УДК 517.948.32:513.88+519.21

УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В. А. Малышев

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В обзоре приводится достаточно полная библиография теоретико-вероятностных работ, связанных с уравнениями типа классических уравнений Винера—Хопфа и с различными их обобщениями, за последние несколько лет по 1974 г. включительно. Однако ограничиться здесь рамками теории вероятностей было бы чистейшим анахронизмом: читатель не смог бы получить правильного представления о границах и перспективах развития теории. Поэтому автор последовательно прослеживает идеи и результаты в необходимых смежных областях, не претендуя на полноту библиографии в них.

Каждый обзор в какой-то степени отражает интересы автора: так и здесь наиболее подробно изложены результаты, связанные с существенно многомерными (см. ниже) уравнениями Винера—Хопфа. Следует отметить, что в обзор включена также мало известная советским математикам область применения таких уравнений, лежащая на пересечении теории вероятностей (точнее, теории случайных полей) и физики — точно решаемые модели статистической физики.

Нашей путеводной нитью будут следующие три постановки задач:

1. Классическая краевая задача для аналитических функций. Найти аналитическую внутри (вне) единичного круга D функцию $F_+(z)$ $(F_-(z))$ и непрерывную в замыкании этой области, такую, что при $z \in \Gamma = \{z: |z| = 1\}$

$$G(z) F_+(z) = F_-(z) + H(z), \tag{1}$$

где $G(z)$, $H(z)$ — заданные непрерывные функции на Γ.

Эта задача допускает обобщение на случай произвольного числа n комплексных переменных. Приведем такую постановку для $n=2$. Требуется найти функции $F_{++}(x, y)$, $F_{+-}(x, y)$,

$F_{-+}(x, y)$, $F_{--}(x, y)$, удовлетворяющие на $\Gamma\times\Gamma=\{(x, y):|x|=|y|=1\}$ уравнению

$$G(x, y)F_{++}(x, y)=G_1F_{+-}+G_2F_{-+}+G_3F_{--}+H(x, y), \qquad (2)$$

а также таким же, как и выше, условиям аналитичности и непрерывности соответственно при $|x|$, $|y|\leqslant 1$; $|x|\leqslant 1$, $|y|\geqslant 1$ и т. д. G, G_1, G_2, G_3, H — заданные непрерывные функции на $\Gamma\times\Gamma$.

2. Пусть теперь $\mathbf{Z}^\nu=\{(z_1, \ldots, z_\nu)\}$ — целочисленная решетка в ν-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^\nu$. Все рассматриваемые далее функции на $\mathbf{Z}^\nu$ будут принадлежать пространству $l^1(\mathbf{Z}^\nu)$. Через A_φ обозначим оператор свертки с функцией $\varphi: A_\varphi f=\varphi f$, а через P_T — оператор ортогонального проектирования $l^1(\mathbf{Z}^\nu)$ на подпространство $l^1(T)$, где $T\subset\mathbf{Z}^\nu$.

Уравнениями Винера—Хопфа в $T\subset\mathbf{Z}^\nu$ будем называть уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l_i} P_{T_i}\varphi_{ij}P_{T_{ij}}f=h, \qquad (3)$$

где f и h равны нулю вне T и выполнены условия: $T_i\cap T_k=\varnothing$ при $i\neq k$, $T_{ij}\cap T_{ik}=\varnothing$ при $j\neq k$, $\bigcup\limits_i T_i=T$, $\bigcup\limits_j T_{ij}=T$. Каждая из областей T_i и T_{ij} предполагается определенной конечным набором неравенств вида $a_1<\sum c_iz_i<a_2$, где c_i — целые числа, а a_1 и a_2 — произвольные, возможно равные $\pm\infty$ (если вместо $\mathbf{Z}^\nu$ рассматривается R^ν, то условие целочисленности c_i можно отбросить).

Стандартной областью для нас будет $\mathbf{Z}_+^n\times\mathbf{Z}^m$ или $\mathbf{Z}_+^n\times\mathbf{Z}^m\times V$, где V — произвольное конечное множество, а $\mathbf{Z}_+=\{i:i\geqslant 0,\ i\in\mathbf{Z}^1\}$. Из многих соображений в настоящее время можно сказать, что основной характеристикой сложности решения уравнений (3) в «общем случае» является максимальная коразмерность бесконечных граней областей T_i, T_{ij}.

Так, в стандартной ситуации, когда $\mathbf{Z}^m\times\mathbf{Z}_+^n\equiv T_i\equiv T_{ij}\equiv T$, $\varphi_{ij}\equiv\varphi$, и уравнения (3), следовательно, имеют вид

$$P_T\varphi f=h, \qquad (4)$$

сложность их решения характеризуется прежде всего числом n. Наиболее подробно мы рассмотрим случай с $n\geqslant 2$.

3. Рассмотрим теперь счетную однородную цепь Маркова с дискретным временем и множеством состояний $T\subset\mathbf{Z}^\nu$. Мы будем предполагать, что вероятности скачков за один шаг задаются стохастическим оператором $Q:l^1(T)\to l^1(T)$, имеющим вид (3).

В дальнейшем мы часто будем рассматривать случай, когда $T=\mathbf{Z}_+^n$, а уравнение (3) однородно и имеет вид

$$\pi - P_T \sum_{\Lambda} \varphi_\Lambda P_{T_\Lambda} \pi = 0, \tag{5}$$

где Λ — произвольное подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$, $T_\Lambda \{(z_1, \ldots, z_n): z_i = 0,\ i \overline{\in} \Lambda,\ z_i > 0,\ i \in \Lambda\}$, π — вектор стационарных вероятностей.

Если явное решение уравнений (4) в случае $n=0$ и произвольного m находится простым преобразованием Фурье, то уже в случае $n=1$, $m=0$, преобразование Фурье переводит уравнение (4) в краевую задачу (1). Такая неоднородная краевая задача была, по существу, впервые решена в 1931 г. в знаменитой работе Винера и Хопфа [163], хотя более частные случаи рассматривались ранее Племельи, Карлеманом и др. (за историческими сведениями мы отсылаем читателя к монографии [9]). Идея факторизации функции $G(z)$ в задаче (1) обобщалась и применялась в дальнейшем к различным ситуациям, а теория развивалась параллельно по разным направлениям. Определенный этап развития теории был подытожен в монографиях: по краевым задачам для аналитических функций — [9], по сингулярным интегральным уравнениям — [5, 12, 59], по уравнениям (Винера—Хопфа) с ядром, зависящим от разности аргументов — [18]. Одновременно эта теория получила различные применения в областях, полный список которых затруднительно даже привести (см. [76, 147]).

В нашем обзоре мы совсем не будем говорить об областях теории, отраженных в вышеупомянутых монографиях. В наших трех задачах эти области соответствуют в основном случаю уравнений Винера—Хопфа в области $\mathbf{Z}_+^1 \times \mathbf{Z}^m \times V$.

Начнем изложение с самых общих методов, пригодных для исследования произвольных размерностей и позволяющих получать достаточно общие, но довольно «грубые» результаты. Постепенно обозреваемые методы и результаты будут становиться все более тонкими и в то же время более частными.

§ 2. НЁТЕРОВОСТЬ И ТЕОРИЯ ИНДЕКСА. ПОДХОД, ОСНОВАННЫЙ НА АНАЛИЗЕ НЕКОММУТАТИВНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Невозможность применить идею Винера—Хопфа уже в случае $n=2$ в стандартной задаче и в других аналогичных задачах заставило проверить на уравнениях Винера—Хопфа общие методы функционального анализа, развитые ранее на других задачах. Прежде всего возник вопрос о нётеровости операторов Винера—Хопфа. В случае задач (2) и (3) при $\nu=2$ или $n=2$ теория нётеровости для ряда функциональных пространств с исчерпывающей полнотой была построена в работах И. Б. Симоненко [73—75]. Однако регуляризация соответствующих операторов строилась в этих работах в недостаточно явном виде.

Существуют различные способы более явной регуляризации. Для уравнения (4) в $\mathbb{Z}_+^2$ такая регуляризация получена в [156] (другой способ по существу содержится в [39, 42]).

Однако уже при $\nu=3$ даже вопрос о нётеровости соответствующих операторов оставался открытым. Ситуация здесь существенно прояснилась после появления работы Дугласа и Хоува [109].

Еще ранее для исследования обратимости конкретного оператора исследовались идеалы порожденной им некоммутативной операторной алгебры. Это позволило с единой точки зрения обозреть теорию регуляризации (т. е. сведения к уравнению Фредгольма) как ранее известных, так и новых операторов типа Винера—Хопфа (см. [100—103] и указанные там работы). В работе Дугласа и Хоува [109] была использована эта идея и изучена C^*-алгебра $\mathfrak{A}_n$, порожденная всеми операторами вида $P_{\mathbb{Z}_+^n} A_\varphi$ в пространстве $l^2(Z_+^n)$. Гомологическими методами были изучены идеалы этой C^*-алгебры и показано, что вопрос о нётеровости данного оператора из $\mathfrak{A}_n$ эквивалентен вопросу об обратимости некоторых операторов в $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Эти методы развивались затем Пилиди [64] применительно к более общим классам операторов.

Такие же методы были применены в [102] для получения при $n=2$ теорем об индексе (подсчет индекса для многомерных сверток см. также в [71]).

Возникающие здесь C^*-алгебры в основном имеют тип 1 и устроены, грубо говоря, как тензорные произведения ранее изученных более простых алгебр [100—103], соответствующих случаю $n=1$. Существует важная параллель этого подхода с более ранними физическими идеями.

Именно, уравнения в квантомеханической задаче n тел (например, с финитным потенциалом) можно представить в виде, близком к (3). Регуляризация этих уравнений [118] получалась с помощью так называемого разложения по связным диаграммам [162]. Можно показать, что регуляризацию здесь можно получить с помощью изучения соответствующей операторной алгебры и, наоборот, развить метод разложения по связным диаграммам, например, для уравнений Винера—Хопфа в $\mathbb{Z}_+^n$. Таким образом, эти два метода оказываются во многом эквивалентными. Для задачи n тел имеются также более тонкие методы (уравнения Фаддеева—Якубовского [117]), которые, однако, не удается перенести на случай общих операторов типа (4) в $\mathbb{Z}_+^n$.

Следует отметить также близкое к настоящей теме развитие алгебраических методов для псевдодифференциальных операторов, а также более общие теории индекса [56, 102, 103]. А. С. Дыниным было сформулировано понятие обобщенной фредгольмовости, полезное для изучения и обобщающее указанную выше индукцию по n в алгебрах $\mathfrak{A}_n$, а также выделен некоторый класс C^*-алгебр (основанный на работе Аллана [82]), для которых имеет место эта обобщенная фредгольмовость.

В работах Р. В. Дудучавы изучены уравнения Винера—Хопфа типа (3) с разрывными символами, причем для $n=2$ построена полная теория нётеровости.

Если на обе части уравнения (3) подействовать оператором P_V, где V — некоторое конечное множество в $\mathbf{Z}^\nu$, то возникнет вопрос: в какой степени получившаяся конечная система линейных алгебраических уравнений приближает уравнение (3). Это один из вопросов, стимулировавших развитие таких — проекционных — методов решения уравнений Винера—Хопфа (см. монографию [18]). Однако этим отнюдь не исчерпывается важность исследования проекционных методов решения. По существу проекционные методы берут свое начало от классических исследований Сеге (см., например, [19]) по тёплицевым матрицам и формам и являются их естественным обобщением. Алгебраическому подходу к исследованию тёплицевых матриц посвящена монография [31]. Один очень общий метод подхода к проекционным методам, позволяющий получить для ряда уравнений типа (3) полное исследование применимости проекционного метода, предложен А. В. Козаком [34].

§ 3. ИДЕЯ ФАКТОРИЗАЦИИ

Метод факторизации Винера—Хопфа для уравнения (4) при $n=1$ дает существенно больше, чем все описанные в предыдущем параграфе методы: он дает простые условия обратимости и явное решение. Были предприняты различные попытки обобщения метода факторизации. Мы не будем излагать здесь различных обобщений метода факторизации в одномерном случае, в основном изложенных в перечисленных во введении монографиях [5, 9, 12, 18, 59]. Отметим лишь различные краевые задачи на римановых поверхностях (см. обзоры [29, 30]).

Развитие идеи факторизации в неодномерном случае, прежде всего, шло по пути исследования уравнения (4) для $\mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}^m$ при произвольном m (см. [18]). В случае краевых задач для аналитических функций это означает появление в задаче (1) параметра; при этом исследование сводится, прежде всего, к проверке условий выполнимости факторизации для всех значений этого параметра в нужной области (см. [78, 79]). Рассматривался также случай области $\mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}^\infty$ и некоторые его обобщения (см., например, [6, 7], а также [8]).

Ряд других работ посвящен разбору случаев, когда задача типа (2) может быть решена прямым применением метода Винера—Хопфа (см. [65, 32] и стр. 31 в [42]). Это имеет место, например, когда $G_i(x, y)\equiv 1$ при $i=1, 2, 3$ и при условии существования канонической факторизации $G(x, y)=G_{++}G_{+-}G_{-+}G_{--}$ имеет место, например, $G_{+-}\equiv 1$.

Естественным обобщением теории факторизации матриц-функций (см., например, [5, 18]) является исследование факторизации функций на единичной окружности Г (или другом контуре) со значениями в некоторой банаховой алгебре.

Первая работа в этом направлении появилась давно. В ней [11] И. Ц. Гохберг ввел основные понятия факторизации оператор-функций и полностью исследовал случай факторизации оператор-функций вида $1+B(\zeta)$, где $B(\zeta)$ — вполне непрерывный оператор из некоторой банаховой алгебры вполне непрерывных операторов для всех $\zeta \in \Gamma$. Однако только в последние годы число работ в этом направлении начало расти (см. [13—17]). В частности, в этих работах исследовались случаи, когда оператор-функция имеет вид $1+B(\zeta)$ с $\|B(z)\|<1$, а также ряд других случаев. См. также [72].

Несколько независимо от этих работ исследовалась факторизация положительных оператор-функций, т. е. оператор-функций, значениями которых являются операторы, переводящие в себя некоторый конус положительных элементов в функциональном пространстве (см. обзор [148]). Работа стимулировалась вероятностными задачами: прогноз случайных процессов и полей и т. д.

Естественно возник вопрос о факторизации оператор-функций, значениями которых являются конкретные операторы, например, операторы Винера—Хопфа, и о применении этой факторизации к решению уравнений Винера—Хопфа. Ответ на этот вопрос был получен в [50]. Именно, в ней рассмотрены оператор-функции со значениями в алгебре $\mathfrak{A}_{n,m}$, порожденной всеми операторами Винера—Хопфа $P_T A_\varphi$ в области $T=\mathbf{Z}_+^n\times\times\mathbf{Z}^m$. Получены необходимые и достаточные условия существования такой факторизации (полные доказательства имеются в докторской диссертации автора). Факторизация проводится в некотором смысле в явном виде для $n=1$, а для $n\geqslant 2$ используется индуктивный процесс, основанный на методах работы Дугласа—Хоува [109]. Существенно используются также результаты И. Ц. Гохберга [11]. Методы работы [50] допускают обобщение также на более общие операторы (например, рассмотренные в работах Пилиди).

§ 4. ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

В некотором малопривлекательном смысле проблема существования и единственности решения для произвольного тёплицева оператора в $\mathbf{Z}_+{}^n$, т. е. для уравнения (4), решена в [50]. Проверка обратимости сводится при этом к проверке равенства нулю частных индексов некоторых оператор-функций вида $1+ +B(\zeta)$, где $B(\zeta)$ вполне непрерывны. Для конкретных операторов этот критерий является малоэффективным. Проблема получения эффективных критериев обратимости открыта даже для $n=2$.

Перечислим сейчас результаты для уравнения (4) в $\mathbf{Z}^2_+$. Его можно переписать в виде

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \varphi_{i-k,j-l} f_{kl} = h_{ij}, \qquad (6)$$

где, например, $\varphi_{ij}=\varphi(i, j)$, $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$. В [73] доказано, что оператор (6) является оператором Нётера тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\varphi}(x, y) \equiv \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \varphi_{ij} x^i y^j \neq 0 \quad \text{при} \quad |x|=|y|=1$$

и $\operatorname{ind}_{|x|=1} \tilde{\varphi}(x, 1) = \operatorname{ind}_{|y|=1} \tilde{\varphi}(1, y) = 0$.

В [39] показано, что обратимость оператора (6) эквивалентна его нётеровости в случае, когда $\varphi_{ij}=0$, если либо $|i|>1$ либо $|j|>1$. В [109] показано, что существует оператор с $\varphi_{ij}=0$, если либо $|i|>1$ либо $|j|>2$, который является нётеровым, но необратимым. Упомянутый выше результат работы [39] был несколько обобщен в [108]. В [43] результат работы [39] обобщен на случай, когда φ_{ij} отличны от нуля лишь для $i \geqslant -1$, $j \geqslant -1$.

В [136] эквивалентность обратимости и нётеровости доказана для случая, когда производящая функция $\tilde{\varphi}(x, y)$ может быть представлена в виде $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\varphi_3(y)$ для некоторых φ_1, φ_2, φ_3. Кроме того, эквивалентность нётеровости и обратимости имеет место для случая, когда применим прямой метод Винера—Хопфа (см. выше [32, 42, 65]). Неизвестен даже ответ на такой вопрос: пусть $\varphi_{ij}=0$ для всех (i, j), кроме конечного числа, и многочлен $x^k y^l \varphi(x, y)$ неприводим для некоторых k и l; будет ли тогда иметь место эквивалентность нётеровости и обратимости?

Далее обратимся к вероятностным аналогам проблемы существования и единственности. Рассмотрим счетную однородную цепь Маркова на $\mathbf{Z}^n_+$, задаваемую уравнением (5), которую мы будем предполагать имеющей один класс существенных состояний и непериодической (ограничение, диктуемое только краткостью формулировок). $\tilde{\varphi}^{\{1,\ldots,n\}}(1, 1, \ldots, 1)=0$, поэтому соответствующий оператор не является нётеровским. Известно, что если решение (5) существует в $l^1(\mathbf{Z}^n_+)$, то оно обязательно является единственным и положительным (т. е. вероятностным) с точностью до произвольной мультипликативной константы. Условия существования решения оказываются, таким образом, условиями эргодичности соответствующей цепи Маркова. Аналогично можно трактовать условия возвратности и транзиентности.

Введем векторы средних скачков за один шаг из произвольной точки $\alpha \in T_\Lambda : \vec{M}(\alpha) = \vec{M}^\Lambda = (M_1^\Lambda, \ldots, M_n^\Lambda)$, где $M_i^\Lambda = = \frac{\partial \tilde{\varphi}^\Lambda}{\partial x_i}(1, 1, \ldots, 1)$, $\tilde{\varphi}^\Lambda = \sum\limits_{i_j=-\infty}^{\infty} \varphi^\Lambda(i_1, \ldots, i_n') x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}$.

Мы будем далее предполагать, что скачки за один шаг в нашей цепи ограничены, т. е. для некоторого числа $d < \infty$ все $\varphi(i_1, \ldots, i_n)$ равны нулю, если $|i_j| > d$ для некоторого j.

Классификация таких цепей Маркова основывается на некотором индуктивном процессе по размерности n (заметим, что в работе Дугласа—Хоува также имелся некоторый индуктивный процесс).

Впервые такая классификация для $n=2$ была получена в работе [48] (полные доказательства имеются в докторской диссертации автора) только в терминах средних скачков M_i^Λ. Например, если $M_1^{\{1,2\}}$, $M_2^{\{1,2\}} < 0$, то для эргодичности необходимо и достаточно, чтобы $M_1^{\{1,2\}} M_2^{\{1\}} - M_2^{\{1,2\}} M_1^{\{1\}} < 0$, $M_2^{\{1,2\}} M_1^{\{2\}} - M_2^{\{1,2\}} M_2^{\{2\}} < 0$.

Метод доказательства—геометрически наглядное построение мажорирующего полумартингала (на другом языке— функции Ляпунова), основанное на введенном принципе ε-линейности. Однако даже для $n=2$ таким прямым методом доказательство получается лишь для случая, когда $\vec{M}^{\{1,2\}} \neq 0$. Случай $\vec{M}^{\{1,2\}} = 0$ рассмотрен в [42] аналитическим методом (см. ниже).

Для $n=3$ подобные результаты были получены примерно таким же методом и в тех же ограничениях (для «общего случая» в пространстве параметров, т. е. когда некоторые средние скачки отличны от нуля) в работе [57]. Следует отметить, что построения соответствующих полумартингалов уже при $n=3$ резко усложняются. Более того, при $n=3$ результат уже не выражается только через $\vec{M}^\Lambda$. При этом подходе уже для $n=4$, а особенно для $n=5$, количество случаев, где требуются различные мажорирующие полумартингалы, становится необозримым. При $n=5$ возникают совершенно специфические трудности.

Попытке построения систематической процедуры для получения таких результатов, посвящена работа [54].

Именно, в $\mathbf{R}_+^n$ рассматривается векторное поле, строящееся следующим образом: каждой точке α некоторой грани $D^\Lambda \subset R_+^n$

сопоставляется вектор $\vec{M}^{\Lambda}$, если грань T^{Λ} эргодическая, и все векторы $\vec{M}^{\Lambda'}$ с $\Lambda' \supset \Lambda$, если T^{Λ} неэргодическая.

Для определения понятия эргодической грани T^{Λ} вводится индуцированная цепь L^{Λ} на множестве $\{(z_1, \ldots, z_n) : z_i = c, i \in \Lambda\}$ для достаточно больших $c > 0$. Грань называется эргодической, если соответствующая цепь L^{Λ} эргодична.

Мы получаем таким образом некоторую динамическую систему. Для $n=2$, 3 трудности с неоднозначностями векторного поля, возникающими за счет неэргодических граней можно преодолеть. Основная теорема (теорема эквивалентности) гласит: случайное блуждание эргодично тогда и только тогда, когда соответствующая динамическая система из любой точки возвращается в окрестность начала координат. В некоторых частных предположениях эту процедуру можно провести для всех n. При этом из теоремы эквивалентности условия эргодичности получаются довольно просто, а эргодичность граней проверяется индуктивным способом (для проверки эргодичности в размерности n надо уметь вычислять некоторые стационарные вероятности для $n-1$). Однако в общем случае уже для $n=5$ неоднозначности играют существенную роль и для их устранения динамическую систему надо сделать случайной. Возникающие здесь трудности во многом связаны с построением границ Мартина для случайных блужданий меньших размерностей и еще не преодолены.

§ 5. РАЗРАБОТКА ВЕРОЯТНОСТНЫХ АСПЕКТОВ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ИДЕИ ФАКТОРИЗАЦИИ

Для однородной цепи Маркова, описанной в задаче 3 введения, мы будем разделять задачи, связанные с изучением стационарных распределений, если они существуют (задачи типа 3а) и задачи исследования различных вероятностных характеристик, связанных с (первым) достижением некоторого множества (задачи типа 3б).

Следует отметить, что вероятностные исследования, посвященные асимптотике тех или иных функционалов от случайных блужданий на $\mathbf{Z}_+$, велись частично независимо от работ функционального направления. Поэтому неудивительно, что возникли новые подходы к этой задаче. Одним из таких подходов является алгебраизация идеи факторизации (см. обзор [33]), принадлежащая Венделю и Кингману. Другим, более оригинальным подходом, является комбинаторный подход. Об исторических истоках комбинаторного подхода см. монографию Такача [76].

Мы подчеркнем, что чаще рассматривались интегральные аналоги случайных блужданий на $\mathbf{Z}_+$. Типична следующая ситуация: пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Определим $y_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, $f(\lambda)=Me^{i\lambda\xi}$, $\overline{y}_n=\max(0, y_1, \ldots, y_n)$, $\eta(t)=\min\{k\geqslant 1: y_k\geqslant t\}$, $\chi(t)=y_{\eta(t)}$. В самых разных асимптотических предположениях изучались вероятностные распределения случайных величин $\overline{y}_n$, $\eta(t)$, $\chi(t)$. Для этого использовались факторизационные тождества, выражавшие искомые вероятностные характеристики через компоненты факторизации функции $1-zf(\lambda)$.

Довольно общие результаты подобного типа для последовательности сумм $\overline{y}_n$ получены в работах А. А. Боровкова (см. библиографию его работ в монографии [3] и соответствующие главы этой монографии).

Мы перечислим здесь работы в этом направлении, появившиеся с 1971 г. по 1974 г. включительно.

Дж. К. Рота в своей серии работ по алгебраическим основаниям комбинаторного анализа не забыл и о комбинаторных аспектах метода факторизации [150]. К комбинаторному аспекту относятся также работы [93, 113]. Многомерное обобщение известной леммы о баллотировке получено в [111].

Большой обзор по применениям этих идей в математической статистике, доведенный до последнего времени, имеется в [115]. Более ранние работы по применению комбинаторного подхода и факторизации в основном отражены в монографии Такача [76].

С типичной ситуацией максимума сумм y_n независимых случайных величин, а также с другими более сложными функционалами, например, когда рассматривается выход из интервала, имеют дело работы [63, 83, 92, 114, 119, 120, 152, 153].

Уточнением асимптотических оценок для распределения максимума случайных величин y_n занимаются авторы работ [1, 60, 61, 122].

Факторизация матриц-функций применялась к суммам случайных величин, управляемых конечной цепью Маркова, в ранних работах Пресмана, Миллера и др. (см. библиографию в [3]). В последнее время этому вопросу посвящены работы Д. В. Гусака и др. [23—26, 58, 62], в которых исследуется распределение супремума винеровского процесса и процессов с независимыми приращениями, управляемых конечной цепью Маркова.

Имеются некоторые обобщения на суммы случайных величин, управляемые счетной цепью Маркова [86]. Матричное тождество Миллера применяется в [85] к изучению однолинейной системы массового обслуживания с несколькими типами требований. Другие обобщения на марковские и полумарковские процессы имеются в работах [84, 87, 88, 98, 142, 144].

К этому же кругу вопросов относятся работы [105, 154].

Несколько работ посвящено исследованию распределения супремумов процессов с независимыми приращениями. Здесь следует упомянуть более ранние работы Рогозина (см. библиографию в [3] и [66]).

Пусть $\xi(t)$ — однородный спектрально положительный процесс с независимыми приращениями и T — момент его выхода из некоторого интервала. В [112] приводится выражение для $M(e^{-\lambda T+iz\xi(T)})$ и для

$$\int_0^\infty e^{-\lambda T} M(e^{iz\xi(T)};\ T>t)\,dt.$$

В работе Прабху [143] рассматривается инфинитезимальный оператор A, соответствующий процессу с независимыми приращениями. Доказывается, что при $z>0$ $zI-A=(z_1I-A_+)\times\times(z_2I-A_-)$, где z_i — числа, зависящие от z, $A_+(A_-)$ — инфинитезимальные операторы некоторых однородных процессов с независимыми приращениями с неубывающими (невозрастающими) траекториями.

Некоторые свойства супремума сумм стационарно связанных случайных величин исследуются в [4].

В [46] рассмотрено случайное блуждание с ограниченными скачками на $\mathbf{Z}_+\times V$, где V — произвольное конечное множество, а случайное блуждание инвариантно относительно сдвигов $\mathbf{Z}_+$ для всех точек $\mathbf{Z}_+\times V$, кроме конечного числа. Получен явный вид стационарных вероятностей, если они существуют, а также простые необходимые и достаточные условия существования стационарного распределения и необходимые и достаточные условия возвратности случайного блуждания. Метод аналогичен простому явному методу факторизации рациональных матриц-функций (см., например, монографию [5]).

С задачей факторизации оператор-функций тесно связана построенная Ю. А. Розановым теория обновляющихся случайных процессов. По этой теории имеется обзор [68] и монография [69] (см. также [67] и [132]).

Здесь же следует упомянуть о приближенных алгоритмах факторизации: с помощью так называемого быстрого преобразования Фурье [116] и с помощью ортогональных функций [94].

§ 6. ПРОБЛЕМА ЯВНОГО РЕШЕНИЯ

Мы здесь будем рассматривать уравнение (4) в $\mathbf{Z}_+^2$ и задачу получения его явного решения. Мы уже упоминали о существовании явной регуляризации этого уравнения. Кроме того, в работе [50] получено явное представление решения в виде некоторого факторизационного тождества, использующего факторизацию оператор-функции вида $1+B(\zeta)$ с вполне непрерывной $B(\zeta)$. Оба эти решения неудовлетворительны во многих отношениях и возникает вопрос, что может быть получено, кроме сведения к довольно громоздкой задаче Фредгольма.

Сама задача получения явного решения не является, конечно, четко поставленной задачей. Но существует довольно много строгих постановок: будет ли производящая функция решения рациональной, какие особые точки и другие аналитические свойства имеет эта производящая функция и т. д.

Помимо уравнения (4) (или (6)), рассмотрим задачу (5). Она легко сводится к краевой задаче (2) с (мы рассматриваем случай скачков за один шаг, не больших $\sqrt{2}$)

$$G(x, y)=1-\sum_{i,j=-1}^{1} p_{ij}x^i y^j, \quad p_{ij}\geqslant 0, \quad \sum p_{ij}=1,$$

$$G_1(x, y)=1-\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=0}^{1} p'_{ij}x^i y^j, \quad p'_{ij}\geqslant 0, \ \sum p'_{ij}=1,$$

и т. д.

$$G_2(x, y)=1-\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=-1}^{1} p''_{ij}x^i y^j,$$

$$G_3(x, y)=1-\sum_{i,j=0}^{N} p^0_{ij}x^i y^j, \quad H(x, y)=0,$$

$N<\infty$ (N можно считать равным 1 без ущерба для общности).

Если обозначить через $\pi_{mn}\equiv\pi(m, n)$ стационарные вероятности (компоненты вектора π), то

$$F_{++}(x, y)=\sum_{i,j=1}^{\infty}\pi_{ij}x^i y^j, \quad F_{--}(x, y)=\frac{\pi_{00}}{xy},$$

$$F_{+-}(x, y)\equiv\frac{1}{y}\pi(x)=\frac{1}{y}\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{i0}x^{i-1},$$

$$F_{-+}(x, y)=\frac{1}{x}\tilde{\pi}(y)=\frac{1}{x}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{0j}y^{j-1}.$$

Решение этой краевой задачи существует тогда и только тогда, когда случайное блуждание эргодично (см. выше § 4) и мы будем рассматривать только этот случай.

В работах [39—44, 49] предложен аналитический метод решения таких задач. Прежде всего краевая задача (2) ввиду рациональности коэффициентов и вида функций F_{++}, F_{+-}, F_{-+}, F_{--} может быть мероморфно продолжена с $\Gamma\times\Gamma$ на $D\times D$. Затем мы ее рассматриваем на алгебраической кривой S:

$\{G(x, y)=0$. При этом левая часть обращается в нуль и мы имеем функциональное уравнение вида

$$q(s)\pi(s)+\tilde{q}(s)\tilde{\pi}(s)+q_0(s)\pi_{00}=0, \tag{7}$$

где $\pi(s)=\pi(x(s))$, $\tilde{\pi}(s)=\tilde{\pi}(y(s))$, а $q, \tilde{q}, q_0$ — мероморфные функции на всей S.

Однако $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ определены первоначально не на всей S и много внимания должно быть уделено взаимному разложению их областей аналитичности. Это взаимное расположение и сама кривая S (которую можно считать римановой поверхностью) тесно связаны с различными вероятностными свойствами случайного блуждания. Например, S имеет род 1 тогда и только тогда, когда случайное блуждание невырождено, т. е. обладает следующим свойством: из любой точки $(k, l)\in Z_+^2$ с $k, l>0$ можно придти в любую такую же точку или в ее соседнюю, не заходя на границу Z_+^2, т. е. на $\{(k, l): k=0$ или $l=0\}$. В остальных случаях S имеет род 0.

Рассмотрим случай рода 1. Случаю рода 0 посвящены работы Ю. И. Громака [20, 21].

Группа Галуа поля мероморфных функций $\mathbf{C}(S)$ на S над полем рациональных функций $\mathbf{C}(x)$ от $x(s)$ и над полем рациональных функций $\mathbf{C}(y)$ от $y(s)$ является циклической группой второго порядка. Пусть ξ и η — их нетривиальные элементы.

Уравнение (7) содержит две неизвестные функции и необходимые дополнительные соотношения получаются из условий

$$\pi(\xi s)=\pi(s), \quad \tilde{\pi}(\eta s)=\tilde{\pi}(s). \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) позволяют доказать, что $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ могут быть безгранично мероморфно продолжены на S, где они оказываются, вообще говоря, многозначными функциями. Поэтому удобно перейти на универсальную накрывающую S — комплексную плоскость $\tilde{S}$.

Существуют различные способы решения уравнений (7), (8). Прежде всего можно построить представление для π и $\tilde{\pi}$ на универсальной накрывающей в виде бесконечных рядов и произведений (см. [49]). Это представление обобщает аналогичные представления для эллиптических ρ-функций и σ-функций. Приводится [49] также метод получения быстро (экспоненциально) сходящихся рядов для решений (аналогичный введению θ-функций в теории эллиптических функций).

Возможность получения явных представлений обусловлена тем, что с помощью автоморфизмов Галуа можно исключить одну из двух неизвестных функций из основного уравнения (7). При этом вторая неизвестная функция оказывается удовлетворяющей линейному неоднородному уравнению в конечных разностях на комплексной плоскости. Трудность состоит в обеспечении сходимости формальных рядов и произведений для решения этого уравнения. Для этого оказывается необходимой факторизация (по существу вторая по счету) коэффициентов основного соотношения (7).

В качестве следствия получается аналитическая зависимость решения от параметров.

Возможно также другое (интегральное) представление решений соотношения (7) на S. Это представление получается как решение краевой задачи Римана на римановой поверхности S (см. [39—43]). В некоторых случаях это решение принимает вид обычного эллиптического интеграла, зависящего от параметра.

Автоморфизмы Галуа ξ и η римановой поверхности S порождают группу $\varkappa$, играющую важную роль во многих рассуждениях. Вычисление этой группы непосредственно связано с решенной русским математиком Е. И. Золотаревым классической задачей об интегрируемости абелевых дифференциалов на эллиптической кривой в логарифмах. Эта связь показана в работе [42].

Алгебраическая структура группы $\varkappa$ имеет в некоторых случаях ясную вероятностную и функциональную интерпретацию (см. [42, 44, 53]). Так, например, группа $\varkappa$ имеет порядок 4 (минимально возможный) тогда и только тогда, когда определяемое переходными вероятностями p_{ij} случайное блуждание внутри квадранта либо является простым либо независимым по каждой из осей. Простое случайное блуждание может быть также интерпретировано как независимое по каждой из осей, но с непрерывным временем [42].

В [42, 44] получены необходимые и достаточные условия рациональности решений задачи (2) в случае конечности группы $\varkappa$, а также явный вид этих рациональных решений. Воспользуемся случаем отметить здесь, что один более тонкий случай изложен в [42] неполно, лемма 1 на стр. 155 в [42] неверна. Полное изложение содержится в докторской диссертации автора. Основным при этом является тривиальность аддитивной и мультипликативной групп когомологий Галуа.

Простая алгебраическая структура группы $\varkappa$ позволяет получать существенно более простые явные формулы для решений краевой задачи (2). В [47] предлагается прием сведения задачи (2) к одномерной краевой задаче (1), которая легко решается. При этом вся развитая техника оказывается лишней, за исключением некоторых сведений об алгебраических функциях $y(x)$ и $x(y)$, определенных уравнением $G(x, y)=0$.

Простая структура группы $\varkappa$ влечет также коммутативность соответствующей C^*-алгебры (см. выше). Так для задач типа 3б (см. предыдущий параграф) в $\mathbf{Z}_+^2$ в работе [53] получено явное решение в предположении независимости случайного блуждания внутри квадранта по каждой из осей.

С проблемой явного решения тесно связана задача об асимптотическом поведении решения.

В [52] исследуется асимптотика стационарных вероятностей π_{mn}, т. е. коэффициентов функций F_{++}, $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$ при $m \to \infty$, $\frac{n}{m} \to \alpha$.

В зависимости от того, $\alpha=0$ или $\alpha \neq 0$, применяются существенно разные методы. Случай $\alpha=0$ в основном рассмотрен в работе [42]. При этом асимптотика, например, π_{n0} полностью определяется наименьшей положительной особой точкой функции $\pi(x)$, которая всегда является полюсом или алгебраической особой точкой.

В [52] рассмотрен случай $\alpha \neq 0$. Первым шагом в исследовании этого случая является получение представления π_{mn} в виде интеграла по одномерному циклу на римановой поверхности S. При этом подынтегральное выражение оказывается имеющим классический вид для применения техники метода перевала. Это представление получено в [49, 52] с помощью техники вычетов Лере.

Для применения метода перевала необходимо доказать, что контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он проходил через точку перевала, а в остальном лежал ниже ее уровня. Ввиду большого числа параметров прямыми вычислениями это показать невозможно. Используется следующая идея: проверяется выполнение этого условия для частного случая и используется устойчивость линий уровня при изменении параметров. При этом путем скрупулезного исследования вещественных точек алгебраической кривой, критических точек и критических значений проверяется выполнение условий основной теоремы Морса и структурной устойчивости линий уровня.

При деформации контура могут встретиться полюса. Этот факт определяет существенно различные области асимптотического поведения стационарных вероятностей. Оказалось, что асимптотика имеет вид

$$\pi_{mn} \sim c_1 \frac{1}{m^{c_2}} c_3^{-m}, \tag{9}$$

где $c_i = c_i(p_{ij}, p'_{ij}, p''_{ij}, \alpha)$. Выделяется область изменения параметров, где основная константа c_3 не зависит от p'_{ij}, p''_{ij} область устойчивости). Вычисляется явный вид границ этой (бласти и констант c_i. Например, при фиксированных p_{ij} и α граница области устойчивости оказывается кусочно-линейной.

В работах [43, 51] рассматриваются задачи (2) с произвольными рациональными G, G_i, H (полные доказательства результатов работы [51] содержатся в докторской диссертации автора).

Важным является понятие двойного расширения Галуа поля алгебраических функций E относительно двух его элементов $x, y \in E$: так называется алгебраическое расширение F поля E, если F есть расширение Галуа как поля $\mathbf{C}(x)$, так и поля $\mathbf{C}(y) \subset E$.

Пусть S_0 — риманова поверхность алгебраических функций $y(x)$ и $x(y)$, определенных уравнением $G(x, y) = 0$; F_0 — поле мероморфных функций на S_0.

Рассматривается башня полей $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, причем F_{2l} есть наименьшее расширение Галуа поля $\mathbf{C}(y)$, содержащее F_{2l-1}, а F_{2l+1} есть наименьшее расширение Галуа поля $\mathbf{C}(x)$, содержащее F_{2l}.

В [51] получено необходимое и достаточное условие стабилизации последовательности F_l (т. е. конечности индуктивного предела $\varinjlim F_l$ над F_0).

Пусть S_k — риманова поверхность поля F_k и $\lambda_k : \tilde{S}_k \to S_k$ — универсальное накрытие. По последовательности F_k строится коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \leftarrow & \tilde{S}_k & \xleftarrow{\tilde{f}_{k+1}} & \tilde{S}_{k+1} & \leftarrow \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle \lambda_k} & & \downarrow & \\
\cdots \leftarrow & S_k & \xleftarrow{f_{k+1}} & S_{k+1} & \leftarrow \cdots
\end{array}$$

основная для дальнейшего.

В последующем исследовании краевой задачи (2) используется следующее утверждение: для любого решения краевой задачи (2) сумма $G_1 F_{+-} + G_2 F_{-+} + G_3 F_{--}$ может быть представлена в следующем виде для некоторых m и n:

$$\sum_{i=0}^{n-1} q_i(x, y)\, \pi_i(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{q}_j(x, y)\, \tilde{\pi}_j(y) + q^0(x, y), \tag{10}$$

где q_i, $\tilde{q}_j$, x^0 рациональны, а $\pi_i(x)$, $\tilde{\pi}_j(y)$ аналитичны при $|x| < 1$ и $|y| < 1$, соответственно, и непрерывны на границах этих областей.

Это утверждение сводит решение задачи (2) к нахождению π_l и $\tilde{\pi}_j$.

Пусть $E = \{s \in S_0 : |x(s)|, |y(s)| < 1\}$; $E_1, \ldots, E_k$ — его связные компоненты; $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ — связные компоненты множества $\{s \in S_0 : |x(s)| < 1\}$, пересекающиеся с $E_1, \ldots, E_k$, соответственно. Для любого i фиксируем связную компоненту $\tilde{\Delta}_l^0$ множества $\lambda_0^{-1}(\Delta_l) \subset \tilde{S}_0$. Через $\tilde{\Delta}_l^0(r)$ обозначим множество точек S_0, находящихся на расстоянии не большем r в фиксированной метрике Лобачевского от $\tilde{\Delta}_l^0$. Определим по индукции $\tilde{\Delta}_l^j(r)$, $\tilde{\Delta}_l^0(r) \supset \tilde{\Delta}_l^0$ как связные компоненты $\tilde{f}_j^{-1}\left(\tilde{\Delta}_l^{j-1}(r)\right)$. Функции π_l естественным образом поднимаются на все Δ_l, $\tilde{\Delta}_l^j(0)$ и $\varprojlim \tilde{\Delta}_l^j(0)$.

Пусть $\mathfrak{M}(\tilde{S}_l)$ — пучок мероморфных функций на $\tilde{S}_l$.

В [51] доказывается основная теорема о том, что в некоторых предположениях типа нётеровости, а также связности S_0 и $\rho(S_0) > 1$, функции π_l как сечения индуктивного предела пучков $\mathfrak{M}(S_i)$ продолжаются на $\bigcup_r \varinjlim \tilde{\Delta}_i^j(r)$.

Эта теорема имеет разные важные следствия.

Следствие. Риманова поверхность $\pi_l(x)$ как накрытие комплексной сферы x имеет только алгебраические точки ветвления.

Это следствие в некотором смысле полностью выявляет аналитическую структуру решений задачи (2) с рациональными коэффициентами и является основным для получения различных асимптотических результатов.

Следствие. В случае стабилизации последовательности F_l функции π_l допускают мероморфное продолжение ла S_k, где k — индекс, начиная с которого все F_l совпадают.

Отсюда возникает классификация аналитических продолжений краевых задач, характеризующая в некотором смысле сложность задачи. Многие важные для приложений частные случаи обладают свойством стабилизации последовательности F_i.

В [51] доказывается, что если задача (2) разрешима методом Винера—Хопфа (см. выше), то π_l являются мероморфными функциями на S_2.

Обратное к этому последнему утверждению неверно и в связи с этим упомянутую раньше теорию рациональности [42, 44] можно рассматривать как исследование случаев возможности мероморфного продолжения на S_0.

Другие важные и в некотором смысле простейшие случаи возникают, когда $\{F_i\}$ стабилизируется, начиная с $i=0$. В этом случае роду 0 или 1 римановой поверхности S_0 отвечают

$$G(x, y) = \sum_{i,j=-1}^{1} g_{ij} x^i y^j.$$

В [43] получены явные выражения решений для этих случаев, если $G_1 = G_2 = G_3 = 1$. Рассмотрен также случай несвязности поверхности S_0. Эти случаи характеризуются тем, что, вообще говоря, π_l не продолжаются мероморфно ни на одну из S_l, но являются мероморфными на $\tilde{S}_0$.

Подобная же техника может быть использована для решения уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в квадранте R_+^2. Обширное исследование такого рода проведено А. И. Комечем [35, 36] с использованием описанных здесь методов. В основном он использует метод сведения к краевой задаче Римана на соответствующей римановой поверхности.

Другие работы по уравнениям в частных производных в областях с ребрами различных коразмерностей и библиографию см. в [35, 36, 38, 125, 136—141].

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Ввиду ограниченности объема мы не можем дать здесь полный обзор по теории массового обслуживания. Дело в том, что большинство работ, в которых решаются аналитические задачи теории массового обслуживания, связаны в той или иной степени с уравнениями Винера—Хопфа. Во многом верно и обратное — многие случайные блуждания в Z_+^n могут быть интерпретированы как некоторые марковские задачи теории массового обслуживания (см. [45]). Поэтому здесь мы перечислим лишь некоторые работы, имеющие наиболее принципиальный характер.

Обширный материал и библиография по теории массового обслуживания имеется в уже упомянутой ранее статье—обзоре Кингмана [33].

В [123] формула Поллячека—Хинчина обобщается на случай группового прибытия требований в систему массового обслуживания и для систем с ограниченной очередью типа $M/G/1$. Получены также некоторые соотношения для системы $G/G/n$.

В работе [145] получено решение системы $E_k/E_m/r$. Алгебраический подход Кингмана—Венделя к изучению времени ожидания требованием обслуживания в однолинейной системе массового обслуживания переносится на системы типа $GI/M/s$ и некоторые другие задачи в [129—131]. В [149] получены некоторые условия рациональности производящих функций в системе типа $GI/G/1$. Два доказательства формулы Поллячека—Хинчина даны в работе Такача [157]. Некоторые явные формулы для системы массового обслуживания $GI/M/n$ получены в [107].

Такач в [157] изучает однолинейную систему массового обслуживания с дискретным временем (заметим, что такие же системы изучались ранее А. А. Боровковым, см. библиографию в [3]). Результаты Поллячека, связанные с системой $GI/G/n$, обобщаются в работе [106].

В докторской диссертации автора этого обзора (см. дополнение к главе 3 диссертации) получено общее факторизационное тождество для времени ожидания в системе $GI/G/2$, обобщающее тождество Спицера для системы $GI/G/1$. Однако оно дополнительно требует факторизации оператор-функции вида $1+B(\zeta)$, где $B(\zeta)$ вполне непрерывны.

Отметим, что ранее были найдены (по существу отгаданы) интересные решения для некоторых задач последовательного обслуживания. Обзор по задачам последовательного обслуживания, доведенный до 1972 г., см. в [95].

В настоящее время бурно развивается теория приоритетных задач теории массового обслуживания (см. монографии [10, 28], а также [27]). Многие из них эквивалентны (точнее, могут быть сведены к краевым задачам типа (1) с параметром, о которых уже говорилось выше. В указанных монографиях и в приведенной в них библиографии получен ряд интересных вероятностных приемов решения таких задач.

Теории водохранилищ посвящены работы [99, 133]. В работе [104] рассмотрено случайное блуждание в $\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}$.

Перейдем теперь к некоторым асимптотическим задачам, связанным с многомерными случайными блужданиями. Об асимптотике задач типа 3а мы уже говорили в предыдущем параграфе. Здесь речь будет идти о задачах типа первого достижения.

Условия сходимости к нормальному распределению получаются в ряде частных случаев прямыми вероятностными методами (см., например, [60, 61] и библиографию в них). См. также [95]. Было бы важно иметь общую теорему на этот счет.

Однако остальные асимптотические задачи представляют весьма существенные трудности. Простейшая задача такого рода рассмотрена в [22]. Подобные задачи встречаются в приложениях (см., например, [55]).

В [22] рассматривается счетная однородная цепь Маркова с дискретным временем и единственным существенным классом состояний. Множество состояний этой цепи есть $\mathbf{Z}_+^2$. Состояние цепи в момент $t=0$ есть $x_0=(n, m)$, $n, m>0$. Пусть $A \subset \mathbf{Z}_+^2$ есть любое конечное множество, а $B=\{(k, l)$: $k=0$ или $l=0\} \subset \mathbf{Z}_+^2$. Переходные вероятности за один шаг из состояния $(k+i, l+j)$ в состояние (k, l) будем обозначать p_{ij}. Предполагается, что $p_{ij}=0$, если выполняется, по крайней мере, одно из неравенств $|i|>1$, $|j|>1$, и, что для всех i, j

$$p_{1,j}=p_{-1,j}, \quad p_{i,1}=p_{i,-1}. \tag{11}$$

Если при некотором t случайное блуждание попадает в $A \cup B$, то процесс обрывается. Через $p_{n,m}^A(t)$ обозначим вероятность того, что процесс оборвется в момент t в точке, принадлежащей множеству A. Нас интересует асимптотическое поведение вероятности $p_{n,m}^A=\sum\limits_{t>0} p_{n,m}^A(t)$ при $n, m \to \infty$.

Предположение (11) существенно. Во-первых, оно отвечает наиболее интересному случаю неэкспоненциальной асимптотики (из (11) следует, что средний вектор скачка за один шаг равен нулю). Во-вторых, определенная симметрия, имеющаяся в (11), позволяет применить простой явный метод решения соответствующего уравнения (см. предыдущий параграф). Обозначим

$$C_A=\sum_{n, m \in (A \cup B)} (n+1)(m+1)\, p_{nm}^A(1).$$

Тогда, например, $p_{n,0}^{A} \sim \frac{C \cdot C_A}{n^3}$, где константа C имеет простой явный вид и не зависит от A.

И. П. Цареградский решил аналогичную задачу для броуновского движения в R_+^2 с помощью аналогичного метода, а также с помощью совсем другого метода, использующего преобразование Меллина.

§ 8. НОВЫЕ И СТАРЫЕ ИДЕИ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Здесь излагается ряд идей и результатов, возникших на стыке теории случайных полей и физики, которые могут существенно повлиять на будущее развитие теории уравнений Винера—Хопфа. Речь будет идти о точно решаемых решетчатых моделях статистической физики.

В настоящее время наиболее интересные точно решаемые модели статистической физики можно разделить на два класса: 1) к первому типу относится двумерная модель Изинга в нулевом внешнем поле для различных плоских решеток и эквивалентные ей димерные модели на таких же решетках; 2) ко второму типу можно отнести те модели, которые решаются с помощью так называемой гипотезы Бете (Bethe ansatz). К ним относятся одномерные квантовые решетчатые модели Гейзенберга, где с помощью этой гипотезы вычисляется основное состояние, и модели Либа вместе с их многочисленными последними обобщениями (см. ниже), где вычисляется статистическая сумма для конечных температур.

В принципе, по-видимому, и модель Изинга может быть решена с помощью гипотезы типа Бете (см., например, близкое по духу решение для димеров на квадратной решетке в работе Либа [126], стр. 297).

Теория двумерной модели Изинга во многом завершена. Однако многие вопросы для критической температуры и связанные с этим вопросы, касающиеся ренормировочной группы, остаются открытыми. И как раз эти вопросы связаны, по-видимому, с некоторыми разделами теории уравнений Винера—Хопфа. В серии из пяти работ Ву [165] показал, что вычисление и исследование асимптотического поведения двухчастичных корреляционных функций для этой модели сводится к исследованию некоторых уравнений Винера—Хопфа. Дело в том, что двухчастичные корреляционные функции (с расстоянием между частицами, равным n) выражаются в виде некоторого определителя порядка n. В ряде случаев он оказывается обычным определителем Тёплица порядка n. Обычно для исследования асимптотического поведения этого определителя Тёплица при $n \to \infty$ используется теория Сеге—Каца или ее обобщение (см., например, [70]). В работе Ву предлагается использовать для этой цели, по-видимому, более сильный, итерационный метод решения уравнений Винера—Хопфа. Это позволило Ву получить в ряде случаев полные асимптотические разложения корреляционных функций. Соответствующее уравнение Винера—Хопфа имеет разные индексы выше и ниже критической температуры, а при критической температуре соответствует краевой задаче для некоторого разомкнутого контура. Мы видим, таким образом, что нерешенные вопросы в двумерной модели Изинга теснейшим образом связаны с уравнениями Винера—Хопфа.

Если в модели Изинга уравнения Винера—Хопфа или детерминанты Тёплица возникают в результате довольно длинной цепочки преобразований, то в моделях второго типа почти сразу возникают уравнения типа (3) первого параграфа.

Рассмотрим одномерный антиферромагнетик Гейзенберга в конечном интервале $[0, N]$ с периодическими граничными условиями. Вековое уравнение для собственных значений его гамильтониана имеет вид

$$2\varepsilon a_{n_1 \dots n_r} = \sum_{n'_1, \dots, n'_r} \left[a_{n_1 \dots n_r} - (1-\gamma) a_{n'_1 \dots n'_r}\right], \tag{12}$$

где ε — искомое (например) наименьшее собственное значение, а $a_{n_1 \dots n_u}$ — коэффициенты собственного вектора в некотором базисе. Здесь $0 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_r < N$, а суммирование производится по всем наборам $(n'_1, \dots, n'_r)$ таким, что $0 \leqslant n'_1 < n'_2 < \dots < n'_r < N$, и таким, что числа n'_i, $i=1, \dots, r$ совпадают с числами n_i, $i=1, \dots, r$, для всех значений i, кроме одного, для какого имеет место: $n'_i = n_i \pm 1$.

Фиксация числа r означает рассмотрение r-частичной задачи.

Если рассмотреть уравнения (12) в бесконечном промежутке, т. е. для $-\infty < n_1 < n_2 < \dots < n_r < \infty$, то они, очевидно, имеют вид (3) введения. При этом в основной области (т. е. для случая, когда $n_i + 1 < n_{i+1}$ для всех i) уравнение (мы выписываем его для случая $r=2$) будет иметь следующий вид

$$2\varepsilon a_{n_1 n_2} = 4 a_{n_1 n_2} - (1-\gamma)\left(a_{n_1+1, n_2} + a_{n_1-1, n_2} + a_{n_1, n_2+1} + a_{n_1, n_2-1}\right). \tag{13}$$

В области $n_1 + 1 = n_2$ уравнение (13), конечно, меняется:

$$2\varepsilon a_{n_1, n_1+1} = 2 a_{n_1, n_1+1} - (1-\gamma)\left(a_{n_1-1, n_1+1} + a_{n_1, n_1+2}\right). \tag{14}$$

Высокие свойства симметрии уравнения (12) позволили Бете сделать предположение, что основное состояние можно искать в виде

$$a_{n_1, \dots n_r} = \sum_p \exp\left\{i\left[\sum_{j=1}^{k} k_{p_j} n_j + \frac{1}{2}\sum_{j,l} \varphi_{p_j p_l}\right]\right\}, \tag{15}$$

где суммирование производится по всем перестановкам P множества $\{1, \ldots, r\}$, $p_j = p(j)$, k_{p_j} и φ_{jl} — некоторые вещественные числа, причем все k_j предполагаются различными. Подстановка в уравнение в основной области дает

$$\varepsilon = \sum_j [1 - (1 - \gamma) \cos k_j]. \tag{16}$$

Легко заметить, что если выполнены уравнения

$$2a_{n_1 \ldots n_l n_{l+1} \ldots n_r} = (1 - \gamma)[a_{n_1 \ldots n_l n_l \ldots n_r} + a_{n_1 \ldots n_{l+1} n_l \ldots n_r}] \tag{17}$$

и уравнение в основной области, то выполнены и уравнения (12). Уравнения (17) дают условия на фазы φ_{jl}

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi_{jl}}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(k_j - k_l)}{(1 - \gamma) \cos \frac{1}{2}(k_j + k_l) - \cos \frac{1}{2}(k_j - k_l)}. \tag{18}$$

Из условий периодичности получаем добавочные уравнения

$$N k_j = 2\pi\lambda_j + \sum_{l \neq j} \varphi_{lj} \tag{19}$$

для некоторых целых чисел $\lambda_j = 0, 1, \ldots, N-1$. Оказывается, что для получения правильного значения ε следует выбрать $r = \frac{N}{2}$ и $\lambda_j = 2j - 1$, $j = 1, \ldots, \frac{N}{2}$.

После предельного перехода $N \to \infty$ уравнения (18) и (19) после некоторых преобразований дают снова уравнения Винера—Хопфа (!), но уже самые классические, которые и решаются затем методом факторизации.

Вся эта процедура была обоснована Янгами в их серии работ (см. [166, 167] и библиографию в [127]).

Подобная процедура использовалась для других одномерных моделей в Бозе и Ферми случаях (см. [128]).

Удивительный факт был открыт при изучении двумерных ферроэлектрических моделей (моделей Либа). Хотя первоначальные уравнения для собственного значения трансфер-матрицы существенно отличаются от уравнений (12), а именно, они имеют вид (для модели льда)

$$\varepsilon a_{n_1 \ldots n_r} = \sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=n_1}^{n_2} \ldots \sum_{m_r=n_{r-1}}^{n_r}{}^{*} a_{m_1 \ldots m_r} + \sum_{m_1=n_1}^{n_2} \sum_{m_2=n_2}^{n_3} \ldots \sum_{m_r=n_r}^{N-1}{}^{*} a_{m_1 \ldots m_r}, \tag{20}$$

где $0 \leqslant n_1 < \ldots < n_r \leqslant N-1$, а звездочка означает, что при суммировании члены с совпадением $m_i = m_{i+1}$ для какого-либо i, выпадают, несмотря на это, их решение опять ищется в виде Бете (15). Более того, вся последующая часть полностью совпадает с ранее разобранным нами случаем. Конечно, собственное значение оказывается другим, что дает фазовые переходы различного вида (см. [37]).

По ферроэлектрическим моделям имеется обстоятельный обзор с полной библиографией, доведенной до 1972 г. [127] (см. также [126]). Бакстером выполнен ряд работ по так называемым восьми вершинным моделям, где несколько обобщается гипотеза Бете для разыскания решений соответствующих уравнений (см. [91], а также [127, 164]).

Детерминанты Тёплица часто возникают также в другой одномерной квантовой решетчатой модели (X—Y модели) (см. [80, 81, 97, 121]).

К этому же кругу вопросов относятся работы [135, 159, 161].

Отметим, что существует еще один, более простой класс точно решаемых моделей статистической физики — сферические модели Каца, где также большую роль играют проекционные методы решения уравнений в свертках ([89, 90]).

Мы перечислим теперь ряд других применений уравнений Винера—Хопфа на стыке физики и теории вероятностей как коммутативной, так и некоммутативной.

Работа [160] относится к теории переноса излучения, где техника Винера—Хопфа применяется уже довольно давно (см., например, [134]). Применение к переносу тепла см. [155].

В обстоятельной работе [146] метод Винера—Хопфа используется для решения линеаризованного уравнения Больцмана в кинетической теории.

Преобразованию Гильберта в квантовой теории рассеяния с потенциалом Юкавы посвящена работа [110].

Одно сингулярное интегральное уравнение в теории элементарных частиц, связанное с вопросами теории дисперсионных соотношений, решается в [2].

В важной работе [124] решается классическая задача дифракции электромагнитной волны на прямом угле, что эквивалентно решению некоторой краевой задачи для функций двух комплексных переменных. См. также монографии Б. Нобла «Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных», М., Изд-во ин. лит., 1962, 279 с. (РЖМат, 1963, 1Б239К) и Р. Миттры и С. Ли «Аналитические методы теории волноводов», М., «Мир», 1974, 328 с. (РЖМат, 1975, 5Б543К).

Как известно, линейные статистические задачи для классических случайных полей приводят к уравнению Винера—Хопфа вида

$$b(t)=\int_T B(t-s)\,x(s)\,ds,\quad t\in T,$$

где, например, $T=\mathbf{R}_+$ или $\mathbf{Z}_+$.

Холево в [77] показал, что соответствующие линейные статистические задачи для квантовых случайных полей (а, точнее, оптимальные статистические задачи для обобщенно свободных (гауссовых) бозонных полей) имеют вид

$$b(t) = \frac{\hbar}{2} x(t) + \int_T B(t-s) x(s) ds, \quad t \in T,$$

т. е. имеют более регуляризованный вид ($\hbar$ — постоянная Дирака).

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Арак Т. В.**, О распределении максимума последовательных сумм независимых случайных величин. Теория вероятностей и ее применения, 1974, 19, № 2, 257—277 (РЖМат, 1974, 11В25)
2. **Боголюбов Н. Н.**, Мещеряков В. А., Тавхелидзе А. Н., Применение методов Н. И. Мусхелишвили в теории элементарных частиц. Тр. Симпоз. по мех. сплош. среды и родствен. пробл. анализа, 1971, т. 1. Тбилиси, «Мецниереба», 1973, 5—11 (РЖМат, 1974, 8Б491)
3. **Боровков А. А.**, Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., «Наука», 1972, 368 с. (РЖМат, 1972, 6В42К)
4. —, Некоторые свойства супремума сумм стационарно связанных величин. Теория вероятностей и ее применения, 1972, 17, № 1, 147—150 (РЖМат, 1972, 7В115)
5. **Векуа Н. П.**, Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., «Наука», 1970, 379 с. (РЖМат, 1970, 6Б415К)
6. **Вишик М. И.**, Параметрикс эллиптических операторов с бесконечным числом независимых переменных. Успехи мат. наук, 1971, 26, № 2, 155—174 (РЖМат, 1971, 7Б718)
7. —, Марченко А. В., Краевые задачи для эллиптических и параболических операторов второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем. Мат. сб., 1973, 90, № 3, 331—371 (РЖМат, 1973, 7Б303)
8. **Владимиров В. С.**, Задача линейного сопряжения голоморфных функций многих комплексных переменных. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, 29, 807—834 (РЖМат, 1966, 9Б327)
9. **Гахов Ф. Д.**, Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963, 640 с. (РЖМат, 1963, 10Б277К)
10. **Гнеденко Б. В. и др.** Приоритетные системы обслуживания. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973
11. **Гохберг И. Ц.**, Задача факторизации оператор-функций. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, 28, № 5, 1055—1082 (РЖМат, 1965, 2Б510)
12. —, Крупник Н. Я., Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, «Штиинца», 1973, 426 с. (РЖМат, 1973, 10Б562К)
13. —, Лайтерер Ю., О канонической факторизации оператор-функций относительно окружности. Функц. анализ и его прил., 1972, 6, № 1, 73—74 (РЖМат, 1977, 5Б774)
14. —, —, О факторизации непрерывных оператор-функций относительно контура в банаховых алгебрах. Докл. АН СССР, 1972, 206, № 2, 273—276 (РЖМат, 1973, 1Б526)
15. —, —, Общие теоремы о факторизации оператор-функций относительно контура. I. Голоморфные функции. Acta sci. math., 1973, 34, 103—120 (РЖМат, 1973, 12Б796)
16. —, —, Общие теоремы о факторизации оператор-функций относительно контура. II. Обобщения. Acta sci. math., 1973, 35, 39—59 (РЖМат, 1974, 9Б942)
17. —, —, О локальном принципе в задаче факторизации непрерывных оператор-функций. Функц. анализ и его прил., 1973, 7, № 3, 79—80 (РЖМат, 1973, 12Б797)

18. —, Фельдман И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М., «Наука», 1971, 352 с. (РЖМат, 1971, 8Б574К)
19. Гренандер Я., Сеге Г., Тёплицевы формы и их приложения. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1961, 308 с. (РЖМат, 1963, 5Б38К)
20. Громак Ю. И., Исследование простейшей приоритетной системы массового обслуживания методами случайного блуждания в четверти плоскости. «Теория массового обслуживания. Тр. II Всес. совещания-школы по теории массового обслуживания, Дилижан», 1970». М., МГУ, 1972
21. —, Малышев В. А., Стационарное распределение для «вырожденного» случайного блуждания в четверти плоскости. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1972, № 2, 18—24 (РЖМат, 1972, 7В62)
22. —, —, Вероятность попадания в конечное множество при блуждании в квадранте с поглощением на границе. Междунар. конф. по теории вероятностей и мат. статист. Вильнюс, 25—30 июня 1973 г. Тезисы докл. Т. 1 (А—К). (АН СССР, АН ЛитССР, Вильнюс. ун-т). Вильнюс, 1973
23. Гусак Д. В., Экстремальные значения невырожденных винеровских процессов, управляемых конечной цепью Маркова. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1972, вып. 6, 49—53 (РЖМат, 1972, 9В38)
24. —, Об одном классе процессов с независимыми приращениями на конечной цепи Маркова. Укр. мат. ж., 1973, 25, № 2, 170—178 (РЖМат, 1973, 8В66)
25. —, Распределение экстремумов винеровских процессов со сдвигом, управляемых конечной цепью Маркова. Trans. 6th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funct., Random Proces., Prague, 1971. Prague, 1973, 207—212 (РЖМат, 1974, 7В82)
26. —, Пересыпкина С. И., О распределении момента и величины перескока уровня для однородных процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова. Укр. мат. ж., 1974, 26, № 3, 291—299 (РЖМат, 1974, 11В80)
27. Даниелян Э. А., *Приоритетные задачи в системах обслуживания одним прибором*. М., Моск. ун-т, 1971, 144 с. (РЖМат, 1972, 7В83К)
28. Джейсуол Н., Очереди с приоритетами. М., «Мир», 1973, 280 с. (РЖМат, 1973, 9Б24К)
29. Зверович Э. И., Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях. Успехи мат. наук, 1971, 26, № 1, 113—179 (РЖМат, 1971, 10Б357)
30. —, Литвинчук Г. С., Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения. Успехи мат. наук, 1968, 23, вып. 3, 67—121 (РЖМат, 1968, 11Б345)
31. Иохвидов И. С., Ганкелевы и тёплицевы матрицы и формы. Алгебраическая теория. М., «Наука», 1974, 263 с. (РЖМат, 1974, 7А504К)
32. Какичев В. А., Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. Теория функций, функц. *анализ и их прилож*. Респ. научн. сб., 1967, вып. 5, 37—58 (РЖМат, 1968, 7Б385)
33. Кингман Дж. Ф. Ч., Об алгебре очередей. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1971, 15, № 2, 126—165 (РЖМат, 1971, 6В64)
34. Козак А. В., Об одном проекционном методе решения операторных уравнений в банаховом пространстве. Докл. АН СССР, 1973, 211, № 5, 1042—1045 (РЖМат, 1973, 12Б893)
35. Комеч А. И., Эллиптические краевые задачи для псевдодифференциальных операторов на многообразиях с коническими точками. Мат. сб., 1971, 86, № 2, 268—298 (РЖМат, 1972, 1Б406)
36. —, Эллиптические краевые задачи на многообразиях с кусочно-гладкой границей. Мат. сб., 1973, 92, № 1, 89—134 (РЖМат, 1973, 12Б392)
37. Либ Эллиот Г., Остаточная энтропия квадратного льда. Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1974, 18, № 4, 64—84 (РЖМат, 1975, 1Б718)
38. Мазья В. Г., О задаче с косой производной в области с ребрами раз-

ных размерностей. Вестн. Ленингр. ун-та, 1973, № 7, 34—39 (РЖМат, 1973, 9Б355)
39. **Малышев В. А.**, О решении дискретных уравнений Винера—Хопфа в четверть-плоскости. Докл. АН СССР, 1969, 187, № 6, 1243—1246 (РЖМат, 1970, 1В417)
40. —, Аналитический метод в теории случайных блужданий в четверти плоскости: простое блуждание с косым отражением. В сб. «Сов.-Японск. симпозиум по теории вероятностей, 1969. [Ч. I]». Новосибирск, 1969, 176—184 (РЖМат, 1970, 4В52)
41. —, Положительные случайные блуждания и обобщенные эллиптические интегралы. Докл. АН СССР, 1970, 196, № 3, 516—519 (РЖМат, 1971, 6В56)
42. —, Случайные блуждания. Уравнения Винера—Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа. М., МГУ, 1970
43. —, Уравнения Винера—Хопфа в четверти плоскости, дискретные группы и автоморфные функции. Мат. сб., 1971, 84, № 4, 499—525 (РЖМат, 1971, 7Б454)
44. —, Положительные случайные блуждания и теория Галуа. Успехи мат. наук, 1971, 26, № 1, 227—228 (РЖМат, 1971, 7В81)
45. —, Нестандартные марковские системы массового обслуживания. «Теория массового обслуживания. Тр. II Всес. совещания-школы по теории массового обслуживания, Дилижан, 1970». М., МГУ, 1971, 91—95
46. —, Однородные случайные блуждания на произведении конечного множества и полупрямой. В сб. «Вероятностные методы исследования». М., МГУ, 1972, 5—13
47. —, Простые явные формулы для некоторых случайных блужданий в четверти плоскости. В сб. «Вероятностные методы исследования». М., МГУ, 1972, 14—22
48. —, Классификация двумерных положительных случайных блужданий и почти линейные полумартингалы. Докл. АН СССР, 1972, 202, № 3, 526—528 (РЖМат, 1972, 5В45)
49. —, Аналитический метод в теории двумерных положительных случайных блужданий. Сиб. мат. ж., 1972, 13, № 6, 1314—1329 (РЖМат, 1973, 4В102)
50. —, Факторизация функций со значениями в алгебрах многомерных тёплицевых операторов. Успехи мат. наук, 1973, 28, 2, 237—238 (РЖМат, 1973, 8Б753)
51. —, Аналитическое продолжение в краевых задачах для функций двух комплексных переменных. Функц. анализ и его прил., 1973, 7, № 3, 85—87 (РЖМат, 1973, 12Б152)
52. —, Асимптотическое поведение стационарных вероятностей для двумерных положительных случайных блужданий. Сиб. мат. ж., 1973, 14, № 1, 156—169 (РЖМат, 1973, 5В84)
53. —, Неоднородные многомерные случайные блуждания. Теория вероятностей и ее применения, 1973, 18, № 4, 874—875
54. —, М е н ь ш и к о в М. В., Эргодичность в трехмерных марковских задачах теории массового обслуживания. «Теория массового обслуживания. Тр. III. Всес. совещания-школы по теории массового обслуживания, Пущино. 1974». М., МГУ, 1975
55. **Мальчиков С. В.**, Определение вероятности недостижения границы прямоугольной области многомерным случайным процессом. Автоматика и телемеханика, 1973, № 4, 19—28 (РЖМат, 1973, 11В173)
56. **Маслов В. П.**, Операторные методы. М., «Наука», 1973
57. **Меньшиков М. В.**, Условия эргодичности и транзиентности для случайных блужданий в положительном октанте пространства. Докл. АН СССР, 1974, 217, № 4, 755—758 (РЖМат, 1974, 11В79)
58. **Могульский А. А.**, Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1974, вып. 11, 86—96 (РЖМат, 1974, 11В83)

59. **Мусхелишвили Н. И.,** Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М., «Наука», 1968, 511 с. (РЖМат, 1969, 4Б314К)
60. **Паулаускас В. И.,** О распределении максимума последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1973, **13**, № 2, 133—138 (РЖМат, 1973, 10В31)
61. —, Стейшунас С., О скорости сходимости распределения максимума последовательных сумм независимых разнораспределённых случайных векторов к предельному закону. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1973, **13**, № 2, 139—147 (РЖМат, 1973, 10В32)
62. **Пересыпкина С. И.,** О достижении уровня для сумм и процессов, заданных на конечной цепи Маркова. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1974, вып. 11, 117—126 (РЖМат, 1974, 11В82)
63. **Печерский Е. А.,** Некоторые тождества, связанные с выходом блуждания из отрезка и их полуинтервала. Теория вероятностей и ее применения, 1974, **19**, № 1, 104—119 (РЖМат, 1974, 7В83)
64. **Пилиди В. С.,** О связи между локальной нётеровостью в точке и обратимостью некоторых классов линейных операторов. В сб. «Мат. анализ и его прил.». Т. 4. Ростов-на-Дону, Ростов. ун-т, 1972, 110—120 (РЖМат, 1973, 4Б790)
65. **Рабинович В. С.,** Многомерное уравнение Винера—Хопфа для конусов. Теория функций, функц. анализ и их прилож. Респ. научн. сб., 1967, вып. 5, 59—67 (РЖМат, 1968, 12Б398)
66. **Рогозин Б. А.,** Поведение перескока для процессов с независимыми приращениями. Теория вероятностей и ее применения, 1972, **17**, № 1, 143—147 (РЖМат, 1972, 5В44)
67. **Розанов Ю. А.,** Регулярность стационарных процессов и факторизации операторных функций. Докл. АН СССР, 1972, **202**, № 6, 1277—1279 (РЖМат, 1972, 7В113)
68. —, Обновляющие процессы и проблема факторизации. В сб. «Соврем. пробл. мат. Т. 3. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1974, 181—256 (РЖМат, 1974, 9В86)
69. —, Теория обновляющихся процессов. М., «Наука», 1974, 128 с. (РЖМат, 1974, 10В69К)
70. **Рязанов Г. В.,** Асимптотика корреляций для плоской решетки Изинга. Ж. эксп. и теор. физ., 1965, **49**, № 4, 1134—1144
71. **Семенюта В. Н.,** Симоненко И. Б., Вычисление индекса многомерных дискретных сверток. В сб. «Мат. исследования». Т. 4. Вып. 4. Кишинев, 1969, 134—141 (РЖМат, 1970, 6Б653)
72. **Сергеев А. Г.,** Факторизация оператор-функций, непрерывных по Гёльдеру. Успехи мат. наук, 1972, **27**, № 6, 253 (РЖМат, 1973, 6Б707)
73. **Симоненко И. Б.,** Операторы типа свертки в конусах. Мат. сб., 1967, **74**, № 2, 298—313 (РЖМат, 1968, 8Б653)
74. —, О многомерных дискретных свертках. В сб. «Мат. исследования». Т. 6. Вып. 1. Кишинев, «Штиинца», 1971, 114—125 (РЖМат, 1969, 1Б591)
75. —, Краевые задачи аналитических функций двух переменных и связанные с ними интегральные уравнения. Докл. АН СССР, 1971, **199**, № 3, 551—552 (РЖМат, 1971, 12Б520)
76. **Такач Л.,** Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М., «Мир», 1971
77. **Холево А. С.,** Некоторые статистические задачи для квантовых полей. Теория вероятностей и ее применения, 1972, **17**, № 2, 360—365 (РЖМат, 1972, 12В124)
78. **Шубин М. А.,** Об индексе семейств операторов Винера—Хопфа. Мат. сб., 1971, **84**, № 4, 537—558 (РЖМат, 1971, 8А433)
79. —, Факторизация матриц, зависящих от параметра, и эллиптические уравнения в полупространстве. Мат. сб., 1971, **85**, № 1, 65—84 (РЖМат, 1971, 9Б244)
80. **Abraham D. B.,** Barouch E., Gallavotti G., Martin-Löf A., Dynamics of a local perturbation in the *XY* model. I. Approach to equi-

librium. Stud. Appl. Math., 1971, 50, № 2, 121—131 (РЖМат, 1972, 1Б607)
81. —, —, —, —, Dynamics of a local perturbation in the $X—Y$ model. II. Excitations. Stud. Appl. Math., 1972, 51, № 2, 211—218 (РЖМат, 1973, 2Б521)
82. **Allan G. R.**, Ideals of vector-valued functions. Proc. London Math. Soc., 1968, 18, № 2, 193—216 (РЖМат, 1969, 5Б745)
83. **Aneja K. G.**, Sen K., Maxima in random walk and related rank order statistics. Stud. sci. math. hung., 1972, 7, № 3-4, 425—428 (РЖМат, 1974, 8В74)
84. **Arjas E.**, On a fundamental identity in the theory of semi-Markov processes. Adv. Appl. Probab., 1972, 4, № 2, 258—270 (РЖМат, 1973, 4В85)
85. —, On the use of a fundamental identity in the theory of semi-Markov queues. Adv. Appl. Probab., 1972, 4, № 2, 271—284 (РЖМат, 1973, 1В71)
86. —, Speed T. P., An extension of Cramer's estimate for the absorption probability of a random walk. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1973, 73, № 2, 355—359 (РЖМат, 1973, 10В84)
87. —, —, A note on the second factorisation identity of A. A. Borovkov. Теория вероятностей и ее приложения, 1973, 18, № 3, 601—604 (РЖМат, 1973, 12В92)
88. —, —, Symmetric Wiener-Hopf factorisations in Markov additive processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1973, 26, № 2, 105—118 (РЖМат, 1974, 1В67)
89. **Barber M. N.**, Critical behaviour of a spherical model with a free surface. J. Statist. Phys., 1974, 10, № 1, 59—88 (РЖМат, 1974, 11Б578)
90. —, Fisher M. E., Critical phenomena in systems of finite thickness. I. The spherical model. Ann. Phys. (USA), 1973, **77**, № 2, 1—78 (РЖМат, 1973, 11Б419)
91. **Baxter R.**, Asymptotically degenerate maximum eigenvalues of the eight-vertex model transfer matrix and interfacial tension. J. Statist. Phys., 1973, 8, № 1, 25—55 (РЖМат, 1974, 2Б528)
92. **Bingham N. H.**, Limit theorems in fluctuation theory. Adv. Appl. Probab., 1973, 5, № 3, 554—569 (РЖМат, 1974, 8В72)
93. **Boes D. C.**, Salas-La Cruz J. D., On the expected range and expected adjusted range of partial sums of exchangeable random variables. J. Appl. Probab., 1973, 10, № 3, 671—677 (РЖМат, 1974, 5В22)
94. **Borget G.**, Faure P., Algorithmes de factorisation approchée utilisant les fonctions orthogonales. Rev. franç. automat., inform., rech. opér., 1973, 7, NJ-2, 25—44 (РЖМат, 1974, 4В97)
95. **Burke P. J.**, Output processes and tandem queues. Proc. Symp. Comput.-Communs. Networks and Teletraffic, New York, N. Y., 1972, 419—428 (РЖМат, 1973, 8В51)
96. **Campbell J. W.**, Tsokos C. P., The asymptotic distribution of maxima in bivariate samples. J. Amer. Statist. Assoc., 1973, 68, № 343, 734—739 (РЖМат, 1974, 7В29)
97. **Case K. M.**, Lan C. W., The one-dimensional $X—Y$ model in inhomogeneous magnetic fields. J. Math. Phys., 1973, 14, № 6, 720—732 (РЖМат, 1973, 12Б590)
98. **Cheong C. K.**, Tengels J. L., On a semi-Markov generalisation of the random walk. Stochast. Process. and Appl., 1973, 1, № 1, 53—66 (РЖМат, 1973, 10В82)
99. **Cinlar E.**, On dams with continuous semi-Markovian inputs. J. Math. Anal. and Appl., 1971, 35, № 2, 434—448 (РЖМат, 1972, 3В58)
100. **Coburn L. A.**, Douglas R. G., C^*-algebras of operators on a half-space. I. Publs math. Inst. hautes études sci., 1971, № 40, 59—67
101. —, —, Schaeffer D. G., Singer I. M., C^*-algebras of operators on a half-space. II. Index theory. Publs math. Inst. hautes études sci., 1971, № 40, 69—80
102. —, —, Singer I. M., An index theorem for Wiener-Hopf operators on the discrete quarter-plane. J. Different. Geom., 1972, 6, № 4, 587—593 (РЖМат, 1973, 5Б731)

103. Cordes H. O., Herman E. A., Gelfand theory of pseudo-differential operators. Amer. J. Math., 1968, 90, № 3, 681—717 (РЖМат, 1969, 10Б519)
104. Cressie N., A two-dimensional random walk in the presence of a partially reflecting barrier. J. Appl. Probab., 1974, 11, № 1, 199—205 (РЖМат, 1974, 11В78)
105. Delbrouck L. E. N., A set of Wiener-Hopf integral equations with common solution in fluctuation theory. J. Math. Anal. and Appl., 1973, 44, № 1, 100—112 (РЖМат, 1974, 4В51)
106. De Smit J. H. A., Some general results for many server queues. Adv. Appl. Probab., 1973, 5, № 1, 153—169 (РЖМат, 1973, 11В115)
107. —, On the many server queue with exponential servie times. Adv. Appl. Probab., 1973, 5, № 1, 170—182 (РЖМат, 1973, 11В116)
108. Douglas R. G., On the invertibility of a class of Toeplitz operators on the quarter-plane. Indiana Univ. Math. J., 1972, 21, № 11, 1031—1035 (РЖМат, 1973, 10Б569)
109. —, Howe R., On the C^*-algebra of Toeplitz operators in the quarter-plane. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 158, № 1, 203—217 (РЖМат, 1972, 2Б700) Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1973, 17, № 5, 67—81 (РЖМат, 1974, 1Б586)
110. Duffin R. J., Hilbert transforms in Yukawan potential theory. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1972, 69, № 12, 3677—3679 (РЖМат, 1973, 6Б535)
111. Elazar R., Gutterman M., On a problem of random walk in space. Can. Math. Bull., 1971, 14, № 4, 503—506 (РЖМат, 1972, 7В7)
112. Emery D. J., Exit problem for a spectrally positive process. Adv. Appl. Probab., 1973, 5, № 3, 498—520 (РЖМат, 1974, 8В73)
113. Foata D., Schützenberger M. P., On the principle of equivalence of Sparre Andersen. Math. scand., 1971, 28, № 2, 308—316 (РЖМат, 1972, 8В78)
114. Galambos J., On the distribution of the maximum of random variables. Ann. Math. Stat., 1972, 43, № 2, 516—521 (РЖМат, 1972, 12В22)
115. Gupta S. S., Panchapakesan S., On order statistics and some applications of combinatorial methods in statistics. Surv. Combin. Theory. Amsterdam e. a., 1973, 217—250 (РЖМат, 1974, 4В111)
116. Henery R. J., Solution of Wiener-Hopf integral equations using the fast Fourier transform. J. Inst. Math. and Appl., 1974, 13, № 1, 89—96 (РЖМат, 1974, 10Б1025)
117. Hepp K., On the quantum mechanical N-Body problem. Helv. phys. acta, 1969, 42, № 3, 425—458
118. Hunziker W., A proof of a conjecture of S. Weinberg. Phys. Rev., 1964, 135, № 3B, B800—B803
119. Imhof J. P., Some joint laws in fluctuation theory. Ann. Math., Stat., 1971, 42, № 3, 1099—1103 (РЖМат, 1972, 1В63)
120. Jain N. C., Pruitt W. E., Maximal of partial sums of independent random variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1973, 27, № 2, 141—151 (РЖМат, 1974, 5В23)
121. Jones R. B., Baxter states in the XY model. J. Phys. A. Math. Nucl. and Gen., 1973, 6, № 7, 928—950 (РЖМат, 1974, 1Б418)
122. Kennedy D. P., Estimates of the rates of convergence in limit theorems for the first passage times of random walks. Ann. Math. Stat., 1972, 43, № 6, 2090—2094 (РЖМат, 1973, 8В63)
123. Krakowki M., Arrival and departure processes in queues. Pollaczek-Khintchine formulas for bulk arrivals and bounded systems. Rev. franç. automat., inform., rech. oper., 1974, 8, NV-1, 45—56 (РЖМат, 1974, 8В47)
124. Kraut E. A., Lehmann G. W., Diffraction of electromagnetic waves by a right-angle dielectric wedge. J. Math. Phys., 1969, 10, 1340—1348
125. Kupka I. A. K., Osher S. J., On the wave equation in a multidimensional corner. Communs Pure and Appl. Math., 1971, 24, № 3, 381—393 (РЖМат, 1972, 3Б366)
126. Lieb E. H., Models in statistical mechanics. «Statistical mechanics and

field theory», ed. De Witt and K. Stora, Gordon and Breach, New York, 1971
127. —, Wu Fa Yueh, Two-dimensional ferroelectric models. «Phase transitions and Critical Phenomena, vol. 1, Exact results», ed. by Domb C. and Green M. S., Academic Press, London, New York, 1972, 331—490
128. —, Mattis D. C. (Eds), Mathematical physis in one dimension. Acad. Press., New York—London, 1966
129. **Loris-Tegbem J.**, Un Traitement algébrique du modèle d'attente $GI/M/2$. Cah. Cent. étud. rech. oper., 1971, **13**, № 2, 57—62 (РЖМат, 1972, 3В60)
130. —, An algebraic approach to some waiting time problems. Adv. Appl. Probab., 1973, **5**, № 1, 16—17 (РЖМат, 1973, 11В117)
131. —, An algebraic approach to the waiting time process in $GI/M/S$. J. Appl. Probab., 1973, **10**, № 1, 181—191 (РЖМат, 1973, 11В118)
132. **Mandrekar V.**, A direct proof of Yu. A. Rosanov's factorisation theorem from the method of D. Lowdenslager. J. Multivar. Anal., 1973, **3**, № 1, 137—140 (РЖМат, 1973, 8В103)
133. **Matthews J. P.**, A combinatorial proof of the distribution of the time to first emptiness of an infinite dam with Markovian inputs. J. Roy. Statist. Soc., 1972, **B34**, № 2, 263—267 (РЖМат, 1973, 5В72)
134. **Mullikin T. W.**, Some probability distributions for neutron transport in a half-space. J. Appl. Probab., 1968, **5**, № 2, 357—374 (РЖМат, 1969, 5Б530)
135. **Oguchi Akihide**, Tsuchida Yoshihiro, Spin waves in a one-dimensional Heisenberg antiferromagnet. Progr. Theor. Phys., 1973, **49**, № 1, 76—82 (РЖМат, 1973, 9Б493)
136. **Osher S. J.**, On certain Toeplitz operators in two variables. Pacif. J. Math., 1970, **34**, № 1, 123—129 (РЖМат, 1971, 4Б693)
137. —, A symmetrizer for certain hyperbolic mixed problems with a singular coefficient. Indiana Univ. Math. J., 1973, **22**, № 7, 667—671 (РЖМат, 1973, 12Б433)
138. —, Initial-boundary value problems for hyperbolic systems in regions with corners. I. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **176**, Febr., 141—164 (РЖМат, 1973, 12Б432)
139. —, An ill posed problem for a hyperbolic equation near a corner. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, **79**, № 5, 1043—1044 (РЖМат, 1974, 6Б438)
140. —, On Green's function for the biharmonic equation in a right angle wedge. J. Math. Anal. and Appl., 1973, **43**, № 3, 705—716 (РЖМат, 1974, 2Б441)
141. —, Discrete potential theory and Toeplitz operators on the quarter-plane. I. Preprint, 1974
142. **Prabhakar M. D. N.**, Factorization of discrete process spectral matrices. IEEE Trans. Inform. Theory, 1973, **19**, № 5, 693—696 (РЖМат, 1974, 5В124)
143. **Prabhu N. U.**, Wiener-Hopf factorisation for convolution semigroups. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1972, **23**, № 2, 103—113 (РЖМат, 1973, 3В78)
144. —, Further results on Wiener-Hopf factorisation. Adv. Appl. Probab., 1973, 5, № 1, 19—20 (РЖМат, 1973, 10В61)
145. **Poyntz C. D.**, Jackson R. R. P., The steadystate solution for the quening process $E_h/E_m/r$. Oper Res. Quart., 1973, **24**, № 4, 615—625 (РЖМат, 1974, 6В48)
146. **Richardson T. G.**, Sirovich L., The bound wave boundary value problem in kinetic theory. I. J. Math. Phys., 1971, **12**, № 8, 1784—1978 (РЖМат, 1972, 3Б386)
147. **Roos B. W.**, Analytic functions in physics and engineering. New York, 1969
148. **Rosenblum M.**, Rovnyak J., The factorisation problem for nonnegative operator valued functions. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77**, № 3, 287—318 (РЖМат, 1972, 1Б786)
149. **Rossberg H.-J.**, Ausbeutung einer bekannten Wiener-Hopf-Faktorisierung

beim Wartemodel $G/G/1$ und einer mit ihm zusammenhängenden Irrfahrt. Math. Operationsforsch. und Statist., 1971, 2, № 2, 129—146 (РЖМат, 1972, 1В138)
150. **Rota G.-C.**, Baxter algebras and combinatorial identities. I. Bull. AMS, 1969, **75**, № 2, 325—329 (РЖМат, 1970, 3В261)
151. —, Baxter algebras and combinatorial identities. II. Bull. AMS, 1969, **75**, № 2, 330—334 (РЖМат, 1970, 5В266)
152. **Sen K.**, Distribution of crossings in restricted paths. Acta math. Acad. sci. hung., 1971, **22**, № 1—2, 23—36 (РЖМат, 1972, 5В46)
153. —, Path crossing two and three lines. Acta math. Acad. sci. hung., 1971, **22**, № 1-2, 37—49 (РЖМат, 1972, 5В47)
154. **Speed T. P.**, A note on random walks. II. J. Appl. Probab., 1973, **10**, № 1, 218—222 (РЖМат, 1973, 12В98)
155. **Springer S. G.**, Pedley T. J., The solution of heat transfer problems by the Wiener-Hopf technique. I. Leading edge of a hot film. Proc. Roy. Soc. London, 1973, **A333**, № 1594, 347—362 (РЖМат, 1973, 12Б574)
156. **Strang G.**, Toeplitz operators in a quarter-plane. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, **76**, № 6, 1303—1307 (РЖМат, 1971, 8Б556)
157. **Takács L.**, Discrete queues with one server. J. Appl. Probab., 1971, **8**, № 4, 691—707 (РЖМат, 1972, 5В52)
158. —, On a formula of Pollaczek and Spitzer. Stud. math. (PRL), 1972, **41**, № 1, 27—34 (РЖМат, 1972, 7В16)
159. **Takahashi M.**, One-dimensional Heisenberg model at finite temperature. Progr. Theor. Phys., 1971, **46**, № 2, 401—415 (РЖМат, 1972, 6Б458)
160. **Thombetti T.**, On a singular integral equation in the theory of radiative transfer. Meccanica, 1971, **6**, № 3, 119—124 (РЖМат, 1972, 4Б624)
161. **Trubatch S. L.**, Erroneous bound state conditions from an algebraic misrepresentation of spin wave theory. J. Math. Phys., 1972, **13**, № 12, 1869 (РЖМат, 1973, 7Б449)
162. **Weinberg S.**, Systematic solution of multiparticle scattering problems. Phys. Rev., 1964, **133**, № 1B, B232—B256
163. **Wiener N.**, Hopf E., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. Sitzungsber. Berliner Akad. Wiss., 1931, 696—706
164. **Wu F. Y.**, Eight-vertex model on the honeycomb lattice. J. Math. Phys., 1974, **15**, № 6, 687—691 (РЖМат, 1974, 12Б307)
165. **Wu Tai Tsun**, Theory of Toeplitz determinants and the spin correlations of the two-dimensional ising model I. Phys. Rev., 1966, **149**, № 1, 380—401
166. **Yang C. N.**, Yang C. P., One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system. Phys. Rev., 1966, **150**, 321—327
167. —, —, One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. II. Properties of the ground state energy per lattice site for an infinite system. Phys. Rev., 1966, **150**, 327—339