Функциональный анализ и его приложения,
1983, т. 17, вып. 1, 89—90.

УДК 517.91

О ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СУПЕРМНОГООБРАЗИЯХ

В. Н. Шандер

Скажем, что обыкновенное дифференциальное уравнение [2] *вполне интегрируемо*, если его решение можно построить, т. е. получить с помощью конечного числа алгебраических операций, замен координат, интегрирований и взятия частных производных.

1. Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие, $\mathcal{T}$ — время, I — идеал в $C^\infty(\mathcal{M})$, порожденный всеми нечетными функциями, а $\mathrm{Vect}_{\mathcal{T}}\,\mathcal{M} = \{D \in \mathrm{Vect}\ \ \mathcal{M}\times\mathcal{T} \mid D\mid_{C^\infty(\mathcal{T})} = 0\}$.

Теорема 1. *Пусть $D_1, D_2 \in \mathrm{Vect}_{\mathcal{T}}\,\mathcal{M}$, причем $D_1 \equiv D_2 \bmod I^2\,\mathrm{Vect}_{\mathcal{T}}\mathcal{M}$, где $p(D_i) = 0\ (1)$, если $\dim\mathcal{T} = (1, 0)$ (если $\dim\mathcal{T} = (1,1)$), а φ_i — решение соответствующего D_i дифференциального уравнения. Тогда φ_2 можно построить по φ_1 и наоборот.*

Следствие. *Интегрирование четного поля D на $\mathcal{M}^{r,s}$ сводится к интегрированию соответствующего (см. [2]) поля πD на подстилающем многообразии M, и системы линейных неавтономных уравнений на $\mathbf{R}^s$. В частности, вполне интегрируемы дифференциальные уравнения на $\mathcal{R}^{0,s}$ и $\mathcal{R}^{1,s}$. Интегрирование гамильтоновой системы, заданной гамильтонианом H при четной форме $\sum dp_i dq_i + \sum\varepsilon_j d\xi_j^2$, где $\varepsilon_j = \pm 1$, сводится к интегрированию системы, заданной гамильтонианом πH при форме $\sum dp_i dq_i$ и системы линейных неавтономных уравнений с матрицей (a_{ij}), где $D \equiv \pi(D) + \sum a_{ij}\xi_i \dfrac{\partial}{\partial\xi_j} \bmod I^2$, а ξ — нечетные координаты на $\mathcal{M}$.*

Напомним, что интегрирование нечетного уравнения с (1,1)-мерным временем сводится к интегрированию четного уравнения [2].

Примеры применения теоремы и следствия доставляют динамические системы на орбитах коприсоединенного представления для супергрупп, на суперлагебрах Ли которых инвариантные полиномы только четные (таковы простые супералгебры Ли серий sl, osp, SH $(0\mid 2n)$ и соответствующие им супералгебры Каца—Муди; соответствующие системы — суперлиувилль, (p, q)-мерный волчок, твердое супертело и их обобщения [3], [4]).

Заметим, что вышеупомянутую линейную систему неавтономных уравнений можно решить, применяя T-экспоненту, расширив таким образом область действия теоремы на все системы с интегрируемой подстилающей системой.

2. Если $\sum du_i d\xi_i$ — нечетная форма, то поле πD на подстилающем многообразии, соответствующее нечетному гамильтониану $H \equiv \sum\xi_i f_i \bmod I^3$, имеет совершенно общий вид $\sum f_i(u)\,\partial/\partial u_i$, и для интегрирования поля D необходимы специальные методы.

Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие с канонической формой ω, а $\{,\}$ — соответствующая скобка. Скажем, что функция f — *первый интеграл* системы с гамильтонианом H, если $\{f, H\} = 0$, а функции $f_1, \ldots, f_n$ *находятся в инволюции, если* $\{f_i, f_j\} = 0$ *для всех* i, j.

Теорема 2 (аналог теоремы Лиувилля [1]). *Если гамильтонова система на супермногообразии $\mathcal{M}^{r,s}$, где $r + s = 2n$, имеет n первых интегралов $f_1, \ldots, f_n$ в инволюции, и $df_1, \ldots, df_n$ линейно независимы в точке $m \in \mathcal{M}$, то существует окрестность $\mathcal{U} \ni m$ с координатами $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$, причем $\omega = \sum df_i\, dg_i$.*

Доказательство. 1) Из равенств $D_{\mathcal{T}}(\varphi_1^* - \varphi_2^*) \equiv 0 \bmod I^2\,\mathrm{Vect}_{\mathcal{T}}\mathcal{M}$ и $\varphi_1^* - \varphi_2^*\mid_{\mathcal{T}} = 0$ (определение поля $D_{\mathcal{T}}$ см. в [2]) следует, что $\varphi_1^* \equiv \varphi_2^* \bmod I^2$. Положим $\varphi_2^* = (1 + A)\,\varphi_1^*$, где $A\colon C^\infty(\mathcal{M}\times\mathcal{T}) \to C^\infty(\mathcal{M}\times\mathcal{T})$ — некоторый оператор. Тогда уравнение на A имеет вид: $(1 + A)\,\varphi_1^*(D_1 - D_2)(\varphi_1^*)^{-1} = [D_{\mathcal{T}}, A]$.

Нам достаточно определить действие оператора A на $C^\infty(\mathcal{M})$ по индукции, строя $A_i \equiv A \bmod I^i$, где $A_1 = 0$. Положим $\Delta D = \varphi_1^*(D_1 - D_2)(\varphi_1^*)^{-1}$, тогда $\Delta D\,(C^\infty(\mathcal{M})) \subset I$ и $(1 + A)\,\Delta D = D_{\mathcal{T}}A$ на $C^\infty(\mathcal{M})$, откуда $D_{\mathcal{T}}A_{i+1} \equiv (1 + A_i + A_{i+1} - A_i)\times\Delta D \equiv (1 + A_i)\,\Delta D \bmod I^{i+1}$ и A_{i+1} определяется интегрированием; $A = A_{s+1}$.

2) Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{W}\times\mathcal{V}$ — окрестность точки m, а $f_1, \ldots, f_n$ и $h_1, \ldots, h_n$ — координаты на $\mathcal{W}$ и $\mathcal{V}$. Поскольку ω невырождено, то $A_\omega\colon \mathrm{Vect}\,\mathcal{U} \to \Omega^1\mathcal{U}$, $A_\omega D = i(D)\,\omega$ — изоморфизм. Множества $\{\partial/\partial f_1, \ldots, \partial/\partial f_n\}$ и $\{D_i = A_\omega^{-1}(df_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ состоят из

слабо невырожденных векторных полей (первое — по предположению, второе — благодаря обратимости оператора A_ω). Эти векторные поля независимы и в совокупности (из равенства $\sum k_i \partial/\partial f_i = \sum k_i' D_i = D$ следует $D(f_j) = \sum k_j' \{f_i, f_j\} = 0$, $D(h_i) = \sum k_i \partial h_i/\partial f_i$; поэтому они составляют базис в Vect $\mathcal{U}$. По лемме Пуанкаре для супермногообразий $\omega = dl$, где $l = \sum (a_i df_i + b_i dh_i)$. Определим d' как $C^\infty(\mathcal{W})$ — линейное продолжение дифференциала d с $\Omega(\mathcal{V})$ на $C^\infty(\mathcal{U})\,\Omega(\mathcal{V}) \subset \Omega(\mathcal{U})$; положим $l^1 = \sum b_i dh_i$, а $\omega' = d'l'$. Поскольку $i(D_j) = \omega = df_j$ и $i(\partial/\partial f_j)\,\omega' = 0$, то $\omega' = 0$; тогда $l' = d'\Phi = \sum \partial\Phi/\partial h_i dh_i$, $l = d\Phi + \sum (a_i - \partial\Phi/\partial f_i)\, df_i$ Следовательно, $\omega = \sum df_i dg_i$, где $g_i = a_i - \partial\Phi/\partial f_i$. Из невырожденности формы ω следует, что $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ — система координат.

Следствие вытекает из того, что $D = \pi D + \sum a_{ij}(u)\, \xi_i \partial/\partial\xi_j \bmod I^2$, если $p(D) = 0$.

Примеры применения теоремы 2 — динамические системы на орбитах коприсоединенного представления супергруппы $\mathfrak{Q}(n)$, представляющей функтор $C \to Q(n; C) = \{X \in \mathrm{Mat}(n \mid n; C) \mid [X, \pi_n] = 0\}$, где $\pi_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. Инвариантные полиномы на $\mathfrak{Q}(n)^*$ суть $H_k = \mathrm{otr}\, X^k$, где $\mathrm{otr}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \mathrm{tr}\, B$. Для H_2 получаем экзотический аналог цепочки Тоды. Другие примеры связаны со сжатием $\mathfrak{Q}(n) \to \mathrm{Po}(0 \mid 2n+1)$, [5] и соответствующими сериям $\mathfrak{Q}$, Po супералгебрами Каца—Муди.

Я благодарен Д. А. Лейтесу за постановку задачи и помощь.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.*— Функц. анализ, 1979, т. 13, № 1, с. 8—20. 2. *Шандер В. Н.*— Функц. анализ, 1980, т. 14, № 2, с. 91—92. 3. *Лезнов А. Н., Савельев М. В.*— Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1981, т. 12, № 1, с. 40—90. 4. *Olshanetsky M. A.*— preprint ITEP-62, Moscow: ITEP, 1982. 5. *Лейтес Д. А.*— Теор. и матем. физика, 1982, т. 52, № 2, с. 225—228.

Центральный научно-исследовательский институт комплексной автоматизации

Поступило в редакцию 19 августа 1982 г.