O. M. Pushin, K'-theory of quadrics with degenerations, *Algebra i Analiz*, 1998, Volume 10, Issue 4, 177–191

Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 4

K'-ТЕОРИЯ КВАДРИК С ВЫРОЖДЕНИЯМИ

© О. М. Пушин

§0. Введение

Для произвольной точной категории Квиллен в [Q] определил K_*-функтор градуированных абелевых групп таким образом, что K_0 совпала с обычной группой Гротендика категории, т. е. абелевой группой, образующими которой служат объекты рассматриваемой категории, а каждая точная последовательность $0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0$ дает соотношение $[A_1][A_2] = [A]$. Если $V(F)$ — категория векторных пространств над полем F, то $K_1(V(F)) = K_1^m(F) = F^*$, $K_2(V(F)) = K_2^M(F)$, $K_i^M(F)$ — K-группы, определенные Милнором. С произвольной схемой X связаны категория векторных расслоений на X – $P(X)$ и категория когерентных пучков на $X - M(X)$. Для соответствующих K-функторов вводятся обозначения: $K_*(X)$ и $K'_*(X)$. Эти группы изучались в той же статье Квиллена, в частности, была вычислена K-теория проективного пространства. Неособые квадратичные гиперповерхности в проективном пространстве были еще одним классом многообразий, для которых была посчитана K-теория (Суон [S]). Основная цель этой статьи — доказательство теоремы.

Теорема. *Пусть $X \subset \mathbb{P}_R^{d+1}$ — квадрика, определенная квадратичной формой q над коммутативным нетеровым кольцом R. Предположим, что $c(q) = R$, $c(q)$ — идеал коэффициентов. Тогда для любого $i \geqslant 0$ $K'_i(X) \simeq K'_i(R)^d \oplus K'_i(C_0(q))$, где $C_0(q)$ — четная часть алгебры Клиффорда формы q.*

Отметим, что подобный вопрос об обобщении вычислений на случай вырожденных многообразий был рассмотрен Салбергером [Sal] *для схем Севери–Брауэра.*

Несколько слов о структуре статьи. Необходимые предварительные сведения содержатся в §1; в §2 дается определение основного гомоморфизма

Ключевые слова: K_*-функтор, схема, квадрика, алгебра Клиффорда.

$u = (u_0, \dots, u_d) : K_i'(R)^d \oplus K_i'(C_0(q)) \to K_i'(X)$ и изучаются свойства пучка Суона; некоторый вариант формулы проекции доказывается в §3; §4, 5 посвящены доказательству инъективности и сюръективности гомоморфизма u; K-теория ненулевой квадрики над произвольным полем вычисляется в §6.

Задача была сформулирована И. А. Паниным. Я благодарен ему за полезные советы и замечания.

§1. Предварительные сведения

Пусть $X \subset \mathbb{P}_R^{d+1}$ — квадрика, определенная квадратичной формой q над коммутативным нетеровым кольцом R. Обозначим через B кольцо многочленов $R[x_0, \dots, x_{d+1}]$, а через $c(q)$ — идеал в R, порожденный коэффициентами q. Как обычно, B_n — множество всех однородных многочленов степени n. Очевидно, что это — R-модуль.

Лемма 1. *Если $c(q) = R$, то умножение на $q : B_n \to B_{n+2}$ для любого $n \geqslant 0$ является изоморфизмом на R-прямое слагаемое в B_{n+2}* [S, 5.1].

Следствие 1. *Пусть $A_n = B_n/qB_{n-2}$, тогда A_n — проективный R-модуль.*

Следствие 2. *Структурное отображение $f : X \to \operatorname{Spec} R$ — плоский морфизм.*

В категории когерентных пучков на X рассмотрим следующие подкатегории: $\mathcal{R}_n(X)$ — категория n-регулярных пучков на X, т. е. тех пучков $\mathcal{F}$, для которых $H^i(X, \mathcal{F}(n-i)) = 0$ для любого $i > 0$; $\mathcal{M}_n(X)$ — категория когерентных пучков $\mathcal{F}$ таких, что $H^p(X, \mathcal{F}, (r)) = 0$ для $r \geqslant n$, $p > 0$. Заметим, что $\mathcal{M}_n(X) \subset \mathcal{M}_{n+1}(X)$, $\mathcal{R}_n(X) \subset \mathcal{R}_{n+1}(X)$, $\mathcal{R}_n(X) \subset \mathcal{M}_n(X)$.

Лемма 2. *Пусть $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ — точная последовательность когерентных пучков на X.*

а) *Если $\mathcal{F}'(n)$ и $\mathcal{F}''(n)$ — регулярные (т. е. 0-регулярные), то $\mathcal{F}(n)$ — регулярный.*

б) *Если $\mathcal{F}(n)$ и $\mathcal{F}'(n+1)$ — регулярные, то $\mathcal{F}(n)$ — регулярный.*

в) *Если $\mathcal{F}(n+1)$ и $\mathcal{F}''(n)$ — регулярные, и отображение $f_*(\mathcal{F}(n)) \to f_*(\mathcal{F}''(n))$ — сюръективно, то $\mathcal{F}'(n+1)$ — регулярный* [Q, 8.1]. •

Лемма 3. *Для любого n имеются изоморфизмы $K(\mathcal{R}_n(X)) \simeq K(\mathcal{M}_n(X)) \simeq K'(X)$, индуцированные включениями $\mathcal{R}_n(X) \subset \mathcal{M}_n(X) \subset \mathcal{M}(X)$, где $\mathcal{M}(X)$ — категория когерентных пучков на X.*

Доказательство [Q, 8.2]. Аргументы Квиллена при доказательстве аналогичного результата для K-теории остаются в силе, поскольку используемая последовательность Кошуля для $\mathcal{O}_X$ локально расщепляется и, следовательно, остается точной после тензорного умножения на любой когерентный пучок. •

Лемма 4. *Пусть $B = R[x_0, \dots, x_{d+1}]$, $A = B/(q)$, $X = \operatorname{Proj} A$. Предположим, что $c(q) = R$. Тогда для любого R-модуля N*

1) $H^p(X, \mathcal{O}_X(n) \otimes N) = 0$, $p \neq 0, d$;
2) *для* $d \geqslant 1$ $H^0(X, \mathcal{O}_X(n) \otimes N) = A_n \otimes N$, $H^d(X \mathcal{O}_X(n) \otimes N) = N \otimes A^*_{-d-n}$;
3) *для* $d = 0$ *имеется короткая точная последовательность*

$$0 \to A_n \otimes N \to H^0(X, \mathcal{O}_X(n) \otimes N) \to N \otimes A^*_{-n} \to 0.$$

Доказательство [S, 5.2]. Для доказательства рассмотрим точную последовательность $0 \to B(n-2) \xrightarrow{q} B(n) \to A(n) \to 0$. Она расщепляется, поэтому имеем точную последовательность $0 \to B(n-2) \otimes N \to B(n) \otimes N \to A(n) \otimes N \to 0$, которая в свою очередь индуцирует последовательность пучков:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n-2) \otimes N \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) \otimes N \to \mathcal{O}_X(n) \otimes N \to 0.$$

Теперь утверждения леммы получаются из длинной когомологической последовательности и [Q, 8.2]. •

Следствие. *$\mathcal{O}_X(1)$ — регулярный пучок.*

Напомним теперь, как строится каноническая резольвента для регулярного пучка. Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_0(X)$, тогда имеется сюръективное отображение $\mathcal{O}_X \otimes \Gamma(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ [Q, 8.17] ($\Gamma(\mathcal{F})$ — глобальные сечения пучка $\mathcal{F}$). Введем обозначения: $T_0(\mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F})$, $Z_0(\mathcal{F}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{O}_X \otimes \Gamma(\mathcal{F}) \to \mathcal{F})$. Итак, имеем короткую точную последовательность $0 \to Z_0(\mathcal{F}) \to \mathcal{O}_X \otimes T_0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to 0$. $\mathcal{O}_X(1)$ — регулярный пучок, поэтому из леммы 2 следует, что $Z_0(\mathcal{F})(1)$ — регулярный пучок. Повторяя эту конструкцию, для любого $p > 0$ получим короткую точную последовательность: $0 \to Z_p(\mathcal{F}) \to \mathcal{O}_X(-p) \otimes T_p(\mathcal{F}) \to Z_{p-1}(\mathcal{F}) \to 0$. Это дает каноническую резольвенту для $\mathcal{F}$:

$$\ldots \to \mathcal{O}_X(-p) \otimes T_p(\mathcal{F}) \to \ldots \to \mathcal{O}_X \otimes T_0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to 0.$$

Замечание. Если $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_0(X)$, то $Z_{j-1}(\mathcal{F}) \in \mathcal{R}_j(X)$.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{F}$ — векторное расслоение, $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_0(X)$. Тогда для любого когерентного пучка $G \in \mathcal{R}_d(X)$ и $q \geqslant 1$ имеем* $\mathrm{Ext}^q(Z_{d-1}(\mathcal{F}), G) = 0$.

Доказательство [S, 6.1]. Применяя к последовательности

$$0 \to Z_p(\mathcal{F}) \to \mathcal{O}_X(-p) \otimes T_p(\mathcal{F}) \to Z_{p-1}(\mathcal{F}) \to 0$$

функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, G)$, получаем длинную точную последовательность

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^q(T_p(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X(-p), G) \to \mathrm{Ext}^q(Z_p(\mathcal{F}), G) \to \mathrm{Ext}^{q+1}(Z_{p-1}(\mathcal{F}), G) \to \ldots$$

Поскольку $\mathcal{F}$ — векторное расслоение, то $\mathrm{Ext}^q(T_p(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X(-p), G) = T_p^*(\mathcal{F}) \otimes H^q(X, G(p))$, G — d-регулярный пучок, поэтому для $q \geqslant 1$, $p + q \geqslant d$ имеем $H^q(X, G(p)) = 0$. Следовательно, для $q \geqslant 1$ $\mathrm{Ext}^q(Z_{d-1}(\mathcal{F}), G) \simeq \mathrm{Ext}^{q+1}(Z_{d-2}(\mathcal{F}), G) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Ext}^{q+d}(\mathcal{F}, G) = H^{q+d}(X, G \otimes \mathcal{F}^*) = 0$, так как $\dim X = d$ [H, 3.2]. •

§2. Свойства пучка $\mathcal{U}$

Определим функторы $U_n : \mathcal{M}(R) \to \mathcal{M}(X)$, $U_n(M) = \mathcal{O}_X(-n) \otimes M$, $n = 0, \ldots, d-1$. U_n — точные функторы, так как $f : X \to \mathrm{Spec}\, R$ — плоский морфизм (§1, лемма 1, следствие 2).

Определение. $\mathcal{U} = Z_{d-1}(\mathcal{O}_X(1))$.

Сделав одно дополнительное предположение относительно формы q, позже в этом параграфе мы докажем, что $\mathcal{U}$ — плоский $f^{-1}(C_0)$-модуль, поэтому можно определить следующий точный функтор $U : \mathcal{M}(C_0(q)) \to \mathcal{M}(X)$, $U(M) = \mathcal{U} \otimes_{C_0} M$. Итак, появился гомоморфизм градуированных абелевых групп $u =$

$(u_0, \ldots, u_{d-1}, u) : K'(R)^d \oplus K'(C_0(q)) \to K'(X)$. В §4, 5 будет доказано, что u — изоморфизм.

Вернемся теперь к $\mathcal{U}$. Есть другое определение этого пучка, использующее последовательность Клиффорда: Cliff(M):

$$\ldots \to \mathcal{O}_X(-n) \otimes M_{n+d+1} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X(-n+1) \otimes M_{n+d} \to \ldots,$$

где $M = M_0 \oplus M_1$ — градуированный $C(q)$-модуль (нижние индексы в последовательности берутся по модулю 2), φ — отображение, связанное с умножением Клиффорда (если q задана на свободном модуле с базисом $\{l_i\}$ и $\{x_i\}$ — двойственный базис, то $\varphi = \Sigma x_i \otimes l_i$). Пусть $\mathcal{U}_n(M) = \mathrm{Coker}(\mathcal{O}_X(-n-2) \otimes M_{n+d+1} \to \mathcal{O}_X(-n-1) \otimes M_{n+d})$. Тогда $\mathcal{U} \simeq \mathcal{U}_{d-1}(C(q))$ [S, §8], т. е. $\mathcal{U} = \mathrm{Coker}(\mathcal{O}_X(-d-1) \otimes C_0 \to \mathcal{O}_X(d) \otimes C_1)$.

Предложение 1. *Предположим, что $c(q) = R$. Тогда $\mathcal{U}$ — плоский $f^{-1}C_0(q)$-модуль.*

Доказательство. Мы имеем точную последовательность $\mathcal{O}_X(-d-1) \otimes C_0 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X(-d) \otimes C_1 \to \mathcal{U} \to 0$. Следуя Суону, напишем соответствующую последовательность на проективном пространстве:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d-1) \otimes C_0 \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d) \otimes C_1 \to \mathcal{U} \to 0 \qquad (*)$$

(Φ — инъективно, поскольку $\Phi^2 = q(x)$, и q — регулярный элемент в кольце $R[x_0, \ldots, x_{d+1}]$, согласно лемме 1, §1). Последовательность Клиффорда расщепляется [S, 8.2], поэтому для произвольного C_0-модуля M_0 мы имеем точную последовательность:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d-1) \otimes C_0 \otimes_{C_0} M_0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d) \otimes C_1 \otimes_{C_0} M_0 \to \mathcal{U} \otimes_{C_0} M_0 \to 0.$$

Теперь докажем один вспомогательный результат.

Лемма. C_1 *— проективный C_0-модуль.*

Доказательство. Можно считать, что R — локальное кольцо. Тогда из условия $c(q) = R$ следует, что существует $a : q(a) \in R^*$, а умножение на a дает желаемый изоморфизм $C_1 \simeq C_0$. •

Итак, $\mathrm{Tor}^1_{C_0}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d) \otimes C_1, M_0) = 0$. Воспользовавшись вышеприведенной последовательностью, заключаем, что $\mathrm{Tor}^1_{C_0}(\mathcal{U}, M_0) = 0$ для любого C_0-модуля M_0, т. е. $\mathcal{U}$ — плоский $f^{-1}(C_0)$-модуль. •

Лемма 1. $\mathcal{U}$ *— векторное расслоение.*

Доказательство. Это следует из описания $\mathcal{U}$ как ядра в канонической резольвенте для $\mathcal{O}_X(1)$. •

Теорема 1. $\mathrm{End}_X(\mathcal{U}) \simeq C_0(q)$. [S, 8.8].

Следствие. $\mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U}$ *— плоский $f^{-1}C_0(q)$-модуль.*

Доказательство. $\mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U}$ — $\mathrm{End}_X(\mathcal{U})$-модуль со структурой, индуцированной вторым сомножителем. Из предыдущей теоремы следует, что $\mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U}$ — $C_0(q)$-модуль. Поскольку модульная структура индуцирована $\mathcal{U}$, то, в частности, имеет место следующий изоморфизм: $(\mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U}) \otimes_{C_0} M \simeq \mathcal{U}^* \otimes (\mathcal{U} \otimes_{C_0} M)$. Кроме того, $\mathcal{U}^*$ — векторное расслоение (лемма 1), таким образом, $\mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U}$ — плоский $f^{-1}(C_0(q))$-модуль. •

§3. Формула проекции

Предложение 1. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм нетеровых схем, $\mathcal{A}$ — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_Y$-алгебр, $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Предположим, что $\mathcal{A}$ — нетерова слева алгебра, $\mathcal{F}$ — плоский $f^{-1}(\mathcal{A})$-модуль, $R^iF_*(\mathcal{F}) = 0$ для $i > 0$. Тогда*

а) *для произвольного квазикогерентного пучка $\mathcal{O}_Y$-модулей M, который к тому же является конечно порожденным $\mathcal{A}$-модулем, имеют место: $R^if_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} M) = 0$ для $i > 0$ и $f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} M) = f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{A}} M$.*

б) *$f_*(\mathcal{F})$ — плоский $\mathcal{A}$-модуль.*

Доказательство. Заметим сначала, что $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} M$ — обозначение для $\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{A}} f^*M$.

Лемма. $\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{A}} f^*M \simeq \mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}} f^{-1}M$.

Доказательство. Введем обозначение $\mathcal{L}$ для $\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{F} \otimes_{f^*\mathcal{A}} f^*M$ — пучок, ассоциированный с предпучком $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{L}} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}M)$. Имеется естественное отображение $t : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{L}} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}M) \to \mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}} f^{-1}M$. Утверждается, что t — изоморфизм. Это — локальный вопрос, поэтому можно считать, что $f : \operatorname{Spec} T \to \operatorname{Spec} R$, $\mathcal{A}$ — нетерова слева R-алгебра, M — конечно порожденный $\mathcal{A}$-модуль. Тогда можно написать точную последовательность $\mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^n \to M \to 0$ для некоторых $k, n \in \mathbb{N}$; f^{-1} — точный функтор, $\otimes$ — точен справа, и мы имеем коммутативную диаграмму с точными строками:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{L}} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{A}^k) & \xrightarrow{t} & \mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}} f^{-1}\mathcal{A}^k \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{L}} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{A}^n) & \xrightarrow{t} & \mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}} f^{-1}\mathcal{A}^n \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{L}} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} M) & \xrightarrow{t} & \mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}} f^{-1}M \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}
$$

Следовательно, t — изоморфизм. •

Утверждения предположения можно доказывать локально по Y, поэтому пусть $Y = \operatorname{Spec} R$, $\mathcal{A}$ — нетерова слева R-алгебра, M — конечно порожденный $\mathcal{A}$-модуль. Известно, что $R^i f_*(\mathcal{F}) = 0$ для $i > \dim X = d$ (теорема Гротендика [H, 3.2]). Так как M — конечно порожденный $\mathcal{A}$-модуль, мы можем написать точную последовательность $0 \to N \to \mathcal{A}^n \to M \to 0$ (N также является конечно порожденным $\mathcal{A}$-модулем). $\mathcal{F}$ — плоский $f^{-1}\mathcal{A}$-модуль, поэтому точна последовательность $0 \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} N \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^n \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} M \to 0$. Ей соответствует последовательность когомологий:

$$\ldots \to R^{i-1} f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} M) \to R^i f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} N) \to R^i f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^n) \to \ldots$$

В силу того что $R^i f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^n) = R^i f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^n = 0$ для $i > 0$, $R^i f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} M)$ изоморфен $R^{i+1} f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} N)$. Следовательно, $R^d f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} M) = 0$. Но N — конечно порожденный модуль, поэтому $R^d f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} N) = 0$, откуда $R^{d-1} f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} M) = 0\ldots$ Таким образом, $R^i f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} M) = 0$, $i > 0$ и точна следующая последовательность: $0 \to f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} N) \to f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^n) \to f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} M) \to 0$. Рассмотрим конечное представление для M: $\mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^n \to M \to 0$. Из него получается точная последовательность: $f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^k) \to f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^n) \to f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} M) \to 0$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ $f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^m) \simeq f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^m$. Далее, имеется коммутативная диаграмма с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^k) \arrow[r] & f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^n) \arrow[r] & f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} M) \arrow[r] & 0 \\
f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^k \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^n \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{A}} M \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Таким образом, $f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} M) \simeq f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{A}} M$. Наконец, рассмотрим короткую точную последовательность конечно порожденных $\mathcal{A}$-модулей $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$. Из предыдущего следует точность последовательности: $0 \to f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} M_1) \to f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} M) \to f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}} M_2) \to 0$ или $0 \to f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{A}} M_1 \to f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{A}} M \to f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{A}} M_2 \to 0$. Это значит, что $f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{A}} \cdot : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ — точный функтор и $f_*(\mathcal{F})$ — плоский $\mathcal{A}$-модуль. •

Следствие 1. *Пусть $f : X \to Y$ — плоский морфизм нетеровых схем и M — когерентный $\mathcal{O}_Y$-модуль, $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на X такой, что $R^i f_*\mathcal{F} = 0$, $i > 0$. Тогда*

1) $R^i f_*(\mathcal{F}\otimes f^*M) = 0$, $i > 0$;
2) $f_*(\mathcal{F}\otimes f^*M) \simeq f_*(\mathcal{F})\otimes M$;
3) *если f — собственный морфизм, то $f_*\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на Y.*

Следствие 2. *Пусть $f : X \to Y$ — собственный морфизм, $\mathcal{A}$ — квазикогерентный пучок нетеровых слева $\mathcal{O}_Y$-алгебр. Предположим, что X имеет обильный пучок. Пусть $X_{\mathcal{A}}$ — категория когерентных $\mathcal{O}_X$-модулей, которые являются плоскими $f^{-1}\mathcal{A}$-модулями; $(Y, \mathcal{A})$ — категория когерентных $\mathcal{A}$-модулей. Тогда для любого $x \in K_0 X_{\mathcal{A}}$, $y \in K'_q(Y, \mathcal{A})$ имеем $f_x(x\otimes_{\mathcal{A}} f^*(y)) = f_x(x)\otimes_{\mathcal{A}} y$ в $K'_q(Y)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} \in X_{\mathcal{A}}$. Следуя Квиллену [Q, §7.2.9], напишем $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}(n)^{r_n}$, где $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F}\otimes L^{\otimes n}$, L — некоторая тензорная степень обильного пучка. $\mathcal{F}$ — плоский $f^{-1}\mathcal{A}$-модуль, L — локально свободный пучок, следовательно, $\mathcal{F}(n)$ — плоский $f^{-1}\mathcal{A}$-модуль. Кроме того, существует $n_0 \in \mathbb{N} : R^i f_*(\mathcal{F}(n)) = 0$ для $i > 0$, $n \geqslant n_0$. Пусть $X^0_{\mathcal{A}}$ — категория плоских $f^{-1}\mathcal{A}$-модулей G таких, что $R^i f_*(G) = 0$, $i > 0$. Тогда $K_*(X^0_{\mathcal{A}}) = K_*(X_{\mathcal{A}})$. Если $\mathcal{F} \in X^0_{\mathcal{A}}$, то $f_*(\mathcal{F})$ — плоский $\mathcal{A}$-модуль, поэтому $y \longrightarrow f_*(x) \otimes_{\mathcal{A}} y$ — гомоморфизм $K'_q(Y, \mathcal{A}) \longrightarrow K'_q(Y, \mathcal{A})$, индуцированный точным функтором $M \longrightarrow f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{A}} M$. Далее, $R^i f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} M) = 0$, $i > 0$, следовательно, $y \longrightarrow f_*(x \otimes f^* y)$ индуцирован точным функтором $M \longrightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes f^* M)$. Остается заметить, что $f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} M) \simeq f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{A}} M$. •

§4. Инъективность

В начале §2 были определены функторы $U_n : \mathcal{M}(R) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$, $U_n(M) = \mathcal{O}_X(-n) \otimes M$, $n = 0, \dots, d-1$; $U : \mathcal{M}(C_0(q)) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$, $U(M) = \mathcal{U} \otimes_{C_0(q)} M$. Эти функторы — точные (следствие 2, §1 и предложение 1, §2).

Лемма 1. *U_n принимают значения в категории $\mathcal{M}_0(X)$, $n = 0, \dots, d-1$.*

Доказательство. Заметим, что $H^i(\mathcal{O}_X(-n)) = 0$, $i > 0$, $n = 0, \dots, d-1$ (лемма 4, §1), поэтому $H^i(\mathcal{O}_X(-n) \otimes M) = 0$, $i > 0$, $n = 0, \dots, d-1$ (следствие 1, §3), т. е. $\mathcal{O}_X(-n) \otimes M \in \mathcal{M}_0(X)$. •

Лемма 2. *U принимает значения в категории $\mathcal{M}_0(X)$.*

Доказательство. Сначала убедимся в том, что пучок $\mathcal{U}$ лежит в категории $\mathcal{M}_0(X)$. Для этого рассмотрим уже появляющуюся ранее (в доказательстве предложения 1, §2) последовательность: $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n-d-1) \otimes C_0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n-d) \otimes C_1 \longrightarrow \mathcal{U}(n) \longrightarrow 0$. Применив к ней функтор глобальных сечений, получим длинную когомологическую последовательность:

$$\dots \longrightarrow H^i(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n-d)) \otimes C_1 \longrightarrow H^i(X, \mathcal{U}(n)) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n-d-1)) \otimes C_0 \longrightarrow \dots$$

Используя вычисление когомологий проективного пространства [H, 5.1], заключаем отсюда, что $H^i(X, \mathcal{U}(n)) = 0$ для $n \geqslant 0$, $i > 0$ и $\mathcal{U} \in \mathcal{M}_0(X)$. Для произвольного конечного порожденного C_0-модуля M его образом под действием функтора U является пучок $\mathcal{U} \otimes_{C_0} M$. Поскольку $\mathcal{U}$ — плоский $f^{-1}C_0$-модуль, то при вычислении когомологий предыдущего пучка можно воспользоваться формулой проекции из предложения 1, §3, поэтому $H^i(X, \mathcal{U}(n) \otimes_{C_0} M) = H^i(X, \mathcal{U}(n)) \otimes_{C_0} M = 0$ для $n \geqslant 0$, $i > 0$ и $U(M) = \mathcal{U} \otimes_{C_0} M \in \mathcal{M}_0(X)$. •

Определим теперь функторы:

$$W_n\colon \mathcal{M}_0(X) \to \mathcal{M}(R); \qquad W_n(\mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F}(n)), \quad n = 0, \dots, d-1$$
$$W\colon \mathcal{M}_0(X) \to \mathcal{M}(C_0(q)), \quad W(\mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{U}^*)$$

(напомним, что для пучка G на X через $\Gamma(G)$ обозначается множество его глобальных сечений).

Лемма 3. *W — точный функтор.*

Доказательство. Заметим, что если пучок G лежит в категории $\mathcal{M}_0(X)$, то и пучок $G \otimes U^*$ находится там же. Действительно, $H^i(X, G \otimes U^*) = \mathrm{Ext}^i(\mathcal{U}, G)$. Из того, что $H^p(X\mathcal{F}) = 0$ для $p > d$, следует включение $\mathcal{M}_0(X) \subset \mathcal{R}_d(X)$. Вспомним также, что $\mathcal{U} = Z_{d-1}(\mathcal{O}_X(1))$ и $\mathcal{O}_X(1) \in \mathcal{R}_0(X)$ (следствие после леммы 4, §1). Теперь, используя лемму 5, §1, получаем желаемое. Осталось сказать, что Γ — точный функтор на $\mathcal{M}_0(X)$, поэтому $W(\cdot) = \Gamma(\cdot \otimes \mathcal{U}^*)$ — точный функтор. •

Лемма 4. *W_n — точные функторы.*

Доказательство. Это следует из того, что если $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_0(X)$, то $\mathcal{F}(n) \in \mathcal{M}_0(X)$ для $n \geqslant 0$ и опять-таки Γ — точный функтор на $\mathcal{M}_0(X)$. •

Итак, имеется гомоморфизм $w : K_i^!(X) = K_i(\mathcal{M}_0(X)) \to K_i^!(R)^d \oplus K_i^!(C_0(q))$.

Предложение. *Гомоморфизм $wи$ представляется треугольной матрицей с изоморфизмами на диагонали.*

Доказательство. Ранее мы показали, что функторы U_i, U принимают значения в категории $\mathcal{M}_0(X)$, поэтому предложение можно доказывать, рассматривая композиции функторов. $W_iU_j = \Gamma(\mathcal{O}(i-j) \otimes M)$, следовательно, $W_iU_j(M) = 0$ для $i < j$ $W_iU_i(M) \simeq M$ (лемма 4, §1), $WU(M) = \Gamma(\mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U} \otimes_{C_0} M)$. Необходимо убедиться в том, что существует канонический изоморфизм $WU(M) \simeq M$. Докажем прежде всего одну лемму. •

Лемма 5. *$H^i(X, \mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U}) = 0$ для $i > 0$.*

Доказательство. Согласно определению $\mathcal{U} = Z_{d-1}(\mathcal{O}_X(1)) \in \mathcal{R}_d(X)$, поэтому из леммы 5, §1 следует, что $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = 0$ для $i > 0$, откуда $H^i(X, \mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U}) = \mathrm{Ext}^i(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = 0$ для $i > 0$. •

Поскольку $\mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U}$ — плоский $f^{-1}C_0$-модуль (следствие после теоремы 1, §2), то при вычислении глобальных сечений пучка $\mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U} \otimes_{C_0} M$, где M — конечно порожденный C_0-модуль, можно воспользоваться формулой проекции (§3.1): $\Gamma(\mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U} \otimes_{C_0} M) \simeq \Gamma(\mathcal{U}^* \otimes \mathcal{U}) \otimes_{C_0} M \simeq M$. Таким образом, $WU(M) \simeq M$. Осталось проверить, что $W_n \cup (M) = \Gamma(\mathcal{U}(n) \otimes_{C_0} M) = 0$, $n = 0, \dots, d-1$. Мы будем рассуждать аналогично предыдущему, чем объясняется появление следующей леммы.

Лемма 6. $H^i(X, \mathcal{U}(n)) = 0$; $i \geqslant 0$, $n = 0, \dots, d-1$.

Доказательство. Мы знаем, что пучок $\mathcal{U}$ лежит в категории $\mathcal{M}_0(X)$ (лемма 2 этого параграфа), поэтому $H^i(X, \mathcal{U}(n)) = 0$ для $i > 0$, $n \geqslant 0$. Кроме того, $\Gamma(\mathcal{U}(n)) = 0$ для $n = 0, \dots, d-1$ [S, 9.5]. •

Снова используя формулу проекции для вычисления функтора глобальных сечений (§3.1), получаем: $W_n U(M) = \Gamma(\mathcal{U}(n) \otimes_{C_0} M) = \Gamma(\mathcal{U}(n)) \otimes_{C_0} M = 0$, $n = 0, \dots, d-1$. Это заканчивает доказательство предложения. •

§5. Сюръективность

Рассмотрим для регулярного пучка $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \in \mathcal{R}_0(X)$) его каноническую резольвенту (§1):

$$0 \to Z_{d-1}(\mathcal{F}) \to \mathcal{O}_X(1-d) \otimes T_{d-1}(\mathcal{F}) \to \dots \to \mathcal{O}_X \otimes T_0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to 0.$$

Предложение. *Если $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_{-3}(X)$, то $Z_{d-1}(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{U} \otimes_{\mathrm{End}_X \mathcal{U}} \mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}, Z_{d-1}(\mathcal{F}))$.*

Доказательство. $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_{-3}(X)$, следовательно, $\mathcal{F}(-3) \in \mathcal{R}_0(X)$ и существует сюръективное отображение $\mathcal{O}_X \otimes \Gamma\mathcal{F}(-3) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(-3)$ [Q, 8.1.7]. Поскольку $\Gamma\mathcal{F}(-3)$ — конечно порожден, то можно найти $n < \infty$: $\mathcal{O}_X^n \twoheadrightarrow \mathcal{F}(-3)$ или $\mathcal{O}_X^n(3) \twoheadrightarrow \mathcal{F}$. Если G — ядро этого отображения, то, поскольку $\mathcal{O}_X^n(3) \in \mathcal{R}_{-2}(X)$ и $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_{-3}(X)$, принимая во внимание лемму 2, §1, $G \in \mathcal{R}_{-2}(X)$. Еще раз, существует сюръективное отображение $\mathcal{O}_X \otimes \Gamma G(-2) \twoheadrightarrow G(-2)$, $\Gamma G(-2)$ — конечно порожден, поэтому можно найти $k < \infty$: $\mathcal{O}_X^k \twoheadrightarrow G(-2)$ или $\mathcal{O}_X^k(2) \twoheadrightarrow G$.

Итак, существует точная последовательность

$$\mathcal{O}_X^k(2) \to \mathcal{O}_X^n(3) \to \mathcal{F} \to 0. \qquad (*)$$

Рассмотрим теперь функтор $T(\cdot) = \mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}, Z_{d-1}(\cdot))$.

Лемма 1. *T — точный функтор на $\mathcal{R}_0(X)$.*

Доказательство. $Z_{d-1}(\cdot)$ — точный функтор на $\mathcal{R}_0(X)$. Если $\mathcal{F} \in \mathcal{R}_0(X)$, то $Z_{d-1}(\mathcal{F}) \in \mathcal{R}_d(X)$. Следовательно, $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{U}, Z_{d-1}(\mathcal{F})) = 0$ для $i > 0$ (лемма 5, §1). Таким образом, T как композиция точных функторов — точен. •

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{H}$ — векторное расслоение. Предположим, что $\mathcal{H} \in \mathcal{R}_{-1}(X)$. Тогда $\mathcal{U} \otimes_{\mathrm{End}_X \mathcal{U}} \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, Z_{d-1}(\mathcal{H})) \simeq Z_{d-1}(\mathcal{H})$.*

Доказательство [S, 6.4]. Существует естественное отображение $\mathcal{U} \otimes_{\mathrm{End}_X \mathcal{U}} \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, Z_{d-1}(\cdot)) \to Z_{d-1}(\cdot)$ и имеется коммутативная диаграмма, соответствующая последовательности (*):

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{U} \otimes_{\mathrm{End}_X \mathcal{U}} \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, Z_{d-1}(\mathcal{O}_X^k(2))) & \xrightarrow{\ \wr\ } & Z_{d-1}\mathcal{O}_X^k(2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{U} \otimes_{\mathrm{End}_X \mathcal{U}} \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, Z_{d-1}(\mathcal{O}_X^n(3))) & \xrightarrow{\ \wr\ } & Z_{d-1}\mathcal{O}_X^n(3) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{U} \otimes_{\mathrm{End}_X \mathcal{U}} \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, Z_{d-1}\mathcal{F}) & \longrightarrow & Z_{d-1}(\mathcal{F}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Таким образом, $\mathcal{U} \otimes_{\mathrm{End}_X \mathcal{U}} \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, Z_{d-1}\mathcal{F}) \simeq Z_{d-1}\mathcal{F}$. •

В силу того что $\mathrm{End}_X \mathcal{U} \simeq C_0(q)$ (теорема 1, §2), каноническая резольвента для пучка $\mathcal{F}$, лежащего в категории $\mathcal{R}_{-3}(X)$, теперь может быть записана в следующем виде:

$$0 \to \mathcal{U} \otimes_{C_0} T(\mathcal{F}) \to \mathcal{O}_X(1-d) \otimes T_{d-1}(\mathcal{F}) \to \ldots \to \mathcal{O}_X \otimes T_0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to 0.$$

Лемма 3. *$T_i(\cdot)$ — точные функторы на $\mathcal{R}_{-3}(X)$.*

Доказательство. Очевидно. •

Итак, имеются точные функторы: $T_i : \mathcal{R}_{-3}(X) \to \mathcal{M}(R)$, $i = 0, \ldots, d-1$; $T : \mathcal{R}_{-3}(X) \to \mathcal{M}(C_0(q))$. Они индуцируют гомоморфизм $t : K_i'(X) =$

$K_i(\mathcal{R}_{-3}(X)) \to K'_i(R)^d \oplus K'_i(C_0(q))$ $t = (t_0, \ldots, t_{d-1}t_d)$. Рассмотрим $\tilde{t} = (\tilde{t}_i)$, где $\tilde{t}_i = (-1)^i t_i$, $i = 0, \ldots, d$. Тогда из канонической резольвенты следует, что $u\tilde{t} = \pm id$, следовательно, u — сюръективно. Таким образом, доказана теорема.

Теорема. *Пусть $X \subset \mathbb{P}_R^{d+1}$ — квадрика, определенная квадратичной формой q над коммутативным нетеровым кольцом R. Предположим, что $c(q) = R$, $c(q)$ — идеал коэффициентов. Тогда $K'_i(X) \simeq K'_i(R)^d \oplus K'_i(C_0(q))$, где $C_0(q)$ — четная часть алгебры Клиффорда формы q.*

§6. K-теория

В этом параграфе будет доказано предложение.

Предложение. *Пусть $X \subset \mathbb{P}_k^{d+1}$ — квадрика, определенная ненулевой квадратичной формой q над полем k. Тогда имеет место изоморфизм градуированных абелевых групп: $K(X) \simeq K(k)^d \oplus K(\mathrm{Flf}(C_0(q)))$, где $\mathrm{Flf}(C_0(q))$ — категория конечно порожденных плоских $C_0(q)$-модулей.*

Доказательство в основном следует предыдущему, поэтому подробно рассмотрены будут лишь отличия. Определим функторы $U_n : \mathcal{P}(k) \to \mathcal{P}(X)$, $U_n(V) = \mathcal{O}_X(-r) \otimes V$, $n = 0, \ldots, d-1$. Очевидно, что они корректно определены и точны. Функтор $U : \mathrm{Flf}(C_0(q)) \to \mathcal{P}(X)$, $U(M) = \mathcal{U} \otimes_{C_0} M$. Для доказательства его корректности рассмотрим произвольный пучок $\mathcal{W}$ на X, тогда $\mathcal{W} \otimes (\mathcal{U} \otimes_{C_0} M) \simeq (\mathcal{W} \otimes \mathcal{U}) \otimes_{C_0} M$. Заметим, что функтор $(\cdot \otimes \mathcal{U}) \otimes_{C_0} M : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ является точным, поэтому то же самое верно для функтора $\cdot \otimes (\mathcal{U} \otimes_{C_0} M) : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$. Это показывает, что $\mathcal{U} \otimes_{C_0} M$ — векторное расслоение и U — корректно определенный точный функтор. Тем самым появляется гомоморфизм:

$$u = (u_0, \ldots, u_{d-1}, u) : K(k)^d \oplus K(\mathrm{Flf}(C_0(q))) \to K(X).$$

Как и раньше, можно убедиться в том, что значения функторов U_n, $n = 0, \ldots, d-1$ и U попадают в категорию $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{M}_0(X) = \mathcal{P}_0(X)$, поэтому имеет смысл определить функторы: $W_n : \mathcal{P}_0(X) \to \mathcal{P}(k)$; $W_n(\mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F}(n))$, $n = 0, \ldots, d-1$; $W : \mathcal{P}_0(X) \to \mathrm{Flf}(C_0(q))$, $W(\mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{U}^*)$. Корректность и точность W_n не вызывают сомнений.

Лемма. $\mathcal{U}^*$ *— плоский* $f^{-1}C_0$*-модуль.*

Доказательство. Рассмотрим кусок последовательности Клиффорда:

$$0 \to \mathcal{U} \to \mathcal{O}_X(-d+1) \otimes C_0 \to \mathcal{O}_X(-d+2) \otimes C_1 \to \mathcal{U}(2) \to 0.$$

Применим к этой последовательности функтор $\mathrm{Hom}_X(\cdot, \mathcal{O}_X)$:

$$0 \to \mathcal{U}^*(-2) \to \mathcal{O}_X(d-2) \otimes C_1^* \to \mathcal{O}_X(d-1) \otimes C_0^* \to \mathcal{U}^* \to 0.$$

Эта последовательность точна и расщепима, в частности, остается точной после умножения на произвольный конечно порожденный C_0-модуль M над C_0.

Лемма. $C_0^* \simeq C_0$, *как левые* C_0*-модули.*

Доказательство. Гомоморфизм $C_0 \to C_0^*$ определяется его заданием на $1 \in C_0$. Выберем в C_0 базис такой, что $l_i^2 = a_i \in K^*$, $f_j^2 = 0$. Тогда $1 \mapsto \{\Pi f_j \to 1\}$. Нетрудно убедиться в сюръективности этого отображения.

Отсюда уже легко следует плоскость пучка $\mathcal{U}^*$. •

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное векторное расслоение, тогда $\mathcal{F} \otimes \mathcal{U}^*$ — плоский $f^{-1}C_0$-модуль, кроме того, если $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_0(X)$, то $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{U}^*) = \mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ (лемма 3, §4, лемма 5, §1), поэтому при вычислении глобальных сечений можно воспользоваться предложением 1, §3. Итак, $\Gamma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{U}^*)$ — плоский C_0-модуль и W — корректный точный функтор. Теперь так же, как в §4, можно доказать инъективность гомоморфизма u. Что касается сюръективности u, то единственно функтор T требует еще нескольких слов. Напомним, что $T(\cdot) = \mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}, Z_{d-1}(\cdot)) = \Gamma(\mathcal{U}^* \otimes Z_{d-1}(\cdot))$ — точный функтор на $\mathcal{R}_0(X)$. Необходимо убедиться в том, что $T(\mathcal{F})$ лежит в категории $\mathrm{Flf}(C_0(q))$ для любого векторного расслоения $\mathcal{F}$ из категории $\mathcal{R}_0(X)$. Заметим, что $Z_{d-1}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{U}^*$ — плоский $f^{-1}C_0$-модуль и $H^i(X, Z_{d-1}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{U}^*) = \mathrm{Ext}^i(\mathcal{U}, Z_{d-1}(\mathcal{F})) = 0$ (лемма 5, §1), поэтому из предложения 1, §3 вытекает, что $\Gamma(\mathcal{U}^* \otimes Z_{d-1}(\mathcal{F}))$ — плоский C_0-модуль. Итак, имеются функторы: $T_i : \mathcal{R}_{-3}(X) \cap \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(k)$, $i = 0, \ldots, d-1$; $T : \mathcal{R}_{-3}(X) \cap \mathcal{P}(X) \to \mathrm{Flf}(C_0(q))$.

Используя каноническую резольвенту, теперь легко доказать сюръективность u.

Список литературы

[S] Swan R. G., *K-theory of quadric hypersurfaces*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), 113–153.

[Q] Quillen D., *Higher algebraic K-theory.* I, Algebraic K-Theory, I: Higher K-Theories (Proc. Conf. Seattle Res. Center, Battelle Memorial Inst., 1972), Lecture Notes in Math., vol. **341**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 85–147.

[H] Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.

[Sal] Salberger P., *K-theory of orders and their Brauer–Severi schemes*, Thèse Univ. Göteborg, 1985.

Поступило 20 июня 1997 г.