k,j} \in \mathbf{Z}$, $|n_{k,j}| \leqslant (c_3 c_4 (c_1+1))^{D-1}$.

Заметим, что

$$\beta_{i_j} \prod_i \beta_i^{k_i}$$

представимо либо в виде

$$\prod_i \beta_i^{l_i},$$

где $(l_i) \leqslant (d_i - 1)$, либо в виде

$$\sum_{l=0}^{d_{i_j}-1} \beta_{i_j} \frac{p_{l,i_j}}{q_{l,i_j}} \prod_{i \neq i_j} \beta_i^{k_i},$$

а значит, в обоих случаях равно

$$c_3^{-1} \sum_{k'} m_{k,k'} \prod_i \beta_i^{k'_i},$$

где $|m_{k,k'}| \leqslant c_3 c_1$.

Поэтому

$$a=\sum_j \beta_{i_j} a_j = c_3^{-D+1} \sum_{i,j} n_{k,j} c_3^{-1} \sum_{k'} m_{k,k'} \prod_i \beta_i^{k'_i} = c_3^{-D} \sum_k n_k \prod_i \beta_i^{k_i},$$

где $|n_k| \leqslant \sum_{j,k''} |n_{k'',j}|\,|m_{k'',k}| \leqslant (c_3(c_1+1)c_4)^D$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Количество всех чисел, вычисляемых схемами глубины не больше D в базисе B, не превосходит c_B^D, где c_B — некоторая константа.*

Эта лемма немедленно следует из леммы 4, если в качестве c_B взять $(2(c_1+1)c_3c_4+1)^{c_2}$, где c_i — константы, зависящие от B, определенные перед леммой 4.

Пункт 1) теоремы 2 доказывается с помощью леммы 5 и леммы Бореля — Кантелли подобно п. 1) теоремы 1 (см. детали в [8]). Докажем п. 2). Неравенство (α) доказывается так же, как и 1), только вместо леммы 5 используется лемма 7, немедленно вытекающая из следующей леммы 6, которая, в свою очередь, легко доказывается по индукции подобно лемме 4.

Лемма 6. *Любое число, вычисляемое схемой глубины не более D в базисе B, имеет знаменателем некоторый делитель числа $H(B)^D$.*

Лемма 7. *Для любого $a \in \mathbf{R}$ в отрезке $[a, a+1]$ содержится не более $H(B)^D$ чисел, вычисляемых схемами глубины не больше D в базисе B.*

Для доказательства неравенства (β) понадобятся леммы 8 и 9.

Лемма 8. *Пусть*

$$|a-q| \leqslant \varepsilon, \quad q \in \mathbf{Q}_{H(B)}, \quad a \notin \mathbf{Q}_{H(B)},$$

$\mu_{a,H(B)}(\varepsilon)$ по определению равно

$$\max\{n \mid a_n > 0,\ a_{n+1} < H(B)-1,\ n+1 < \log_{H(B)}(1/\varepsilon)\},$$

где $\overline{a_{-k}\ldots a_{-1}a_0,\ a_1a_2\ldots}$ — разложение a в $H(B)$-ичную дробь, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_a$. Тогда в $H(B)$-ичных разложениях чисел a и q первые $\mu_{a,H(B)}(\varepsilon)$ знаков после запятой совпадают и число

$$H(B)^{\mu_{a,H(B)}(\varepsilon)-1}$$

не делится на $H(q)$.

Доказательство. Заметим, что при $n=\mu_{a,H(B)}(\varepsilon)$ справедливы неравенства

$$a-\overline{a_{-k}\ldots a_{-1}a_0,\ a_1\ldots a_{n-1}} \geqslant H(B)^{-n},$$

$$(\overline{a_{-k}\ldots a_{-1}a_0,\ a_1\ldots a_{n-1}}+H(B)^{-n+1})-a \geqslant H(B)^{-n-1}.$$

Так как $H(B)^{-n-1} > \varepsilon$, то из выписанных неравенств следует первое утверждение леммы. Второе утверждение следует из первого и неравенства $a_n > 0$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если $a \in \mathbf{Q}_{H(B)}$ и $H(B)^{l-1}$ не делится на $H(a)$, то $D_B(a) \geqslant l$.*

Эта лемма следует из леммы 6.

Докажем теперь неравенство (β). Пусть $a \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}_{H(B)}$. Так как a имеет периодическое $H(B)$-ичное разложение, то

$$\mu_{a,H(B)}(\varepsilon) = \log_{H(B)}(1/\varepsilon) - O_a(1).$$

Неравенство (β) следует теперь из лемм 8, 9.

Неравенства (γ), (δ), (σ) доказываются аналогично соответствующим утверждениям 3) и 4) теоремы 1, только вместо леммы 1 надо использовать лемму 6.

Докажем 3). Сначала установим три леммы.

Лемма 10. *Для любого* $a \in \mathbf{Q}_2$ *и* $B = \{(x+y)/2,\ x-y,\ 1\}$ *или* $B = \{x/2,\ x-y,\ 1\}$ *справедливы неравенства*

$$\log H(a) \leqslant D_B(a) \leqslant \log H(a) + |a| + O(1),$$

а для первого из базисов — также неравенство

$$L_B(a) \leqslant \log H(a) + |a| + O(1).$$

Доказательство. Можно считать, что $0 < a < 1$. Тогда

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 2^{-i}, \qquad n = \log H(a), \qquad \alpha_i \in \{0, 1\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Если $B = \{(x+y)/2,\ x-y,\ 1\}$, то a реализуется следующей схемой сложности $n+2$:

$$a = (\ldots (\alpha_n/2 + \alpha_{n-1})/2 + \ldots + \alpha_1)/2, \quad \alpha_i = 1 \quad \text{или} \quad \alpha_i = 1 - 1 = 0.$$

Если же $B = \{x/2,\ x-y,\ 1\}$, число a реализуется следующей схемой глубины $n+2$: $a = (1-1) - (\ldots((1-1) - \alpha_1 2^{-1}) - \alpha_2 2^{-2}) - \ldots) - \alpha_n 2^{-n})$. Нижняя оценка следует из леммы 9. Лемма доказана.

Обозначим для любого $a = \overline{a_{-k} \ldots a_{-1} a_0,\ a_1 a_2 \ldots} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, заданного своим двоичным разложением и $\varepsilon \leqslant \varepsilon_a$, через $\gamma_a(\varepsilon)$ число

$$\max\{n \mid a_n + a_{n+1} = 1,\ n+1 < \log(1/\varepsilon)\}.$$

Лемма 11. *Для любого числа* $a \in \mathbf{R}$

$$D_B(a, \varepsilon) \geqslant \gamma_a(\varepsilon),$$

и если $|b-a| \leqslant \varepsilon$, *то у* b *и* a *первые* $\gamma_a(\varepsilon) - 1$ *знаков после запятой в двоичных разложениях совпадают.*

Доказательство. Пусть $b = 2^{-m} p$ (где p—нечетно, $m \in \mathbf{N}$) таково, что

$$|b-a| \leqslant \varepsilon, \quad D_B(b) = D_B(a, \varepsilon).$$

Из леммы 9 следует, что $D_B(b) \geqslant m$. Проверим, что $m \geqslant \gamma_a(\varepsilon)$. Допустим, что $m < \gamma_a(\varepsilon)$, и обозначим $\gamma_a(\varepsilon)$ через n. Возможны два случая:

$$b \geqslant \overline{a_{-k} \ldots a_{-1} a_0,\ a_1 \ldots a_{n-1}} + 2^{-n+1} \quad \text{или} \quad b \leqslant \overline{a_{-k} \ldots a_{-1} a_0,\ a_1 \ldots a_{n-1}}.$$

Так как

$$a = \overline{a_{-k} \ldots a_{-1} a_0,\ a_1 \ldots a_{n-1} 10 \ldots} \quad \text{или} \quad \overline{a_{-k} \ldots a_{-1} a_0,\ a_1 \ldots a_{n-1} 01 \ldots},$$

то в обоих случаях получаем противоречие: $|b-a| \geqslant 2^{-n-1} > \varepsilon$. Аналогично доказывается и второе утверждение леммы.

Лемма 12. *Для почти всех* $a \in \mathbf{R}$

$$\log \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_a(\varepsilon) \leqslant (1 + o(1)) \log^{(2)}(1/\varepsilon).$$

Доказательство. Согласно [16, гл. 8, § 7, задача 5] для любых $\delta > 0$, $n > n_\delta$ и для почти всех

$$a = \overline{a_{-k} \ldots a_{-1} a_0,\ a_1 \ldots} \in \mathbf{R}$$

среди чисел

$$a_{[n-(1+\delta)\log n]}, \ \ldots, \ a_n$$

имеются как нули, так и единицы. Значит, при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_\delta$ на отрезке

$$[[\log(1/\varepsilon) - (1+\delta) \log^{(2)}(1/\varepsilon)],\ [\log(1/\varepsilon)] - 1]$$

найдется такое n, что $a_n + a_{n+1} = 1$, $n+1 < \log(1/\varepsilon)$, откуда

$$\gamma_a(\varepsilon) \geqslant n \geqslant \log(1/\varepsilon) - (1+\delta) \log^{(2)}(1/\varepsilon) - 1.$$

Так как δ произвольно, то

$$\log(1/\varepsilon)-\gamma_a(\varepsilon)\leqslant(1+\delta)\log^{(2)}(1/\varepsilon).$$

Лемма доказана.

Докажем теперь 3) и неравенство (I) п. 4). Для любого числа $a\in\mathbf{R}$ выберем $b\in\mathbf{Q}_2$ с наименьшим знаменателем такое, что $|a-b|\leqslant\varepsilon$, и, применив лемму 10, получаем, что

$$D_B(a,\ \varepsilon)\leqslant D_B(b)\leqslant\log(1/\varepsilon)+O_a(1),$$

а выбрав b такое, что

$$D_B(b)=D_B(a,\ \varepsilon),$$

для $B=\{(x+y)/2,\ x-y,\ 1\}$ получаем, что

$$D_B(a,\varepsilon)\leqslant L_B(a,\varepsilon)\leqslant L_B(b)\leqslant D_B(b)+O_a(1)=$$
$$=D_B(a,\ \varepsilon)+O_a(1)\leqslant\log(1/\varepsilon)+O_a(1).$$

Из лемм 11, 12 следует, что для почти всех $a\in\mathbf{R}$

$$\log(1/\varepsilon)-D_B(a,\ \varepsilon)\leqslant(1+o(1))\log^{(2)}(1/\varepsilon).$$

Пусть $a\notin\mathbf{Q}_2$, δ — сколь угодно малое положительное число. Выбрав последовательность n_i такую, что

$$a_{n_i}+a_{n_i+1}=1,$$

получаем, что при $\varepsilon_i=2^{-n_i-1-\delta}$

$$\gamma_a(\varepsilon_i)\geqslant\log(1/\varepsilon_i)-1-\delta,$$

откуда с помощью леммы 11 выводим, что при $a\in\mathbf{Q}_2$

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\log(1/\varepsilon)-D_B(a,\ \varepsilon)\leqslant1.$$

Докажем теперь, что для почти всех $a\in\mathbf{R}$

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{\log(1/\varepsilon)-D_B(a,\ \varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)}=1.$$

Достаточно выбрать последовательность $\varepsilon_i\to0$ такую, что

$$\frac{\log(1/\varepsilon_i)-L_B(a,\ \varepsilon_i)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon_i)}\geqslant1-o(1).$$

Из [16, гл. 8, § 7, задача 5] следует, что для почти всех $a\in\mathbf{R}$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{N_n}{\log n}=1,$$

где N_n — такое наибольшее число, что $a_n=\ldots=a_{n+N_n}=0$ (если $a_{n+1}=1$, то по определению $N_n=0$). Поэтому можно выбрать такую последовательность $\{n_i\}$, что

$$a_{n_i+1}=\ldots=a_{[n_i+(1-1/i)\log n_i]}=0.$$

Положив

$$b=\overline{a_{-k}\ldots a_{-1}a_0,\ a_1\ldots a_{n_i}}\quad\text{и}\quad\varepsilon_i=2^{-[n_i+(1-1/i)\log n_i]},$$

получаем с помощью леммы 10, что $|a-b|\leqslant\varepsilon_i$ и

$$L_B(a,\ \varepsilon_i)\leqslant L_B(b)\leqslant n_i+O_a(1)\leqslant\log(1/\varepsilon_i)-\frac{i-1}{i}\log^{(2)}(1/\varepsilon_i)+O_a(1),$$

значит,

$$\frac{\log(1/\varepsilon_i)-L_B(a,\ \varepsilon_i)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon_i)}\geqslant1-o(1).$$

Докажем теперь неравенство (II) п. 4). Для этого достаточно проверить, что для любого p, $0<p<2^n$, $p\in \mathbf{N}$, верна оценка

$$L_B(2^{-n}p)\leqslant n+(n/\log n)+O(n(\log^{(2)}n)(\log n)^{-2}).$$

Это можно сделать, применив конструкцию, аналогичную указанной А. Брауэром в [17] (см. также [18, с. 494—495]). Представим $p2^{-n}$ в виде

$$\sum_{j=0}^{]n/k[} b_j 2^{-jk},\quad \text{где } b_j=p_j 2^{-k},\quad 0\leqslant p_j<2^k,\quad 0\leqslant j\leqslant\,]n/k[.$$

Ясно, что

$$L_B\{b_j\colon\ 0\leqslant j\leqslant\,]n/k[\}\leqslant 2^k+k+1,$$

так как для вычисления 2^{-k} и -2^{-k} достаточно $k+3$ операций, а каждое число $p2^{-k}$ можно получить как разность $(p-1)2^{-k}-(-2^{-k})$. Применяя схему Горнера, получаем, что

$$L_B\left(\sum_{j=0}^{]n/k[} b_j 2^{-jk}\right)\leqslant 2^k+k+1+\,]n/k[\,+k\,]n/k[\,\leqslant n(1+1/k)+O(2^k).$$

Выбрав $k=[\log n-2\log^{(2)}n]$, получаем отсюда нужную оценку. Осталось доказать, что для почти всех $a\in\mathbf{R}$ и $\varepsilon\leqslant\varepsilon_a$

$$L_B(a,\ \varepsilon)\geqslant\log(1/\varepsilon)+\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)}-O\left(\frac{\log(1/\varepsilon)\log^{(3)}(1/\varepsilon)}{(\log^{(2)}(1/\varepsilon))^2}\right).$$

Пусть S — произвольная схема в базисе B, т. е. последовательность $1,\ f_1,\ \ldots,\ f_L$ такая, что каждое число f_i либо половина f_{i-1}, либо разность каких-то двух предыдущих чисел f_j и f_k. Сопоставим индексу i упорядоченную пару $(i-1,\ i-1)$ либо $(j,\ k)$. На множестве всех таких пар определим полный линейный порядок следующим образом:

$$(j,\ k)>(j_1,\ k_1)\Leftrightarrow\max(j,\ k)>\max(j_1,\ k_1)\vee(\max(j,\ k)=$$
$$=\max(j_1,\ k_1)\,\&\,\min(j,\ k)>\min(j_1,\ k_1)\vee((j,\ k)=(j_1,\ k_1)\,\&\,j>k).$$

Сопоставим каждой схеме соответствующую последовательность упорядоченных пар. Схему назовем *правильной*, если эта последовательность монотонная.

Лемма 13. *Любую схему в базисе B можно преобразовать в эквивалентную правильную схему той же сложности.*

Доказательство проводится индукцией по сложности схемы. База ($L=1$) очевидна. Шаг индукции. Рассмотрим схему $1,\ f_1,\ \ldots,\ f_{L-1}$. Согласно предположению индукции существует перестановка π такая, что $1,\ f_{\pi(1)},\ \ldots$ $\ldots,\ f_{\pi(L-1)}$ является правильной схемой. Остается вставить f_L в нужное место так, чтобы получилась правильная схема.

Лемма доказана.

Лемма 14. *Количество различных чисел из отрезка* $[a,\ a+1]$, *вычисляемых схемами сложности не выше L в базисе B, меньше*

$$O\left(2^{L-(L/\log L)+3L(\log^{(2)}L)(\log L)^{-2}}\right).$$

Доказательство. Индукцией по n легко показать, что схема, содержащая не более n элементов $x/2$, вычисляет рациональную дробь со знаменателем 2^n. Значит, все такие схемы вычисляют не более 2^n+1 чисел из отрезка $[a,\ a+1]$. Положим

$$n=[L-(L/\log L)+3(\log^{(2)}L)(\log L)^{-2}]$$

и оценим сверху количество всех минимальных правильных схем сложности не выше L, содержащих более n элементов $x/2$. Последовательность пар, сопоставленную ранее схеме, назовем кодом. По коду однозначно восстанавливается схема, а сам код однозначно восстанавливается, если указать его длину $l \leqslant L$, число дуплетов в нем, множество всех дуплетов, и множество остальных $l-k$ элементов.

Значит, искомая верхняя оценка имеет вид

$$\sum_{l=n+1}^{L} \sum_{k=n+1}^{l} \binom{L}{k}\binom{L^2}{l-k} < L^2 \binom{L}{L-n}\binom{L^2}{L-n} < L^2 \left(\frac{eL}{L-n}\right)^{L-n} \left(\frac{eL^2}{L-n}\right)^{L-n} = $$

$$= L^2 \left(\frac{e^2L^3}{(L-n)^2}\right)^{L-n}.$$

Учитывая, что

$$L-n = \frac{L(1-(3-o(1))\log^{(2)} L)}{\log L},$$

получаем оценку

$$L^2 (O(L(\log L)^2))^{L-n} < L^2 2^{(L-n)(\log L + 2\log^{(2)} L + O(1))} <$$

$$< L^2 2^{L(1-(1-o(1))\log^{(2)} L/\log L)} = o(2^n).$$

В итоге получаем, что количество чисел из отрезка $[a, a+1]$, вычисляемых схемами сложности не выше L в базисе B, меньше

$$(1+o(1))\, 2^n = O(2^{L-(L/\log L)+3L(\log^{(2)} L)(\log L)^{-2}}).$$

Лемма доказана.

Аналогично доказательству 1), используя вместо леммы 5 лемму 14, получаем, что для почти всех $a \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon < \varepsilon_a$

$$L_B(a, \varepsilon) \geqslant \log(1/\varepsilon) + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)} - 4\left(\frac{\log(1/\varepsilon)\log^{(3)}(1/\varepsilon)}{(\log^{(2)}(1/\varepsilon))^2}\right).$$

Теорема доказана.

Оценки 2) уточняют оценку (1) для более узкого класса базисов и различных классов чисел. В сравнении с оценками 1) теоремы 1 они более высокие. Оценки 3) и 4) показывают, что оценка (β), вообще говоря, с точностью до константы неулучшаема, оценка (α) асимптотически неулучшаема, а оценки (γ), (δ), (σ) неулучшаемы по порядку. Соотношения п. 3) показывают, что для $B = \{(x+y)/2,\ x-y,\ 1\}$. и почти всех $a \in \mathbf{R}$ функции $L_B(a, \varepsilon)$ и $D_B(a, \varepsilon)$ имеют асимптотику $\log(1/\varepsilon)$, но не имеют при этом асимптотики остаточного члена, а соотношения 4) — что для базиса $B = \{1,\ x-y,\ x/2\}$ и почти всех $a \in \mathbf{R}$ функция $L_B(a, \varepsilon)$ имеет ту же асимптотику и имеет также асимптотику остаточного члена.

Для монотонного базиса $B = \{x/2,\ x+y,\ 1\}$ удается более точно оценить функцию $\tilde{L}_B(a, \varepsilon)$.

Теорема 3. *Для любых $a > 0$ справедливы все утверждения* 4) *теоремы* 2, *а также следующие соотношения: при* $\varepsilon \to 0$

$$3\log(1/\varepsilon) - \tilde{L}_B(a, \varepsilon) \to \infty, \tag{i}$$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} (3\log(1/\varepsilon) - \tilde{L}_B(a, \varepsilon))(\log(1/\varepsilon))^{-1/2} \geqslant 3. \tag{ii}$$

Для некоторых $a > 0$

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) = (3-o(1))\log(1/\varepsilon). \tag{iii}$$

Для любой $\varphi(\varepsilon) \to \infty$ найдется $a > 0$ такое, что

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} (3\log(1/\varepsilon) - \tilde{L}_B(a, \varepsilon))/\varphi(\varepsilon) = 0. \tag{iv}$$

Для почти всех $a > 0$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\pm 2\log(1/\varepsilon) - (2\log(1/\varepsilon)\log^{(3)}(1/\varepsilon)^{1/2}) \mp \tilde{L}(a, \varepsilon))}{2^{-3/2}3(\log(1/\varepsilon))^{1/2}(\log^{(4)}(1/\varepsilon))(\log^{(3)}(1/\varepsilon))^{-1/2}} = 1. \qquad (\mathrm{v})$$

В частности, $\tilde{L}_B(a, \varepsilon) = (2 + o(1))\log(1/\varepsilon)$.

Доказательство. Для его проведения понадобится

Лемма 15. *Пусть* $a \in \mathbf{Q}_2$, $a > 0$, $s(a) = \log h(a)$, $S(a)$ — *сумма всех цифр двоичной дроби, представляющей* a. *Тогда*

$$s(a) + 2S(a) - 1 \leqslant \tilde{L}_B(a) \leqslant 2a + s(a) + 2S(a).$$

Доказательство. Пусть

$$a = \overline{a_{-k(a)} \ldots a_{-1}, a_0, a_1 \ldots a_{S(a)}};$$

тогда

$$S(a) = \sum_{i=-k(a)}^{s(a)} a_i.$$

Вычисляя сначала $\overline{a_{-k(a)} \ldots a_{-1}a_0}$ формулой сложности не выше $\max\{2[a] - 1, 0\}$, а потом $\overline{a_0, a_1 \ldots a_{S(a)}}$ по схеме Горнера, получаем, что

$$\tilde{L}_B(a) < \max\{2[a], 1\} + s(a) + 2S(a) - 1.$$

Для доказательства нижней оценки сначала докажем, что если формула в базисе B содержит s элементов $x/2$, S остальных элементов и вычисляет число a, то

$$s(a) \leqslant S, \qquad S(a) \leqslant (S+1)/2.$$

Доказательство проводится индукцией по $S + s$. База ($S = 1$ или $s = 0$) очевидна. Шаг индукции. Пусть $\Phi = \Phi_1/2$. По предположению индукции

$$s(2a) \leqslant s - 1, \qquad S(2a) \leqslant (S+1)/2.$$

Но

$$s(2a) = s(a) - 1, \qquad S(2a) = S(a),$$

значит,

$$s(a) \leqslant s, \qquad S(a) \leqslant (S+1)/2.$$

Если же $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, то по предположению индукции

$$s(a_i) \leqslant s_i, \qquad S(a_i) \leqslant (S_i + 1)/2,$$

где a_i — константа, вычисляемая формулой Φ_i, s_i — число элементов $x/2$ в Φ_i, S_i — число остальных ее элементов. Ясно, что

$$s(a) = s(a_1 + a_2) = \max\{s(a_i)\} \leqslant s(a_1) + s(a_2) \leqslant s_1 + s_2 = s.$$

Так как для любого k

$$S(a + 2^{-k}) \leqslant S(a) + 1,$$

то

$$S(a_1 + a_2) \leqslant S(a_1) + S(a_2),$$

значит,

$$S(a) \leqslant S(a_1) + S(a_2) \leqslant (S_1 + S_2 + 2)/2 = (S+1)/2,$$

тем самым обе оценки доказаны. Из них следует, что если Φ — минимальная формула для a, то

$$\tilde{L}_B(a) = \tilde{L}_B(\Phi) = s + S \geqslant s(a) + 2S(a) - 1.$$

Лемма доказана.

Для любого числа

$$a=\overline{a_{-k}\,\ldots\,a_{-1}a_0,\ a_1\,\ldots} \in \mathbf{R}_+\setminus\mathbf{Q}_2$$

положим

$$f_a(n)=\sum_{i=1}^{n} a_i \ \text{ и } \ h_a(n)=\max\{m\leqslant n\colon\ a_m=1\}.$$

Ясно, что

$$f_a(n)=f_a(h_a(n)),\qquad |f_a(n)-f_a(m)|\leqslant|n-m|,\qquad h_a(n)\leqslant n.$$

Из [16, гл. 8, § 7, задачи 5, 9] следует, что для почти всех $a\in\mathbf{R}_+$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n-h_a(n)}{\log n}=1,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\pm f_a(n)\mp n/2}{\sqrt{n}/2}-\sqrt{2\log^{(2)}n}\right)\frac{\sqrt{2\log^{(2)}n}}{\log^{(3)}n}=\frac{3}{2}$$

(закон повторного логарифма).

Пусть $2^{-n}\leqslant\varepsilon\leqslant 2^{-n+1}$. Тогда из леммы 15 следует, что

$$\tilde{L}_B(a,\ \varepsilon)\leqslant\tilde{L}_B(\overline{a_{-k(a)}\,\ldots\,a_{-1}a_0,\ a_1\,\ldots\,a_n})\leqslant 2a+n+2k(a)+2+2f_a(n)\leqslant$$
$$\leqslant O(a)+n+2f_a(n)\leqslant O(a)+\log(1/\varepsilon)+2f_a(]\log(1/\varepsilon)[)\leqslant$$
$$\leqslant\log(1/\varepsilon)+2\sqrt{(\log(1/\varepsilon)\log^{(3)}(1/\varepsilon)}+\frac{3+o(1)}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log^{(3)}(1/\varepsilon)}}\log^{(4)}(1/\varepsilon).$$

Из лемм 11 и 15 выводим неравенство

$$\tilde{L}_B(a,\ \varepsilon)\geqslant 2f_a(\gamma_a(\varepsilon)-1)+\gamma_a(\varepsilon)-1. \tag{3}$$

Из (3) и леммы 12 следует, что для почти всех $a\in\mathbf{R}_+$

$$\tilde{L}_B(a,\ \varepsilon)\geqslant 2f_a(]\log(1/\varepsilon)[)+\log(1/\varepsilon)-O(\log^{(2)}(1/\varepsilon)). \tag{4}$$

Применяя нижнюю оценку для $f_a(n)$, получаем отсюда нижнюю оценку для $\tilde{L}_B(a,\ \varepsilon)$, которая вместе с полученной выше верхней оценкой означает, что интересующий нас $\limsup$ не больше 1.

Выберем теперь последовательность n_i так, чтобы

$$\lim_{i\to\infty}\left(f_a(n_i)-\frac{n_i}{2}-2\sqrt{0{,}5n_i\log^{(2)}n_i}\right)\frac{2\sqrt{2\log^{(2)}n_i}}{\sqrt{n_i}\log^{(3)}n_i}=\frac{3}{2},$$

и положим $\varepsilon_i=2^{-n_i}$. Тогда из (4) следует, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{-2\log(1/\varepsilon)-(2\log(1/\varepsilon)\log^{(3)}(1/\varepsilon))^{1/2}+\tilde{L}_B(a,\ \varepsilon)}{2^{-3/2}\,3\,(\log(1/\varepsilon))^{1/2}\log^{(4)}(1/\varepsilon)\,(\log^{(3)}(1/\varepsilon))^{-1/2}}=1.$$

Аналогично находим и вторую нижнюю оценку. Соотношение (v) доказано. Соотношение (i) следует из леммы 15. Для доказательства (ii) понадобится

Л е м м а 16. *Для любых* $a\in\mathbf{R}_+$ *и* $n\in\mathbf{N}$ *либо*

$$f_a(n)\leqslant n-3\sqrt{n}/2+O(1),$$

либо найдется m *такое, что* $n/16\leqslant m\leqslant n$ *и*

$$a_{]m-\sqrt{m}[}=\ldots=a_m=2,\qquad a=\overline{a_{-k}\,\ldots\,a_{-1}a_0,\ a_1a_2\,\ldots}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что для любого $m\in[n/16,\ n]$

$$\prod_{m\geqslant i\geqslant m-\sqrt{m}} a_i=0.$$

Тогда общее количество индексов $i < n$ таких, что $a_i = 0$, будет не меньше

$$3\sqrt{n}/2 - O(1),$$

значит,

$$f_a(n) \leqslant n - 3\sqrt{n}/2 + O(1).$$

Лемма доказана.

Из леммы 16 следует, что или для некоторой бесконечной последовательности n_i

$$f_a(n_i) \leqslant n_i - 3\sqrt{n_i}/2 + O(1),$$

или для некоторой бесконечной последовательности m_i справедливы равенства

$$a_{[m_i - \sqrt{m_i}]} = \ldots = a_{m_i} = 1.$$

В первом случае для $\varepsilon_i = 2^{-n_i}$ из верхней оценки для $\tilde{L}_B(a, \varepsilon)$ следует неравенство

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon_i) \leqslant O(a) + n_i + 2f_a(n_i) \leqslant O(a) + 3n_i - 3\sqrt{n_i} \leqslant$$
$$\leqslant 3\log(1/\varepsilon_i) - 3\sqrt{\log(1/\varepsilon_i)} + O(a).$$

Во втором случае для

$$\varepsilon_i = 2^{-m_i} \quad \text{и} \quad b_i = \overline{a_{-k(a)} \ldots a_0, a_1 \ldots a_{j-1} 1},$$

где $j = \max\{l\colon a_l = 0,\ l < m_i\}$, справедливо неравенство

$$|a - b| \leqslant 2^{-m_i} \leqslant \varepsilon_i,$$

значит, согласно той же оценке

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon_i) \leqslant \tilde{L}_B(b) \leqslant O(a) + j + 2f_a(j) \leqslant 3(m_i - \sqrt{m_i}) + O(a) \leqslant$$
$$\leqslant 3\log(1/\varepsilon_i) - 3\sqrt{\log(1/\varepsilon_i)} + O(a).$$

В обоих случаях соотношение (ii) доказано.

Рассмотрим число $a = 0,011011110\ldots$, в котором 0 стоит только в разрядах с номерами i^2, $i = 1, 2, \ldots$ Ясно, что

$$\gamma_a(\varepsilon) > \log(1/\varepsilon) - 2\sqrt{\log(1/\varepsilon)}, \quad f_a(n) = n - \sqrt{n} + O(1),$$

поэтому из (3) следует, что

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) \geqslant 3\log(1/\varepsilon) - 8\sqrt{\log(1/\varepsilon)} - O(1).$$

Из верхней оценки для $\tilde{L}_B(a, \varepsilon)$ следует, что

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) \leqslant 3\log(1/\varepsilon) - 2\sqrt{\log(1/\varepsilon)} + O(1).$$

Значит,

$$\tilde{L}_B(a, \varepsilon) = (3 - o(1))\log(1/\varepsilon), \quad \liminf_{\varepsilon \to 0} (3\log(1/\varepsilon) - \tilde{L}_B(a, \varepsilon))(\log(1/\varepsilon))^{-1/2} \geqslant 2,$$
$$\limsup_{\varepsilon \to 0} (3\log(1/\varepsilon) - \tilde{L}_B(a, \varepsilon))(\log(1/\varepsilon))^{-1/2} \leqslant 8.$$

Для любой стремящейся к ∞ при $\varepsilon \to 0$ функции $\varphi(\varepsilon)$ найдется a такое, что

$$f_a(n) > n - \varphi(2^{-n}),$$

откуда следует соотношение (iv).

Теорема доказана.

Теорема 3 дает пример базиса, для которого наблюдается полуэффект Шеннона (в смысле [19]), но не наблюдается эффект Шеннона. Ее можно обобщить на базисы $B=\{x/m,\ x+y,\ 1\}$, $m\in\mathbf{N}$, $m>2$, а также аналогичные утверждения доказать для некоторых других подобных базисов, например, для $B=\{x/2,\ 1-x,\ 0\}$.

В следующей теореме рассматриваются еще несколько примеров линейных базисов с интересными свойствами. Линейная форма

$$(a,\ x)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$$

называется *плохо приближаемой*, если для любого вектора $x\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}$

$$\|(a,\ x)\|\geqslant c_a(\max_i|x_i|)^{-n},$$

где $c_a>0$ — константа, не зависящая от x, а $\|y\|$ обозначает здесь

$$\min\{|y-n|:\ n\in\mathbf{Z}\}.$$

В случае $n=1$ форма ax плохо приближаемая $\Leftrightarrow$ число a плохо приближаемое. Известно, что $a\in\mathbf{R}$ плохо приближаемое $\Leftrightarrow$ все элементы разложения a в цепную дробь ограничены (см., например, [12, с. 50—51]). Известно также, что для любых $a_1,\ \ldots,\ a_n$ из действительного алгебраического поля степени $n+1$ таких, что $1,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ рационально независимы, линейная форма $(a,\ x)$ будет плохо приближаемой (см., например, [20, с. 99—100]).

Теорема 4. 1) *Пусть*

$$(a_1x_1+\ldots+a_mx_m)/a_0$$

— плохо приближаемая форма,

$$B_1=\{0,\ x\pm a_0,\ \ldots,\ x\pm a_m\},\qquad B_2=\{x\pm y,\ a_0,\ \ldots,\ a_m\}.$$

Тогда для любого числа $a\in\mathbf{R}$

$$L_{B_1}(a,\ \varepsilon)=\tilde L_{B_1}(a,\ \varepsilon)=D_{B_1}(a,\ \varepsilon)\asymp\tilde L_{B_2}(a,\ \varepsilon)\lesssim\varepsilon^{-1/m},$$
$$D_{B_2}(a,\ \varepsilon)\leqslant\frac{|\log(1/\varepsilon)|}{m}+O(1),\quad L_{B_2}(a,\ \varepsilon)\leqslant\frac{|\log(1/\varepsilon)|}{m}+\frac{O(\log(1/\varepsilon))}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)}.$$

Если $a_0,\ \ldots,\ a_m$ рационально независимы, то найдется $a\in\mathbf{R}$ такое, что $L_{B_1}(a,\ \varepsilon)=\tilde L_{B_1}(a,\ \varepsilon)=D_{B_1}(a,\ \varepsilon)\asymp\tilde L_{B_2}(a,\ \varepsilon)\gtrsim\varepsilon^{-1/m}$,

$$D_{B_2}(a,\ \varepsilon)\geqslant\frac{|\log(1/\varepsilon)|}{m}+O(1),$$

и для почти всех $a\in\mathbf{R}$

$$L_{B_2}(a,\ \varepsilon)-\frac{|\log(1/\varepsilon)|}{m}\gtrsim\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)}.$$

2) *Для почти всех $c\in\mathbf{R}$, в том числе и для c, равного основанию натуральных логарифмов, для $B=\{x\pm y,\ cx,\ 1\}$ и любого $a\in\mathbf{R}$*

$$L_B(a,\ \varepsilon)=o(\log(1/\varepsilon)).$$

3) *Для любой монотонно стремящейся к ∞ при $\varepsilon\to0$ функции $\varphi(\varepsilon)$ найдется число $\theta=\theta_\varphi$ такое, что для $B=\{x-y,\ \theta,\ 1\}$ справедливы неравенства*

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{L_B(1/2,\ \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}\leqslant1,\qquad\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{D_B(1/2,\ \varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}>1.$$

Докажем п. 1). Для каждого $b\in\mathbf{R}$, представимого в виде $b=(a,\ n)$, обозначим $\lambda(b)$ минимум $\sum_{i=0}^{m}|n_i|$, взятый по всем таким представлениям. Ясно, что

$$\lambda(b\pm a_i)\leqslant\lambda(b)+1,\qquad\lambda(b_1\pm b_2)\leqslant\lambda(b_1)+\lambda(b_2).$$

Лемма 17. *Пусть*

$$B_1=\{0,\ x\pm a_0,\ \ldots,\ x\pm a_m\},\qquad B_2=\{x\pm y,\ a_0,\ \ldots,\ a_m\},$$

где $a_i\in\mathbf{R}$ *произвольны. Тогда*

$$L_{B_1}(b)=\tilde L_{B_1}(b)=D_{B_1}(b)=\lambda(b)+1,\qquad \tilde L_{B_2}(b)=2\lambda(b)-1,$$
$$D_{B_2}(b)=\log\lambda(b)+O(1),\qquad L_{B_2}(b)=(1+o(1))D_{B_2}(b).$$

Доказательство. Верхние оценки легко доказываются индукцией по $\lambda(b)$. Докажем нижние оценки. Пусть S — схема в базисе B_1, вычисляющая b. Докажем индукцией по $D_{B_1}(S)$, что

$$D_{B_1}(S)\geqslant\lambda(b)+1.$$

База $(D_{B_1}(S)=1)$ очевидна. Шаг индукции. Пусть S получается из S_1 добавлением элемента $x\pm a_i$. По предположению индукции

$$D_{B_1}(S_1)\geqslant\lambda(b_1\mp a_i)+1,$$

значит,

$$D_B(S)=1+D_{B_1}(S_1)\geqslant 2+\lambda(b_1\mp a_i)\geqslant\lambda(b)+1.$$

Пусть Φ — формула в базисе B_2, вычисляющая b. Докажем индукцией по $\tilde L_{B_2}(\Phi)$, что

$$\tilde L_{B_2}(\Phi)\geqslant 2\lambda(b)-1.$$

База $(\tilde L_{B_2}(\Phi)=1)$ очевидна. Шаг индукции. Пусть Φ получается из формул Φ_i, вычисляющих b_i, и элемента $x\pm y$ так, что $b=b_1\pm b_2$. По предположению индукции

$$\tilde L_{B_2}(\Phi_i)\geqslant 2\lambda(b_i)-1,\qquad i=1,\ 2,$$

значит,

$$\tilde L_{B_2}(\Phi)=1+\tilde L_{B_2}(\Phi_1)+\tilde L_{B_2}(\Phi_2)\geqslant 2(\lambda(b_1)+\lambda(b_2))-1\geqslant 2\lambda(b_1\pm b_2)-1=$$
$$=2\lambda(b)-1.$$

Оценка для $D_{B_2}(b)$ следует из оценки для $\tilde L_{B_2}(b)$ и неравенства (1). Последнее равенство доказывается методом [21].

Лемма доказана.

Так как по условию форма

$$l(x)=(a_1x_1+\cdots+a_mx_m)/a_0$$

плохо приближаемая, то существует $\gamma>0$ такое, что для любого числа $N>0$ система

$$\|l(x)\|<\gamma N^{-m},\quad x\in\mathbf{Z}^{m-1},\quad x\neq 0,\quad |x|=\max_i|x_i|<N,$$

не имеет решений. Тогда согласно следствию из [20, гл. 5, теорема 6] найдется $\delta=\delta(\gamma)>0$ такое, что для любых $\alpha\in\mathbf{R}$ и $N\in\mathbf{N}$ найдется вектор $x\in\mathbf{Z}^m$ такой, что

$$|x|<N,\quad \|l(x)-\alpha\|<\delta N^{-m}.$$

Положим $N=(\varepsilon/\delta a_0)^{-1/m}$. Тогда для любого числа $\alpha\in\mathbf{R}$ найдется вектор $X\in\mathbf{Z}^{m+1}$ такой, что

$$|X|\leqslant c\varepsilon^{-1/m},\qquad |(a,\ X)-\alpha|<\varepsilon,$$

где c — константа, зависящая от $|a|$, $a_0,\ \ldots,\ a_m$, m, δ. Из леммы 17 следует, что

$$\tilde L_{B_1}(\alpha,\ \varepsilon)\leqslant\sum_{i=0}^{m}|x_i|+1\leqslant O_{\alpha,B}(\varepsilon^{-1/m}),\quad \tilde L_{B_2}(\alpha,\ \varepsilon)\leqslant O_{\alpha,B}(\varepsilon^{-1/m}),$$
$$D_{B_2}(\alpha,\ \varepsilon)\leqslant\frac{1}{m}\log(1/\varepsilon)+O_{\alpha,B}(1).$$

Применяя для вычисления (a, X) обобщение метода [17], принадлежащее Е. Г. Страусу [21], получаем, что

$$L_{B_2}(\alpha, \varepsilon) \leqslant \log|x| \left(1 + \frac{m+1}{\log^{(2)}|x|} + O_m\left(\frac{\log^{(3)}|x|}{(\log^{(2)}|x|)^2}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{m}\log\frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{m+1}{\log^{(2)} 1/\varepsilon} + O_{a,\,B}\left(\frac{\log^{(3)}(1/\varepsilon)}{(\log^{(2)}(1/\varepsilon))^2}\right)\right).$$

Из этого неравенства следует последнее соотношение леммы 17 и последняя верхняя оценка (i).

Докажем нижние оценки этого пункта.

Из [20, гл. 5, теорема 10] следует, что существуют $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\Gamma > 0$ такие, что для любого $x \in \mathbf{Z}^m$, $x \neq 0$, справедливо неравенство

$$\|l(x) - \alpha\| \geqslant \Gamma |x|^{-m}.$$

Пусть вектор $X \in \mathbf{Z}^{m+1}$ таков, что

$$|(a, X) - a_0\alpha| \leqslant \varepsilon, \qquad D_{B_1}((a, X)) = D_{B_1}(a_0\alpha, \varepsilon).$$

Так как тогда

$$\|l(x) - \alpha\| \leqslant \varepsilon/a_0, \qquad \Gamma|x|^{-m} \leqslant \varepsilon/a_0,$$

то, значит,

$$|x| \geqslant (\Gamma/a_0\varepsilon)^{1/m}.$$

Из леммы 17 следует тогда, что

$$D_{B_1}(a_0\alpha, \varepsilon) > |x| \gtrsim \varepsilon^{-1/m}, \quad \tilde{L}_{B_2}(a_0\alpha, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{-1/m}, \quad D_{B_2}(a_0\alpha, \varepsilon) > \frac{\log(1/\varepsilon)}{m} - O(1).$$

Осталось доказать, что для почти всех $a \in \mathbf{R}$ и любого $\varepsilon < \varepsilon(a)$

$$L_{B_2}(a, \varepsilon) \geqslant \frac{1}{m}(\log(1/\varepsilon))\left(1 + \frac{c}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)}\right),$$

где $c > 0$ — некоторая константа.

Лемма 18. *Количество всех чисел $b \in [0, a_0]$ таких, что $L_{B_2}(b) \leqslant L$, меньше $2^{mL - (cL/\log L)}$, где $c > 0$ — некоторая константа.*

Доказательство. Так как каждое число $b \in [0, a_0]$ однозначно определяется по последним m координатам своего представления в виде (a, X), то достаточно оценить сверху количество всех m-мерных векторов, которые могут появляться в последовательностях m-мерных векторов длины не более L, начинающихся с единичных векторов $e_1, \ldots, e_m$, и в которых каждый вектор получается из предыдущих векторов сложением или вычитанием (аддитивно-субтрактивных цепочках). Это количество не превосходит m-й степени количества целых чисел, которые вычисляются аддитивно-субтрактивными цепочками длины не более L. Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 14, оценим число всех аддитивно-субтрактивных цепочек длины не более L, содержащих не менее r удвоений, как

$$L^2(2e^2L^3(L-r)^{-2})^{L-r}$$

(удвоением, как и в [18, § 4.6.3], называется элемент цепочки, который получается из предыдущего элемента сложением его с самим собой). Совершенно аналогично [18, § 4.6.3, теорема A] можно доказать, что все числа в этих цепочках по модулю меньше

$$O(2^r\varphi^{L-r}), \quad \text{где} \quad \varphi = (1+\sqrt{5})/2.$$

Поэтому в цепочках длины не более L, содержащих не более $L - (L/2\log L)$ удвоений, все числа по модулю меньше

$$O(2^{L - ((1-\log\varphi)\, L/2\log L)}).$$

Количество остальных цепочек согласно предыдущему не больше

$$L^2(8e^2L(\log L)^2)^{L/2\log L} < 2^{(1+o(1))L/2}.$$

В итоге получаем оценку

$$2^{mL-(cL/\log L)}, \quad \text{где} \quad c = m(1-\log\varphi)/2. \tag{5}$$

Лемма доказана.

Оценка (5) доказывается так же, как и 1) теоремы 2, только вместо леммы 5 используется лемма 18.

Докажем 2). Согласно [23, теорема 9.1] для почти всех $\vartheta \in \mathbf{R}$ и любого $n \in \mathbf{N}$ линейная форма $l_\vartheta(x) = x_1\vartheta + \ldots + x_n\vartheta^n$ для любого $x \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ удовлетворяет неравенству

$$\| l_\vartheta(x) \| \geqslant c_n (|x| \log^2 |x|)^{-n}.$$

Как и в пп. 1), 2) [20, гл. 5, теорема 6], получаем, что для любого $n \in \mathbf{N}$ при некотором $\gamma_n > 0$ для любого числа $a \in \mathbf{R}$ разрешима система

$$\{\| l_\vartheta(x) - a \| \leqslant (N\gamma_n)^{-n} (\log N)^{2n^2}, \quad x \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}, \quad |x| \leqslant N.$$

Аналогично, применяя теорему Малера (см. [23, с. 103]), получаем, что для любого n и некоторого γ_n при любом a разрешима система

$$\| l_e(x) - a \| \leqslant N^{-n+(\gamma_n/\log^{(2)} N)}, \quad x \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}, \quad |x| \leqslant N.$$

Осталось заметить, что для любых $a,\ c \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0$

$$L_{\{x \pm y,\, cx,\, 1\}}(a, \varepsilon) \leqslant n + 1 + L_{\{x \pm y,\, 1,\, c,\, \ldots,\, c^n\}}(a, \varepsilon),$$

и закончить доказательство так же, как и в 1). Получим, что для любого $n \in \mathbf{N}$

$$L_B(a, \varepsilon) \leqslant \frac{1+o(1)}{n} \log(1/\varepsilon),$$

значит,

$$L_B(a, \varepsilon) = o(\log(1/\varepsilon)).$$

Докажем 4). Согласно [20, гл. 3, § 3, теорема 3] для любой стремящейся к нулю функции $\psi(x)$ найдется $\theta = \theta_\psi$ такое, что система

$$\{\| q\theta - 1/2 \| \leqslant \psi(P)\}, \quad q \in \mathbf{Z}, \quad |q| \leqslant P,$$

неразрешима для бесконечно многих $P_i \in \mathbf{N}$. Выберем $\psi(x)$ такое, что

$$\psi(2^{\varphi(\varepsilon)}) = \varepsilon,$$

и ε_i такое, что

$$2^{\varphi(\varepsilon_i)} = P_i, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Тогда если

$$\| x_1\theta - 1/2 \| \leqslant \varepsilon_i \leqslant \psi(2^{\varphi(\varepsilon_i)}) = \psi(P_i), \qquad x_1 \in \mathbf{Z},$$

то $|x_1| > P_i$. Пусть

$$x_i \in \mathbf{Z}, \quad |x_1\theta + x_2 - 1/2| \leqslant \varepsilon_i, \quad D_B(1/2, \varepsilon_i) = D_B(x_1\theta + x_2).$$

Тогда

$$\| x_1\theta - 1/2 \| \leqslant \varepsilon_i,$$

значит $|x_1| > P_i$, и из леммы 17 следует, что

$$D_B(1/2, \varepsilon) \geqslant \log(|x_1| + |x_2|) \geqslant \log P_i = \varphi(\varepsilon_i),$$

откуда

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} D_B(1/2, \varepsilon)/\varphi(\varepsilon) > 1.$$

Из одной теоремы Чебышева [12, с. 53—54] следует, что для бесконечно многих $x_i \in \mathbf{N}$

$$\|x_i\theta - 1/2\| < 1/x_i.$$

Если взять $\varepsilon_i = 1/x_i$, то

$$L_B(1/2,\ \varepsilon_i) \leqslant L_B(\theta x_i + y_i) \leqslant (1 + o(1)) \log x_i = (1 + o(1)) \log (1/\varepsilon)$$

согласно лемме 17. Теорема 4 доказана.

Пусть

$$B_1 = \{xy,\ 1/x,\ -x,\ p_1,\ \ldots,\ p_m\},\ B_2 = \{p_1x,\ \ldots,\ p_mx,\ x/p_1,\ \ldots,\ x/p_m,\ 1,\ -1\},$$

где $p_1,\ \ldots,\ p_m$ — различные простые числа, $m \geqslant 2$. Тогда с помощью [22, теоремы 3.10, 5.10], [20, пп. 1, 5, теорема 6] можно доказать, что для любого $a \in \mathbf{R}$

$$L_{B_2}(a,\ \varepsilon) = \tilde{L}_{B_2}(a,\ \varepsilon) = D_{B_2}(a,\ \varepsilon), \qquad \log \tilde{L}_{B_i}(a,\ \varepsilon) \lesssim \log(1/\varepsilon), \qquad i = 1,\ 2,$$
$$L_{B_1}(a,\ \varepsilon) \asymp \log(1/\varepsilon),$$

и для любого $a \in A \setminus \mathbf{Q}$

$$\log \tilde{L}_{B_i}(a,\ \varepsilon) \asymp \log(1/\varepsilon), \quad i = 1,\ 2, \qquad D_{B_1}(a,\ \varepsilon) \asymp \log(1/\varepsilon) \asymp L_{B_1}(a,\ \varepsilon).$$

Известно [24—26], что все конечные базисы в двузначной логике параллелизуемы, а в трехзначной, вообще говоря, нет (базис B называется параллелизуемым, если всегда глубина равна по порядку логарифму сложности формульной реализации). Согласно теоремам 1, 1), 2, 3), 4, 1) базисы $B_1 = \{x \pm y,\ xy,\ \mp 1/m\}$, $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$, и $B_2 = \{x \pm y,\ a_0,\ \ldots,\ a_m\}$ для некоторых $a_0,\ \ldots,\ a_m$ параллелизуемы и для почти всех $\alpha \in \mathbf{R}$

$$D_{B_1}(\alpha,\ \varepsilon) \sim \log L_{B_1}(\alpha,\ \varepsilon) \sim \log \tilde{L}_{B_1}(\alpha,\ \varepsilon) \sim \log^{(2)}(1/\varepsilon),$$

и для любого отрезка $I \subset \mathbf{R}$ функции Шеннона

$$D_{B_2}(I,\ \varepsilon) \sim L_{B_2}(I,\ \varepsilon) \sim \log \tilde{L}_{B_2}(I,\ \varepsilon) \sim \frac{1}{m} \log(1/\varepsilon),$$

а базисы $\{(x+y)/2,\ x-y,\ 1\}$ и $\{1,\ x-y,\ x/2\}$ непараллелизуемы и для этих базисов и почти всех $\alpha \in \mathbf{R}$

$$D_B(\alpha,\ \varepsilon) \sim L_B(\alpha,\ \varepsilon) \asymp \tilde{L}_B(\alpha,\ \varepsilon).$$

Теорема 4, 1) показывает, что в теореме 2, 1) заменить в оценке константу c_B на не зависящую от базиса константу, вообще говоря, нельзя. Теорема 4, 3) показывает, что для произвольных конечных линейных базисов теорема 2, 1), вообще говоря, неверна, а теорема 4, 4) — что для тех же базисов получить зависящую лишь от числа функций в базисе верхнюю оценку для $L_B(I,\ \varepsilon)$, $\tilde{L}_B(I,\ \varepsilon)$, $D_B(I,\ \varepsilon)$, вообще говоря, нельзя.

Учитывая изоморфизм между $(\mathbf{R},\ +)$ и $(\mathbf{R}_+,\ \cdot)$, для теорем 2—4 можно сформулировать соответствующие аналоги, например, таким аналогом для равенства (III) теоремы 2, 4) будет утверждение, что для $B = \{x/y,\ \sqrt{x},\ -x,\ 2\}$ и для почти всех $a \in \mathbf{R}$

$$L_B(a,\ \varepsilon) = \log(1/\varepsilon) + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)} + O\left(\frac{\log(1/\varepsilon)\log^{(3)}(1/\varepsilon)}{(\log^{(2)}(1/\varepsilon))^2}\right) + O_a(1),$$

а также утверждение о том, что для $B = \{xy,\ x/y,\ \sqrt{x}\}$ и почти всех $a \in \mathbf{R}$

$$L_B(x^a,\ \varepsilon) = \log(1/\varepsilon) + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log^{(2)}(1/\varepsilon)} + O\left(\frac{\log(1/\varepsilon)\log^{(3)}(1/\varepsilon)}{(\log^{(2)}(1/\varepsilon))^2}\right) + O_{a,I}(1),$$

где функция x^a рассматривается на отрезке $I \subset [0,\ +\infty)$. Последнее утверждение, а также другие утверждения о базисе $\{xy,\ x/y,\ \sqrt{x}\}$, получаемые указанным образом, можно интерпретировать как оценку сложности вычисления степенной функции на калькуляторе с неисправными кнопками + и —, имеющем операцию $\sqrt{\ }$, но не имеющем операцию x^y [18, с. 509, задача 25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации непрерывных функций и о континуальных аналогах эффекта Шеннона // Вестн. МГУ. Сер. 1, Метематика, механика.— 1986.— № 6.— С. 25—33.
2. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации аналитических функций схемами и формулами // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1983.— № 4.— С. 36—43.
3. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной схемами из функциональных элементов // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.—1984.— № 3.— С. 35—41.
4. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной формулами в непрерывных базисах. // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1984.— № 6.— С. 53—57.
5. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных при помощи схем и формул в некоторых базисах, состоящих из непрерывных функций // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1986.— № 3.— С. 48—57.
6. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации функций, удовлетворяющих условию Липшица, в непрерывных базисах // Мат. заметки.— 1988.— Т. 43, № 4.— С. 543—557.
7. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации непрерывных функций схемами и формулами в непрерывных базисах // Сб. тезисов конф. FCT— 87. Казань.— Springer, 1988.— P. 140—144.
8. Strassen V. Berechnungen in partiellen Algebren endlichen Typs // Computing.— 1973.— V. 11, № 3.— P. 181—196.
9. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
10. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14.— М.: Наука, 1965.— С. 31—110.
11. Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики. Вып. 23.— М.: Наука, 1970.— С. 43—81.
12. Хинчин А. Я. Цепные дроби.— М.: Наука, 197 .
13. Гашков С. Б. О сложности вычисления некоторых классов многочленов нескольких переменных // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1988.— № 2.— С. 89—91.
14. Paterson M. S. Efficient iterations for algebraic numbers // Proceedings of the Symposium on complexity of computer computations, Yorktown Heights, N. Y.— IBM Thomas Watson Research Center, 1972.
15. Kung H. T. A bound on the multiplication efficiency of iteration // Computer Science Report, March 1972.— Pittsburg, Pa.: Carnegie-Mellon University 15213.
16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1.— М.: Мир, 1984.
17. Brauer A. On additions chains // Bull. AMS.— 1939.— № 45.— P. 736—739.
18. Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. Т. 2.— М.: Мир, 1977.
19. Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983.
20. Касселс Д. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений.— М.: ИЛ, 1961.
21. Straus E. G. Addition chains of vectors // Amer. Math. Month.— 1964.— № 71.— P. 806—808.
22. Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта.— М.: Изд-во МГУ, 1982.
23. Baker A. Transcendental Number Theory.— Cambridge, 1975.
24. Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Мат. заметки.— 1987.— Т. 42, № 4.— С. 603—612.
25. Угольников А. Б. О полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // VII Всес. Конф. «Проблемы теоретической кибернетики». Ч. 1.— Иркутск, 1985.— С. 194—195.
26. Ragaz M. Parallelizable algebras // Archiv fur Mathematische Logik und Grundlagenforschung.— 1986/7.— B. 26/1—2.— S. 77—99.

Статья поступила 21.02.89