Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. A. Ivanov, Asymptotic estimates for probability characterictics of selftuning time of mixing automata,
Tr. Diskr. Mat., 2001, Volume 4, 57–70

https://www.mathnet.ru/eng/tdm55

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.89
December 13, 2025, 00:06:18

Труды по дискретной математике
Том 4, с. 57 – 70
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕНИ САМОНАСТРОЙКИ ПЕРЕМЕШИВАЮЩИХ АВТОМАТОВ

В.А. ИВАНОВ

В работе находятся предельные распределения и асимптотические выражения для моментов времени самонастройки одного или нескольких параллельно работающих перемешивающих автоматов в предположении, что в качестве их управляющих последовательностей используются различные классы дискретных стационарных случайных последовательностей.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В целом ряде различных систем передачи информации применяются автономные автоматы, синхронно работающие на передающем и приемном концах линии связи и выполняющие роль датчиков псевдослучайных чисел. Для улучшения вероятностных характеристик последовательностей, реализуемых этими датчиками, и уменьшения корреляционных зависимостей между их символами используются перемешивающие автоматы (ПА). На вход ПА поступает последовательность, состоящая из двух подпоследовательностей — входной и управляющей. Символы входной подпоследовательности переставляются по некоторому закону, задаваемому символами управляющей подпоследовательности. Одной из характеристик таких систем в ситуации, когда в начальный момент времени состояния перемешивающих автоматов рассогласованы, является время самонастройки (самосинхронизации) перемешивающих автоматов, или, другими словами, время отработки начального рассогласования, за которое автоматы, работающие на передаче и приеме, перейдут в результате воздействия, оказываемого поступающей на них управляющей последовательностью, в одно и то же состояние. Исследованием самонастраивающихся автоматов занимались многие авторы (см., например, [1], [2]).

Естественно предположить, что дискретная последовательность, подающаяся на управление перемешивающего автомата, вырабатывается конечным вероятностным автоматом (детерминированным конечным автоматом, на вход которого поступает последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, реализуемая некоторым датчиком случайных чисел [12]) и является, в частности, случайной последовательностью с независимыми значениями, цепью Маркова или функцией цепи Маркова. В более общем случае при исследовании установившегося режима работы можно считать, что эта последовательность является стационарной дискретной случайной последовательностью.

© В.А. Иванов, 2001

§ 2. ПЕРЕМЕШИВАЮЩИЕ АВТОМАТЫ

Рассмотрим класс автоматов

$$A = \langle Z, X \times \Gamma, Y, \delta(z, x, u), \lambda(z, x, u)\rangle,$$

где $Z = \{z = (z_1, \dots, z_n), z_j \in \mathbf{Z}_q, j = 1, \dots, n\}$, $q = 2, 3, \dots,$ — множество состояний автомата A, $\mathbf{Z}_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$, $X \times \Gamma = \{(x, u), x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{Z}_q^m$, $u \in \Gamma\}$ — множество входных векторов автомата A, состоящих из входных символов x и символов управления u, $X = \mathbf{Z}_q^m$ — множество значений входных символов входного вектора, $\Gamma = \{u^1, \dots, u^M\}$ — множество значений символов управления входного вектора, $M \geq 2$, $y = \{(y_1, \dots, y_m)\} = \mathbf{Z}_q^m$ — множество выходных векторов автомата A, $\delta(z, x, u)$ — функция переходов, $\lambda(z, x, u)$ — функция выходов.

$$z(x) = (z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m) = (z, x), \quad z =\in \mathbf{Z}_q^n, \quad x \in \mathbf{Z}_q^m,$$

$\{G_u, u \in \Gamma\}$ — произвольный набор подстановок, действующих на множестве координат вектора $z(x)$, $(G_u(z(x)))_j$ — j-я координата вектора $G_u(z(x))$.

Определение 1. Автомат $A = \langle Z, X \times \Gamma, Y, \delta, \lambda\rangle$ будем называть *перемешивающим автоматом*, если его функции переходов и выходов могут быть представлены в виде

$$\delta(z, (x, u)) = \delta(z, x, u) = ((G_u(z(x))_1), \dots, (G_u(z(x))_n)),$$

$$\lambda(z, (x, u)) = \lambda(z, x, u) = ((G_u(z(x))_{n+1}), \dots, (G_u(z(x))_{n+m})). \tag{1}$$

Пусть на управление ПА поступает последовательность случайных величин, принимающих значения из множества Γ.

Определение 2. Временем самонастройки v перемешивающего автомата A назовем случайную величину, равную наименьшему числу тактов работы автомата, за которое все n координат вектора начального состояния $z = (z_1, \dots, z_n)$ заменятся символами входной последовательности.

Другими словами, ν — это время, за которое автомат полностью "забудет" информацию, содержавшуюся в его начальном состоянии и, таким образом, исправит все ошибки, находившиеся в его начальном заполнении.

В работе [6] изучались три перемешивающих автомата с двумя подстановками $G_1(z(x))$ и $G_2(z(x))$ следующих видов:

1. $G_1(z(x)) = (x, z_1, \dots, z_{n(1)})(z_{n(1)+1}) \dots (z_n)$,
   $G_2(z(x)) = (x, z_{n(1)+1}, \dots, z_n)(z_1) \dots (z_{n(1)})$, (2)

где $0 < n(1) < n$,

2. $G_1(z(x)) = (x, z_1, \dots, z_{n(1)})(z_{n(1)+1}, \dots, z_n)$,
   $G_2(z(x)) = (x, z_{n(1)+1}, \dots, z_n)(z_1, \dots, z_{n(1)})$,

где $0 < n(1) < n$,

3. $G_1(z(x)) = (x, z_1, \dots, z_n)$,
   $G_2(z(x)) = (x, z_n, z_{n-1}, \dots, z_1)$.

Показано, например, что для равновероятной управляющей последовательности при $n(1) = n/2$ и $n \to \infty$ в первом случае математическое ожидание времени самонастройки асимптотически равно $n(1 + o(1))$, дисперсия $\mathbf{D}\,\nu(n) = n(1 - 2/\pi)(1 + o(1))$, во втором случае математическое ожидание времени самонастройки равно $(1/2)n(1+o(1))\log_2 n$, в третьем случае математическое ожидание времени самонастройки асимптотически равно $n^2(1 + o(1))/2$, дисперсия $\mathbf{D}\,\nu(n) = n^4(1 + o(1))/12$.

В настоящей работе будем исследовать конкретный класс перемешивающих автоматов с подстановками, производящими перемещение элементов различных подмножеств координат вектора состояния z и входного вектора x.

Положим

$$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N) \qquad 1 \le n_j = n(j) \le n, \qquad j = 1, \dots, N, \qquad n_1 + \dots + n_N = n.$$

Пусть $N \ge 2$, $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbf{Z}_2^N$, $|u| = u_1 + \dots + u_N = m$, $j_1 = j(1, u), \dots, j_m = j(m, u)$ — расположенные в порядке возрастания номера единичных координат вектора u, $x \in \mathbf{Z}_2^m$.

Введем класс перемешивающих автоматов $A_{Nm}(\mathbf{n}) = A_{Nm}(n_1, \dots, n_N)$. Предположим, что вектор $z = (z_1, \dots, z_n)$ составлен из подвекторов

$$\mathbf{z}_i = (z_{i1}, \dots, z_{in(i)}), \qquad z_{ij} = z_{k(i-1)+j}, \qquad i = 1, \dots, N,$$
$$j = 1, \dots, n(i), \qquad k(i) = n_1 + \dots + n_i, \qquad i = 1, \dots, N.$$

Определение 3. Перемешивающим автоматом $A_{Nm}(\mathbf{n})$ будем называть автомат, функция переходов которого задается с помощью соотношений

$$\delta(z, x, u) = (\mathbf{z}_1^*, \dots, \mathbf{z}_N^*), \tag{3}$$

где $u \in \mathbf{z}_2^N$, $|u| = m$; $\mathbf{z}_i^* = (x_k z_{i1}, \dots, z_{in(i-1)})$, если $i = j(k, u)$, $k = 1, \dots, m$, и $\mathbf{z}_i^* = \mathbf{z}_i$, если $i \ne j(k, u)$, $k = 1, \dots, m$; функция выходов задается соотношением

$$\lambda(z, x, u) = (y_1, \dots, y_m), \tag{4}$$

где $y_k = z_j(k, u), n(j(k, u))$, $k = 1, \dots, m$.

Набор подстановок $G_u(z(x))$ перемешивающего автомата $A_{Nm}(\mathbf{n})$ имеет мощность $M = C_N^m$. В частности, при $m = 1$ имеем $M = N$.

Конструктивно автомат A состоит из накопителя длины m, в который записывается входная информация и с которого списывается выходной вектор и N накопителей длины $n_1, \dots, n_N$, соответственно, в которых записываются последовательно подвекторы $\mathbf{z}_i$, $i = 1, \dots, N$, состояния автомата $z = (z_1, \dots, z_n)$. Такой автомат будем называть перемешивающим автоматом с N накопителями и m входами.

Обозначим через $\nu = \nu(\mathbf{n})$ время самонастройки перемешивающего автомата $A_{Nm}(\mathbf{n})$. На языке теории размещения частиц по ячейкам это наименьшее число комплектов частиц объема m, которое необходимо разместить в N ячейках, чтобы в ячейке с номером j оказалось по крайней мере n_j частиц, $j = 1, \dots, N$.

Наряду с автоматами $A_{Nm}(\mathbf{n})$ будем рассматривать более общий класс автоматов $A_N(\mathbf{n})$, в которых при поступлении на управление произвольного двоичного вектора $\gamma_t = (\gamma_{1t}, \dots, \gamma_{Nt})$ состояние автомата преобразуется с помощью автомата $A_{Nm}(\mathbf{n})$, $m = 0, 1, \dots, N$, если вес вектора γ_t равен $|\gamma_t| = m$. Преобразование $A_{N0}(\mathbf{n})$ оставляет состояние z автомата $A_N(\mathbf{n})$ неизменным, а входной вектор поступает без изменений на выход автомата.

§ 3. АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕНИ САМОНАСТРОЙКИ ПЕРЕМЕШИВАЮЩИХ АВТОМАТОВ

Пусть управляющая последовательность $\gamma_t = (\gamma_{1t}, \dots, \gamma_{Nt})$ автомата $A_N(\mathbf{n})$ представляет собой стационарную случайную последовательность двоичных векторов, имеющих распределение $\mathbf{P}(\gamma_t = x) = \pi(x)$, $x \in \mathbf{Z}_2^n$. Тогда координаты вектора γ_t прини-

мают значения 0 и 1 с вероятностями

$$\mathbf{P}(\gamma_{jt} = 1) = \mathbf{E}\,\gamma_{jt} = p_j = \sum_x x_j \pi(x), j = 1, \ldots, N.$$

Координаты вектора частот работы соответствующих накопителей автомата $h(t) = (h_1(t), \ldots, h(t))$ имеют вид $h_j(t) = \gamma_{j1} + \ldots + \gamma_{jt}$.

Исследование вероятностных характеристик времени самонастройки $\nu(\mathbf{n})$ автомата $A_N(\mathbf{n})$ сводится с помощью хорошо известного соотношения

$$\mathbf{P}(\nu(\mathbf{n}) \le t) = \mathbf{P}(h(t) \ge \mathbf{n}) \tag{5}$$

к исследованию вероятностных свойств вектора частот $h(t)$ появления символов в управляющей последовательности ПА. Ясно, что за каждый такт случайный векторный процесс $h(t)$, выходящий в начальный момент из точки $h(0) = 0$, монотонно удаляется от начала координат на вектор $\gamma_t = h(t+1) - h(t) > 0$, причем если вектор γ_t содержит ровно m единиц, то преобразование осуществляет автомат $A_{Nm}(\mathbf{n})$.

Изучим предельное распределение и асимптотику моментов времени самонастройки перемешивающего автомата $A_N(\mathbf{n})$ при фиксированном $N \ge 2$; $\max(n_1, \ldots, n_N) \to \infty$ в предположении, что при $t \to \infty$ вектор $h^*(t) = (h(t) - t\mathbf{p})/t^{1/2}$ имеет в пределе многомерное нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и матрицей ковариаций Σ_N, сосредоточенное в некоторой гиперплоскости векторного пространства $\mathbf{R}^N$.

Будем интересоваться ситуацией, когда вектор $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N)$ удаляется от начала координат вместе с ростом параметра τ так, что $n_j = \tau p_j + \tau^{1/2} a_j$, где вектор $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ остается неизменным при удалении вектора $\mathbf{n}$ от начала координат, то есть при $\tau \to \infty$. Введем обозначения:

$$\nu^*(\mathbf{n}) = (\nu(\mathbf{n}) - \tau)/\tau^{1/2}, \qquad h^*(t) = (h(t) - t\mathbf{p})/t^{1/2}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\tau \to \infty$, $\mathbf{n} = \tau\mathbf{p} + \tau^{1/2}\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$ фиксировано и последовательность $h(t)$ при $t \to \infty$ имеет асимптотически нормальное распределение, со средним $t\mathbf{p}$ и матрицей ковариаций $t\Sigma_N$. Тогда для любого фиксированного x*

$$\mathbf{P}(\nu^*(\mathbf{n}) \le x) \to \Phi(\mathbf{a} + x\mathbf{p}[0, \Sigma_N), \tag{6}$$

где $\Phi(x[0, \Sigma_N)$ — функция многомерного нормального распределения со средним 0 и матрицей ковариаций Σ_N.

Доказательство. Из (5) следует, что при $t = \tau + x\tau^{1/2}$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\nu^*(\mathbf{n}) \le x) &= \mathbf{P}(\nu(\mathbf{n}) \le \tau + x\tau^{1/2}) = \mathbf{P}(h(\tau + x\tau^{1/2}) \ge \mathbf{n}) = \\ &= \mathbf{P}((h^*(\tau + x\tau^{1/2})) \ge (\mathbf{n} - (\tau + x\tau^{1/2})\mathbf{p})/(\tau + x\tau^{1/2})^{1/2}) = \\ &= \mathbf{P}(-h^*(\tau + x\tau^{1/2}) \le \mathbf{a} + x\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{a} + x\mathbf{p}/0, \Sigma^*).\end{aligned}$$

Таким образом, функция распределения случайной величины $\nu(\mathbf{n})$ в точке t определяется вероятностью попадания в заданную область случайного вектора, имеющего многомерное нормальное распределение $\Phi(z/0, \Sigma^*)$.

Заметим, что выражения $n_j = \tau p_j + \tau^{1/2} a_j$ характеристик автомата $A(\mathbf{n})$ через параметр τ могут быть заменены на соответствующие выражения через параметр n по

формулам

$$n_j = np_j + n^{1/2}b_j + o(n^{1/2}), \qquad n = \tau + \tau^{1/2}a^*,$$
$$a^* = a_1 + \ldots + a_N, \qquad b_j = a_j - a^*p_j, \qquad a_j = b_j + a^*p_j.$$

Поэтому асимптотические формулы, полученные для задающего характеристики автомата параметра τ, легко преобразуются в асимптотические формулы относительно параметра n.

Исследуем асимптотику моментов времени самонастройки ПА.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\tau \to \infty$, $\mathbf{n} = \tau\mathbf{p} + \tau^{1/2}\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$ фиксировано, последовательность $h(t)$ при $t \to \infty$ имеет асимптотически нормальное распределение со средним $t\mathbf{p}$ и матрицей ковариаций $t\Sigma_N$,*

$$\mathbf{P}\left(|h_j^*(t)| > x\right) = O(x^{-2k-2\delta}), \tag{7}$$

для любого фиксированного $k = 1, 2, \ldots$ и некоторого $\delta > 0$, и пусть

$$h_j^*(t) = (h_j(t) - tp_j)/t^{1/2}, \quad j = 1, \ldots, N, \quad t = 1, 2 \ldots$$

Тогда для моментов случайной величины $\nu^*(\mathbf{n}) = (\nu(\mathbf{n}) - \tau)/\tau^{1/2}$ при любом фиксированном $k = 1, 2, \ldots$ выполняются асимптотические соотношения

$$\mathbf{E}(\nu^*(\mathbf{n}))^k \to m_k, \tag{8}$$

где m_k — конечные величины,

$$\mathbf{E}\,\nu(\mathbf{n}) = \tau + m_1\tau^{1/2}(1 + o(1)), \qquad \mathbf{D}\,\nu(\mathbf{n}) = (m_2 - m_1^2)\tau(1 + o(1)). \tag{9}$$

Доказательство. Время самонастройки $\nu(\mathbf{n})$ в случае, когда $\mathbf{n} = \mathbf{p}\tau - \mathbf{a}\tau^{1/2}$, будем обозначать также $\nu(\tau)$. Для доказательства соотношения $\mathbf{E}(\nu^*(\mathbf{n}))^k \to m_k$, $k = 1, 2, \ldots$, в соответствии с [4] (см. [4], с. 306) достаточно установить, что математическое ожидание $\mathbf{E}(\nu^*(\tau))^r$ ограничено при некотором $r > k$.

Обозначим $F(x) = F(x, \tau) = \mathbf{P}\left(|\nu^*(\tau)| < x\right)$. Воспользуемся формулой

$$\mathbf{E}\,|\nu^*(\tau)|^k = \int x^k\,dF(x) = \varkappa \int x^{k-1}(1 - F(x))dx \tag{10}$$

(см. [4, с. 190]), которая справедлива для $\varkappa > 0$ в случае, когда какой-либо из интегралов, входящих в равенство (10), сходится.

Математическое ожидание $\mathbf{E}(\nu^*(\tau))^r$ будет ограничено, если скорость убывания хвостов распределения $F(x)$ будет удовлетворять ограничению $\mathbf{P}\left(|\nu^*(\tau)| > x\right) = O(x^{r+\delta})$, где $\delta > 0$. Оценим хвосты распределений $\mathbf{P}\left(|\nu^*(\tau)| > x\right) = \mathbf{P}\left(\nu^*(\tau) > x\right) + \mathbf{P}\left(\nu^*(\tau) < -x\right)$ для $x > 0$. Полагая $t = \tau + x\tau^{1/2}$, $x \geq 0$, получаем с учетом (7) при достаточно больших x_0 и τ_0 для $x \geq x_0$ и $\tau \geq \tau_0$ цепочку соотношений

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\nu^*(\tau) > x\right) &= \mathbf{P}(\cup_j\{h_j(t) < n_j\}) \leq \\
&\leq N \max_j \mathbf{P}(h_j^*(t) < -(a_j + xp_j)/(1 + x\tau^{-1/2})^{1/2}) \leq \\
&\leq N \max_j \mathbf{P}(|h_j^*(t)| > (a_j + xp_j)/(1 + x\tau^{-1/2})^{1/2}) \leq \\
&\leq N \max_j \mathbf{P}(|h_j^*(t)| > (a_jx^{-1/2} + x^{1/2}p_j)/(x^{-1} + \tau^{-1/2})^{1/2}) \leq \\
&\leq N \max_j \mathbf{P}(|h_j^*(t)| > p_jx^{1/2} - \varepsilon) = O(x^{-(k+\delta)}).
\end{aligned}$$

Аналогично, обозначая $s = \tau - x\tau^{1/2}$, $x \geq 0$, получаем с учетом (7) при достаточно больших x_0 и τ_0 для $x \geq x_0$ и $\tau \geq \tau_0$ цепочку соотношений

$$\mathbf{P}\left(\nu^*(\tau) < -x\right) = \mathbf{P}(h(s) > n) = \mathbf{P}(h^*(s) > (xp_j - a_j)/(1 - x\tau^{-1/2})^{1/2}) \leq$$
$$\leq N \max_j \mathbf{P}\left(\cap_j \{h_j^*(s) > (x^{1/2}p_j - a_j x^{-1/2})/(x^{-1} - \tau^{-1/2})\}\right) = O(x^{-(k+\delta)}).$$

Отсюда следует справедливость формул (8) и (9).

Конкретизируем общую постановку. Пусть на управление ПА поступает последовательность независимых случайных векторов $\gamma_r = (\gamma_{1r}, \ldots, \gamma_{Nr})$, $\gamma_{ir} \in \mathbf{Z}_2$, с распределением $\mathbf{P}(\gamma_r = z) = (C_N^m)^{-1}$, если $|z| = m$ и $\mathbf{P}(\gamma_r = z) = 0$, если $|z| \neq m$. Такой автомат будем называть перемешивающим автоматом с равновероятным независимым управлением.

Обозначим через $h_j(t) = \gamma_{1j} + \ldots + \gamma_{tj}$ число единиц, реализовавшихся в последовательности j-х координат управляющего вектора γ_r за t тактов работы автомата и через $h(t) = (h_1(t), \ldots, h_N(t))$ вектор частот появления единиц в координатах управляющей последовательности.

Моменты распределений компонент вектора γ_r имеют вид

$$\mathbf{E}\,\gamma_{jr} = \left(C_{N-1}^{m-1}\right)\left(C_N^m\right)^{-1} = p, \qquad \mathbf{E}\,\gamma_{ir}\gamma_{jr} = \left(C_{N-2}^{m-2}\right)\left(C_N^m\right)^{-1} = \frac{p(1-p)}{N-1}, \tag{11}$$

где $p = m/N$. Из (5) следует, что для моментов распределений компонент вектора $h(t)$ выполняются соотношения

$$\mathbf{E}\,h_j(t) = tmN^{-1}, \qquad \mathbf{D}\,h_j(t) = tmN^{-1}(1 - mN^{-1}), \tag{12}$$

$$\mathrm{Cov}(h_i(t), h_j(t)) = t(m-N)N^{-2}(N-1)^{-1}.$$

Таким образом, в матрице ковариаций

$$\Sigma_N = (1/t) \parallel \mathrm{Cov}(h_i(t), h_j(t)) \parallel = \parallel m(m-N)N^{-2}(N-1)^{-1}(\delta_{ij}N - 1) \parallel,$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, на диагонали стоят значения $p(1-p)$, а на остальных местах — величины $p(1-p)/(1-N)$.

Заметим, что в силу существования линейной зависимости $h_1(t) + \ldots + h_N(t) = t$ между координатами вектора $h(t)$ ранг матрицы ковариаций Σ_N не превысит величины $N - 1$. Покажем, что матрица Σ_N^*, полученная из матрицы Σ_N исключением из нее последней строки и последнего столбца, имеет отличный от нуля определитель, и ее можно обратить. Для этого докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть элементы матрицы $A = \parallel a\delta_{ij} - b\delta_{ij}^* \parallel$ размера $k \times k$ удовлетворяют условиям $\delta_{ij} = 1 - \delta_{ij}^* = 1$, если $i = j$, $\delta_{ij} = 1 - \delta_{ij}^* = 0$, если $i \neq j$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a^2 - ab(k-2) - b^2(k-1) \neq 0$. Тогда существует обратная матрица*

$$A^{-1} = \parallel x\delta_{ij} + y\delta_{ij}^* \parallel, \tag{13}$$

где

$$x = [a - b(k-2)]c, \qquad y = bc, \qquad c = [a^2 - ab(k-2) - b^2(k-1)]^{-1}. \tag{14}$$

Доказательство. Будем искать обратную матрицу в виде (13). Тогда для неизвестных x и y получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} ax - (n-1)by &= 1, \\ -bx + (a - (n-2)b)y &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Решение системы (15) приводит к значениям, указанным в (14).

Воспользовавшись леммой 1 и формулами (11) и (12), находим матрицу, обратную к матрице Σ_N^*,

$$M_N = \Sigma_N^{*-1} = \left\| \frac{2(N-1)\delta_{ij} + (N-1)\delta_{ij}^*}{Npq} \right\| = \left\| \frac{(N-1)(\delta_{ij}+1)}{Npq} \right\|,$$

где $p = m/N$, $q = (N-m)/N$. Детерминант матрицы M_N равен Q^Q, $Q = (N - 1)N/m(N-m)$.

ТЕОРЕМА 3. *Для функции распределения $\boldsymbol{P}(v^*(\mathbf{n}) \le x)$ времени самонастройки перемешивающего автомата $A_{Nm}(\mathbf{n})$ с накопителями длины $n_j = \tau m/N + \tau^{1/2}a_j$, $j = 1, \dots, N$, и равновероятным независимым управлением при $\tau \to \infty$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(v^*(\mathbf{n}) \le x) \to \Phi\left(\mathbf{a} + x\frac{m}{n}\mathbf{e}; 0, \Sigma_N\right),$$

где

$$\Phi(x; 0, \Sigma_N) = \int\limits_{\Omega(x)} \psi(z_1, \dots, z_{N-1}) dz_1 \dots dz_{N-1}, \qquad \mathbf{e} = (1, \dots, 1),$$

$$\Omega(x) = \{(z_1, \dots, z_{N-1}) \colon\ z_1 < x_1, \dots, z_{N-1} < x_{N-1}, z_1 + \dots + z_{N-1} > -x_N\},$$

$$\psi(z_1, \dots, z_{N-1}) = \frac{Q^Q}{(2\pi)^{N-1}} \exp\left\{ -\frac{Q}{2}\sum_{i=1}^{N-1} z_i^2 - \frac{Q}{2}\left(\sum_{i=1}^{N-1} z_i\right)^2 \right\}, \quad a = (a_1, \dots, a_N).$$

§ 4. СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОНЕЧНОГО РАНГА

Проводя исследования в рамках теоретико-автоматных моделей, естественно предположить, что управляющая последовательность перемешивающего автомата вырабатывается некоторым конечным автоматом со случайным входом или каким-либо другим генератором случайных чисел. В наиболее простой модели можно считать, что на вход этого конечного автомата поступает последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Тогда последовательность состояний автомата будет однородной цепью Маркова, а выходная последовательность — функцией однородной цепи Маркова. Для изучения вероятностных свойств функций цепей Маркова можно воспользоваться методами линейной алгебры, а точнее, аппаратом теории матриц. В связи с этим возникает необходимость в развитии матричных методов анализа дискретных случайных последовательностей. Некоторые результаты в этом направлении были получены в работах [13, 14]. Поэтому наряду с функциями стационарных цепей Маркова в качестве управляющих последовательностей естественно рассматривать более общие классы дискретных случайных последовательностей, к которым, в частности, относятся и функции цепей Маркова. Символом T будем в дальнейшем обозначать операцию транспонирования вектора или матрицы.

Определение 4. Последовательность случайных величин $\xi_t, t = 1, 2, \dots$, принимающих значения из множества $\Sigma = \{\lambda^1, \dots, \lambda^N\}$, называется случайной последовательностью конечного ранга (СПКР), если существуют такие вектор-строка $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_R)$, вектор-столбец $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_R)^T$ и набор матриц $A_1, \dots, A_N$ размера $R \times R$ с действительными коэффициентами, что справедливо следующее представление

для конечномерных распределений случайной последовательности:

$$\mathbf{P}(\xi_1 = \lambda_1, \dots, \xi_k = \lambda_k) = p(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \pi A_{\lambda_1} \dots A_{\lambda_k} \eta,$$

для любых $k = 1, 2, \dots$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Sigma$.

Матрицу $A = A_1 + \dots + A_N$ будем далее называть порождающей матрицей СПКР ξ_t. Нетрудно заметить, что СПКР ξ_t будет стационарной, если выполняется соотношение $\pi A = \pi$. Действительно, в этом случае для произвольных $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $j_1, \dots, j_t \in \Sigma$ справедливы равенства

$$\mathbf{P}(\xi_{t+1} = \lambda_1, \dots, \xi_{t+k} = \lambda_k) = \sum{}^{*} \pi A_{j1} \dots A_{jt} A_{\lambda_1} \dots A_{\lambda_k} \eta =$$
$$= \pi A^t A_{\lambda_1} \dots A_{\lambda_k} \eta = \pi A_{\lambda_1} \dots A_{\lambda_k} \eta = P(\xi_1 = \lambda_1, \dots, \xi_k = \lambda_k),$$

где символ $\sum^{*}$ означает суммирование по всевозможным цепочкам состояний $j_1, \dots, j_t$ из множества Σ.

В качестве примера приведем стационарную СПКР с двумя состояниями 1 и 0, с задающими векторами

$$\pi = (1, 0, 1, 0), \qquad \eta(1/2, 3/16, 1/2, 5/16) \tag{16}$$

и матрицами

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{Vmatrix}. \tag{17}$$

Как видно из (16) и (17), элементы порождающих СПКР векторов и матриц могут принимать отрицательные значения, и на суммы элементов строк матриц не накладываются ограничения, аналогичные ограничениям, которым удовлетворяют стохастические матрицы.

Описанная выше СПКР реализуется автоматом с тремя элементами памяти, на вход которого поступает последовательность X_t независимых и равновероятных случайных величин, принимающих значения 1 и 0. Состояниями этого автомата являются двоичные векторы $z = (z^0, z^1, z^2)$, занумерованные следующим образом: $j(000) = 0$, $j(010) = 1$, $j(011) = 2$, $j(100) = 3$, $j(001) = 4$, $j(101) = 5$, $j(110) = 6$, $j(111) = 7$. Последовательность состояний $Z_1, Z_2, \dots$, реализуемая автоматом в результате переработки последовательности независимых и равновероятных двоичных случайных величин X_t, $t = 1, 2, \dots$, с помощью функции переходов $\delta(z, x) = (z^1 z^0 \oplus (z^1 \oplus 1) z^2, z^1, x)$ образует цепь Маркова, последовательность выходных символов автомата, получаемая с помощью функции выходов $\lambda(z, x) = z^1(z^0 \oplus 1) \oplus z^1 z^2$, является функцией цепи Маркова, и, следовательно, принадлежит к классу СПКР.

Условия эргодичности СПКР легко выражаются в терминах характеристических чисел порождающей матрицы СПКР. Для этого необходимо и достаточно, чтобы одно из характеристических чисел было равно единице, а модули остальных были меньше единицы (см. [13]).

Пусть на вход конечного автомата поступает последовательность независимых одинаково распределенных величин. Тогда выходная последовательность такого автомата будет функцией цепи Маркова, и, следовательно, стационарной случайной последовательностью конечного ранга. Известно (см. [5]), что для функции эргодической цепи Маркова $\xi_1, \xi_2, \dots$ сумма случайных величин $S_t = \xi_1 + \dots + \xi_t$ асимптотически нормальна. Поэтому для исследования времени самонастройки перемешивающего автомата с такой управляющей последовательностью можно воспользоваться упомянутыми

выше результатами. Найдем необходимые для описания предельного распределения времени самонастройки перемешивающего автомата с N накопителями и одним входом характеристики вектора $h(t) = (h_1(t), \dots, h_N(t))$ частот появления значений j в последовательности $\xi_1, \dots, \xi_t$. Воспользуемся представлением для координат вектора частот $h(t)$ в виде $h_j(t) = I_j(\xi_1) + \dots + I_j(\xi_t)$, где $I_j(x)$ — индикатор состояния j ($I_j(x) = 1$, если $x = j$, $I_j(x) = 0$, если $x \neq 1$). Математическое ожидание случайной величины $h_j(t)$ можно записать в виде

$$\mathbf{E}\, h_j(t) = \mathbf{P}(\xi_1 = j) + \dots + \mathbf{P}(\xi_t = j) = tp_j,$$

где $p_j = \mathbf{P}(\xi_k = j) = \pi A_j \eta$. Обозначим через $A^*(t)$ матрицу

$$A^*(t) = \sum_{k=1}^{t-1} (t-k) A^{k-1}.$$

Тогда дисперсию случайной величины $h_j(t)$ можно записать в виде

$$\mathbf{D}\, h_j(t) = t\pi A_j \eta + 2\pi A_j A^*(t) A_j \eta - t^2 (\pi A_j \eta)^2,$$

ковариация координат $h_i(t)$ и $h_j(t)$ при $i \neq j$ имеет вид

$$\operatorname{cov}(h_i(t), h_j(t)) = \pi[A_i A^*(t) A_j + A_j A^*(t) A_i] - t^2 (\pi A_i \eta)(\pi A_j \eta).$$

Заметим в заключение, что характеристическая функция случайной величины ξ_t может быть записана в форме

$$\chi(u) = \exp\{iu\xi\} = \pi H(u) \eta,$$

где

$$H(u) = \sum_x A_x \exp\{iux\}.$$

Распределение суммы $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ выражается через n-кратную свертку матричных функций в виде

$$\mathbf{P}(S_n = x) = \pi A_x^{*n} \eta.$$

Под сверткой матричных функций A_x и B_x понимаем матрицу

$$C_x = (A \star B)_x = \sum_v A_v B_{x-v} = \sum_v A_{x-v} B_v.$$

Характеристическая функция суммы S_n случайных величин имеет вид

$$X_n(u) \exp\{iuS_n\} = \pi (H(u))^n \eta.$$

Известно, что при $n \to \infty$ для случайной последовательности, являющейся функцией цепи Маркова, характеристическая функция $X_n(u)$ стремится при $u = \tau/n^{1/2}$, где τ фиксировано, к $\varphi(\tau) = \exp\{-\tau^2/2\}$.

§ 5. ПЕРЕМЕШИВАЮЩИЕ АВТОМАТЫ С ДВУМЯ НАКОПИТЕЛЯМИ

Исследуем более подробно наиболее важный в прикладном аспекте случай $N = 2$. Этот случай рассматривался в работах [8–11].

Прежде всего заметим, что предельное распределение случайной величины ν целиком и полностью зависит от распределения координаты $h_1(t)$ вектора $h(t) = (h_1(t), h_2(t)$, поскольку $h_1(t) + h_2(t) = t$. Пусть $N = 2$, $m = 1$ и на управление ПА поступает стационарная последовательность независимых случайных величин, принимающих значения 1 и 0 с вероятностями p_1 и p_2, $p_1 + p_2 = 1$, а длины накопителей n_1 и n_2 могут быть представлены в виде

$$n_1 = p_1\tau - a_1\tau^{1/2}, \quad n_2 = p_2\tau - a_2\tau^{1/2}, \quad n_1 + n_2 = \tau + (a_1 + a_2)\tau^{1/2}, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2),$$
$$\mathbf{p} = (p_1, p_2), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2), \quad \nu^*(\mathbf{n}) = \nu(\mathbf{n} - \tau)/\tau^{1/2}, \quad h^*(t) = (h(t) - t\mathbf{p})/(\sigma t^{1/2}).$$

Тогда при $\tau \to \infty$ с учетом асимптотической нормальности $h_1(t)$ непосредственные вычисления типа

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\nu^*(\mathbf{n}) \le x) &= \mathbf{P}(\nu(\mathbf{n}) \le \tau + x\tau^{1/2}) = \mathbf{P}(h(\tau + x\tau^{1/2}) \ge \mathbf{p}\tau - \mathbf{a}x\tau^{1/2}) = \\ &= \mathbf{P}(h_1(\tau + x\tau^{1/2}) \ge p_1\tau - a_1\tau^{1/2}, h_2(\tau + x\tau^{1/2}) \ge p_2\tau - a_2\tau^{1/2}) = \\ &= \mathbf{P}(p_1\tau - a_1\tau^{1/2} \le h_1(\tau + x\tau^{1/2}) \le p_1\tau + (x + a_2)\tau^{1/2}) = \\ &= \mathbf{P}(-(xp_1 + a_1) + o(1) \le \sigma h_1^*(\tau + x\tau^{1/2}) \le \\ &\le xp_2 + a_2) = \Phi((a_1 + xp_1)/\sigma) + \Phi((a_2 + xp_2)/\sigma) - 1\end{aligned}$$

приводят к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 4. *Распределение* $\mathbf{P}(\nu^*(\mathbf{n}) \le x)$ *времени самонастройки перемешивающего автомата с двумя накопителями длины* $n_1 = p_1\tau - a_1\tau^{1/2}$ *и* $n_2 = p_2\tau - a_2\tau^{1/2}$, *на управление которого поступает последовательность независимых случайных величин, принимающих значения* 1 *и* 2 *с вероятностями* p_1 *и* p_2, $p_1 + p_2 = 1$ *при* $\tau \to \infty$ *удовлетворяет соотношению*

$$\mathbf{P}(\nu^*(\mathbf{n}) \le x) \to \Phi((a_1 + xp_1)/\sigma) + \Phi((a_2 + xp_2)/\sigma) - 1,$$

где $\Phi(x)$ *— функция стандартного нормального распределения.*

Ранее, в работах [8] и [9] был получен ряд асимптотических формул для первого и второго моментов времени самонастройки в случае $n_1 = np$, $n_2 = nq$, $q = 1 - p$, $\mathbf{P}(\xi_t = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_t = 0) = q$, где ξ_t — эргодическая цепь Маркова с двумя состояниями 1 и 0. Приведем две из них.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* ξ_t *— дважды стохастическая цепь Маркова с двумя состояниями* 1 *и* 0, $n_1 = np$, $n_2 = nq$, $p = q = 1/2$, $p_{10} = (1 - \delta)/2$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\nu(\mathbf{n}) = n + [(2(1+\delta)n)/\pi(1-\delta)]^{1/2} + \delta/(1-\delta) - [(1-3\delta^2)/4(1-\delta^2)] \times \\ \times [2(1+\delta)/\pi(1-\delta)n]^{1/2} + O(1/n^{3/2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\,\nu(\mathbf{n}) = (1-2/\pi)(1+\delta)n/(1-\delta) + [(1+\delta)/(1-\delta)][2(1+\delta)n/\pi(1-\delta)n]^{1/2} + \\ + \delta(1+2\delta)/(1-\delta)^2 + (1-3\delta^2)/\pi(1-\delta^2) + O(1/n^{1/2}).\end{aligned}$$

Обратимся теперь к исследованию асимптотического поведения моментов для управляющих последовательностей более общей вероятностной природы. Предварительно приведем некоторые вспомогательные результаты, которые потребуются в дальнейшем.

ЛЕММА 2. *Пусть случайная величина* λ *имеет распределение вероятностей*

$$F_\lambda(x) = \Phi(ax + c) + \Phi(bx) - 1, \quad x \ge x_0,$$
$$F_\lambda(x) = 0, \quad x < x_0,$$

где

$$x_0 = (-c)/(a+b), \quad a, b > 0, \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(u)du, \qquad \varphi(u) = (2\pi)^{-1/2}\exp\{-x^2/2\},$$

$$\gamma = ax_0 + c = -bx_0 = bc/(a+b).$$

Тогда

$$\mathbf{E}\,\lambda = [(a+b)/ab]\varphi(\gamma) - [c/a](1-\Phi(\gamma)), \tag{18}$$

$$\mathbf{D}\,\lambda = [(1+c^2)/a^2](1-\Phi(\gamma)) + b^{-2}\Phi(\gamma) + [(\gamma-2c)/a^2 - \gamma/b^2]\varphi(\gamma) - (\mathbf{E}\,\lambda)^2. \tag{19}$$

Доказательство. Справедливость формул (18) и (19) устанавливается непосредственным интегрированием выражений

$$\mathbf{E}\,\lambda = \int\limits_{x_0}^{\infty} x d\Phi(ax+c) + \int\limits_{x_0}^{\infty} x d\Phi(bx)$$

и

$$\mathbf{E}\,\lambda^2 = \int\limits_{x_0}^{\infty} x^2 d\Phi(ax+c) + \int\limits_{x_0}^{\infty} x^2 d\Phi(bx).$$

Приведем предельное распределение и асимптотические формулы моментов в случае стационарной управляющей последовательности. Символы γ_{1r} в управляющей последовательности $\gamma_r = (\gamma_{1r}, \gamma_{2r})$ будем далее обозначать через ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$, частоты $h_1(t)$ — через S_t.

Следующая теорема конкретизирует результаты теорем 1 и 2 на случай перемешивающего автомата с двумя состояниями.

Теорема 6. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — стационарная последовательность случайных величин, принимающих значения 1 и 0 с вероятностями $p_1 = p$ и $p_2 = q$, $p + q = 1$,*

$$h_1(t) = S_t = \xi_1 + \ldots + \xi_t, \quad \mathbf{D}\,S_t = t\sigma^2 + o(t), \quad \sigma > 0, \quad S_t^* = (S_t - tp)/\sigma t^{1/2}$$

$$\mathbf{P}(S_t^* < x) \to \Phi(x), \tag{20}$$

$$\mathbf{P}(|S_t^*| > x) = O(x^{-(4+\delta)}) \tag{21}$$

равномерно по t при $x \to \infty$. Тогда для случайных величин $\nu(\mathbf{n})$ и $\nu^*(\mathbf{n}) = (\nu(\mathbf{n}) - n)/n^{1/2}$ при $n_1 = np$, $n_2 = nq - zn^{1/2}$, $z \geq 0$, $n \to \infty$ выполняются соотношения

$$\mathbf{P}(\nu^*(\mathbf{n}) < x) \to \Phi(xp/\sigma) + \Phi((xq+z)/\sigma) - 1, \quad x \geq -z, \tag{22}$$

$$\mathbf{E}\,\nu(\mathbf{n}) = n + \alpha n^{1/2} + o(n^{1/2}), \tag{23}$$

$$\mathbf{D}\,\nu(\mathbf{n}) = \beta n + o(n), \tag{24}$$

где

$$\alpha = \sigma[\varphi(\gamma) - \gamma(1-\Phi(\gamma))]/pq, \qquad \gamma = pz/\sigma,$$

$$\beta = [(\sigma^2+z^2)/q^2](1-\Phi(\gamma)) + \sigma^2\Phi(\gamma)/p^2 - z\sigma\varphi(\gamma)/pq^2 - \alpha^2.$$

Если для рассматриваемых n_1 и n_2 имеет место неравенство $z < 0$, то следует положить $n_1 = nq$, $n_2 = np - z'n^{1/2}$, $z' \geq 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем 1 и 2. Вид предельного распределения (22) следует из связи величин $\nu(\mathbf{n})$ и S_t и условия (20) теоремы. Поэтому

для доказательства формул (23) и (24) достаточно воспользоваться соотношениями (18) и (19) с учетом равенств $a = q/\sigma$, $b = p/\sigma$, $c = z/\sigma$, $\gamma = pz/\sigma$, предварительно убедившись в справедливости утверждения о сходимости двух первых моментов случайных величин $\nu^*(\mathbf{n}) = (\nu(\mathbf{n} - n)/n^{1/2}$ при $n \to \infty$. Из результатов работы [6] следует, что для доказательства сходимости вторых моментов $\nu(\mathbf{n})$ при $n \to \infty$, достаточно, например, показать, что при $n \to \infty$ имеет место соотношение $\mathbf{P}(|\nu^*(\mathbf{n})| \geq x) = O(x^{-(2+\delta)})$ равномерно по $n \to \infty$ для некоторого положительного δ.

Действительно, в этом случае

$$\mathbf{E}\,|\nu^*(\mathbf{n})|^2 = 2\int\limits_{x_0}^{\infty} x\,\mathbf{P}(|\nu^*(\mathbf{n})| > x)dx$$

равномерно интегрируема при $n \to \infty$, откуда следует сходимость математических ожиданий случайных величин $|\nu^*(\mathbf{n})|$ и $|\nu^*(\mathbf{n})|^2$, а значит, и сходимость двух первых моментов случайной величины $\nu^*(\mathbf{n})$.

Покажем, что $\mathbf{P}(|\nu^*(\mathbf{n})| \geq x) = O(x^{-(2+\delta)})$, $\delta > 0$, равномерно по $n \to \infty$. Действительно,

$$\mathbf{P}(|\nu^*(\mathbf{n})| \geq x) = \mathbf{P}(\nu^*(\mathbf{n}) \geq x) + \mathbf{P}(\nu^*(\mathbf{n}) \leq x), \quad x > 0. \tag{25}$$

Оценим сначала правый хвост распределения $\nu^*(\mathbf{n})$. Пусть $t = [n + xn^{1/2}]$, $n, x \to \infty$. Тогда при достаточно больших n и $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(\nu^*(\mathbf{n}) \geq x) \leq \mathbf{P}(|S_t^*| \geq ax^{1/2}/\sigma) + \mathbf{P}(|S_t^*| \geq bx^{1/2}/\sigma), \tag{26}$$

где a и b — некоторые положительные числа и $a < p$, $b < q$.

Для оценки второй вероятности в правой части (25) воспользуемся тем фактом, что при $t = [n - xn^{1/2}]$, $n, x \to \infty$

$$\mathbf{P}(\nu^*(\mathbf{n}) \leq -x) < \mathbf{P}(|S_t^*| \geq ax^{1/2}/\sigma), \tag{27}$$

в силу неравенства $\nu(\mathbf{n}) \geq np$ имеем $t \geq np \to \infty$. Учитывая условие (21) теоремы, соотношения (26) и (27), получаем, что при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(|\nu^*(\mathbf{n})| \geq x) = O(x^{-(4+\delta)/2}) = O(x^{-(2+\delta)/2})$$

равномерно по $n \to \infty$.

Исследуем случай, когда $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — стационарная последовательность случайных величин, принимающих значения 1 и 0 с вероятностями p и q, соответственно, $p + q = 1$, $S_t = \xi_1 + \ldots + \xi_t$, $R_t = t - S_t$. Математическое ожидание случайной величины S_t равно tp. Предположим теперь, что $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — регулярная цепь Маркова с двумя состояниями 1 и 0, с начальным распределением $\pi = (\pi_1, \pi_0)$ и матрицей переходных вероятностей $P = ||p_{ij}||$, $p_{ij} > 0$, $i, j = 1, 0$. Тогда, полагая

$$\pi_1 = p = p_{01}/(p_{01} + p_{10}), \qquad \pi_0 = q = p_{10}/(p_{01} + p_{10}), \tag{28}$$

получим стационарную случайную последовательность с дисперсией $\mathbf{D}\,S_t = t\sigma^2 + o(t)$, $\sigma > 0$, где

$$\sigma^2 = p_{01}p_{10}(p_{00} + p_{11})(p_{01} + p_{10})^{-3}. \tag{29}$$

Теорема 7. *Асимптотические характеристики времени самонастройки $\nu^*(\mathbf{n})$ перемешивающего автомата $A_{21}(\mathbf{n})$ удовлетворяют соотношениям* (22)–(24), *если он управляется эргодической стационарной цепью Маркова с двумя состояниями. Параметры p, q и σ^2 определены в* (28), (29).

Доказательство. Известно, что сумма $S_t = \xi_1 + \ldots + \xi_t$ элементов регулярной цепи Маркова $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеет при $t \to \infty$ асимптотически нормальное

распределение (см. [3]). Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условия (21) теоремы 6.

Покажем, что имеет место оценка

$$\mathbf{P}(|S_t^*| \geq x) = O(x^{-r}) \tag{30}$$

для $x \to \infty$ и любого фиксированного r.

Введем обозначение

$$b(t, n, p) = C_t^n p^n (1-p)^{t-n}.$$

Тогда распределение p_{ij}^* случайной величины S_t для траекторий, у которых $\xi_1 = i, \xi_t = j$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
p_{11}^*(n) &= \pi_1 p_{01} \sum_{2,n} b(n-1, k-1, p_{10}) b(t-n-1, k-2, p_{01}),\\
p_{10}^*(n) &= \pi_1 p_{10} \sum_{1,n} b(n-1, k-1, p_{10}) b(t-n-1, k-1, p_{01}),\\
p_{01}^*(n) &= \pi_0 p_{01} \sum_{1,n} b(n-1, k-1, p_{10}) b(t-n-1, k-1, p_{01}),\\
p_{00}^*(n) &= \pi_0 p_{10} \sum_{2,n} b(n-1, k-2, p_{10}) b(t-n-1, k-1, p_{01}),
\end{aligned} \tag{31}$$

где символ $\sum\limits_{m,n}$ означает суммирование по k от m до n.

Известно, что в области $k = np_{10} + u_k(np_{10}p_{11})^{1/2}$, $n \to \infty$, $u_k = o(n^{1/\sigma})$, имеет место следующее представление для биномиальных вероятностей:

$$b(n, k, p_{10}) = (2\pi n p_{10} p_{11})^{1/2} \exp\{-u_k^2/2\}(1 + o(1)) \tag{32}$$

равномерно по k, а вне указанных областей имеет место экспоненциальная малость биномиальных вероятностей.

Аналогичное разложение имеет место и для $b(t-n, k, p_{01})$ при

$$k = (t-n)p_{01} + v_k((t-n)np_{01}p_{00})^{1/2}, \quad t-n \to \infty, \quad v_k = o((t-n)^{1/\sigma}).$$

Если $n = tp + x_n \sigma t^{1/2}$, $t \to \infty$, то

$$v_k(qp_{00}p_{01})^{1/2} = u_k(p_{10}p_{11})^{1/2} + x_n(p_{01} + p_{10})\sigma(1 + O(t^{1/2})).$$

Отсюда видно, что если $x_n \to \infty$, то либо $|u_k| \geq c|x_n|$, либо $|v_k| \geq c|x_n|$, где c — некоторая константа. Поэтому, учитывая (32) и экспоненциальную малость биномиальных вероятностей вне зоны нормального приближения, получаем из (31) формулу (30) для любого фиксированного $r > 0$. Следовательно, для регулярной цепи Маркова с двумя состояниями имеет место сходимость моментов любого фиксированного порядка. Используя результаты работы [3], можно получить целый спектр предельных теорем о поведении распределения случайной величины $\nu(\mathbf{n})$ при условии, что рассматриваемая управляющая последовательность изменяется с ростом числа ее элементов по схеме серий.

Рассмотрим теперь два параллельно и независимо работающих перемешивающих автомата $A(\mathbf{n})$ и $A^*(\mathbf{n})$. Пусть управляющие последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$ автоматов A и A^* соответственно независимы между собой и $S_t = \xi_1 + \ldots + \xi_t$, $S_t^* = \xi_1^* + \ldots + \xi_t^*$. Обозначим через $\nu(\mathbf{n}, \mathbf{n}^*) = \max(\nu(\mathbf{n}), \nu(\mathbf{n}^*))$ время самонастройки двух параллельно и независимо работающих автоматов $A(\mathbf{n})$ и $A^*(\mathbf{n})$.

Непосредственные расчеты приводят к следующим формулам.

Лемма 3. *Пусть случайная величина $\varkappa$ имеет распределение*

$$F_\varkappa(x) = (\Phi(ax) + \Phi(bx) - 1)(\Phi(cx) + \Phi(dx) - 1), \quad a, b, c, d > 0, \quad x \geq 0;$$

$$F_\varkappa(x) = 0, \quad x < 0, f(x,y) = \left(2(2\pi)^{1/2}\right)^{-1} (x^{-2} + y^{-2})^{1/2};$$
$$\psi(x,y) = (2\pi)^{-1}[1/xy + x^{-2}\operatorname{arctg}(y/x) + y^{-2}\operatorname{arctg}(x/y)].$$

Тогда

$$\mathbf{E}\,\varkappa = f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d),$$
$$\mathbf{D}\,\varkappa = \psi(a,c) + \psi(a,d) + \psi(b,c) + \psi(b,d) - (\mathbf{E}\,\varkappa)^2.$$

ТЕОРЕМА 8. *Пусть для S_t и S_t^* выполняются условия теоремы* 6 *и* $n_1 = np$, $n_2 = nq$, $n_1^* = np^*$, $n_2^* = nq^*$, $n \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\nu(\mathbf{n},\mathbf{n}^*) < n + xn^{1/2}) = (\Phi(px/\sigma) + \Phi(qx/\sigma) - 1)(\Phi(p^*x/\sigma^*) + \Phi(q^*x/\sigma^*) - 1),$$
$$\mathbf{E}\,\nu(\mathbf{n},\mathbf{n}^*) = n + \alpha n^{1/2} + o(n^{1/2}), \qquad \mathbf{D}\,\nu(\mathbf{n},\mathbf{n}^*) = (\beta - \alpha^2)n + o(n), \qquad x \geq 0,$$

где

$$\alpha = f(a,a^*) + f(a,b^*) + f(b,a^*) + f(b,b^*),$$
$$\beta = \psi(a,a^*) + \psi(a,b^*) + \psi(b,a^*) + \psi(b,b^*),$$
$$a = p/\sigma, \quad b = q/\sigma, \quad a^* = p^*/\sigma^*, \quad b^* = q^*/\sigma^*,$$

функции $f(x,y)$ и $\psi(x,y)$ введены в лемме 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левенштейн В. И.* О некоторых свойствах кодирования и самонастраивающихся автоматах для декодирования сообщений. — В сб.: Проблемы кибернетики. Вып. 11. — М.: Наука, 1964, С. 63–121.
2. *Winograd S.* Input-error limiting Automata. — J. Assoc. Comput. Mach., 1964, № 11.
3. *Добрушин Р. Л.* Предельные распределения для цепей Маркова из двух состояний. — Изв. АН СССР, серия матем., 1953, Т. 17, С. 291–330.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. — М.: Мир, 1967, 752 с.
5. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. — М.: Наука, 1965, 524 с.
6. *Лоэв М.* Теория вероятностей. — М.: ИЛ, 1962, 720 с.
7. *Иванов В. А.* Автоматные преобразования случайных последовательностей. — В сб. Труды по дискретной математике. Т. 2. — М.: ТВП, 1998, С. 151–168.
8. *Иванов В. А.* Некоторые задачи о простом случайном блуждании на прямой. — Кибернетика, 1974, № 5, С. 122–126.
9. *Иванов В. А., Новиков А. Е.* О цепях Маркова с двумя состояниями. — В сб.: Труды МИЭМ. Некоторые теоретические и прикладные вопросы теории вероятностей. Вып. 44. — М.: МИЭМ, 1975, С. 160–167.
10. *Иванов В. А., Ивченко Г. И.* О некоторых граничных функционалах для марковских блужданий. — Матем. заметки, 1978, Т. 23, Вып. 2, С. 315–325.
11. *Иванов В. А.* О блуждании двух точек на плоскости. — Научн. тр. Кубан. ун-та, 1979, № 282/2, с. 3–7.
12. *Иванов В. А.* О вероятностных автоматах. — В сб.: Труды МИЭМ. Некоторые прикладные вопросы теории вероятностей и математической статистики. Вып. 57. — М.: МИЭМ, 1976, С. 136–148.
13. *Альпин Ю. А.* Матричные теоремы об асимптотике немарковских случайных последовательностей. — В сб.: Вероятностные методы и кибернетика. — Казань: Каз. ун-т., 1985, Вып. 21, С. 3–10.
14. *Paz A.* Introduction to probabilistic automata. — New-York–London: Academia Press, 1971, 208 p.