Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. С. Понизовский, О размерных конгруэнциях на свободной полугруппе,
*Алгебра и анализ*, 2001, том 13, выпуск 5, 150–155

https://www.mathnet.ru/aa966

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
16 декабря 2025 г., 21:45:03

Алгебра и анализ
Том 13 (2001), вып. 5

# О РАЗМЕРНЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ НА СВОБОДНОЙ ПОЛУГРУППЕ

© И. С. Понизовский

Известно, что фактор-группа свободной группы по любой размерной подгруппе нильпотентна, а потому и нильпотентна по Мальцеву. В статье доказывается, что для свободной полугруппы ситуация в известном смысле противоположна: фактор-полугруппа свободной (некоммутативной) полугруппы по любой размерной конгруэнции не является нильпотентной по Мальцеву.

**1. Определение размерных конгруэнций.** Пусть $S$ — полугруппа, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Z}[S]$ — полугрупповое кольцо $S$ над $\mathbb{Z}$. Пусть $1$ — единица $\mathbb{Z}$. Для любого $x \in S$ полагаем $x \cdot 1 = x$, так что можем считать $S \subset \mathbb{Z}[S]$. Через $A(S)$ обозначается фундаментальный идеал $\mathbb{Z}[S]$: $A(S)$ есть $\mathbb{Z}$-подмодуль кольца $\mathbb{Z}[S]$, порожденный всеми разностями вида $x - y$, где $x$, $y \in S$. Равносильно: $A(S)$ есть ядро пополняющего гомоморфизма $\varepsilon$:

$$\varepsilon \begin{cases} \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}, \\ \Sigma a_x x \mapsto \Sigma a_x \quad (a_x \in \mathbb{Z}, x \in S). \end{cases} \tag{1.1}$$

Пусть $n$ — натуральное. Естественный эпиморфизм колец

$$\delta_n : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[S]/(A(S))^n$$

индуцирует гомоморфизм $S$, а потому и конгруэнцию $\Delta_n(S)$ на $S$: $\Delta_n(S) = \{(x, y) \in S \times S \mid \delta_n(x) = \delta_n(y)\} = \{x, y) \in S \times S \mid x - y \in (A(S))^n\}$.

$\Delta_n(S)$ называется $n$-й размерной конгруэнцией на $S$. Так как $x - y \in A(S)$ при $x, y \in S$ по определению, то $\Delta_1(S) = S \times S$. Из того, что $(A(S))^n \supseteq (A(S))^{n+1}$, следует $\Delta_n(S) \supseteq \Delta_{n+1}(S)$, так что размерные конгруэнции на полугруппе образуют убывающую последовательность. Если $S = G$ есть группа, то ядро $D_n(G)$ конгруэнции $\Delta_n(G)$ есть классическая $n$-я размерная подгруппа группы $G$ [1, 4, 5].

Б. И. Плоткин предложил следующую проблему.

*Ключевые слова:* свободная полугруппа, размерная конгруэнция.

**Проблема Плоткина.** Для данной полугруппы $S$ и данного $n$ описать конгруэнцию $\Delta_n(S)$. Эта проблема изучалась автором в ряде статей [2, 3, 6]. Нас будет интересовать случай $S$ — свободной некоммутативной полугруппы. Поэтому везде дальше $F$, $M$, $S$ — соответственно свободная группа, свободный моноид, свободная полугруппа в счетном алфавите $X$.

Оказалось [6], что размерные конгруэнции на $M$ — это в точности соответствующие части размерных конгруэнций на $F$, именно для любого натурального $n$

$$\Delta_n(M) = \Delta_n(F) \cap (M \times M) = \{(x, y) \in M \times M \mid x \cdot D_n(F) = y \cdot D_n(F)\}.$$

Это не так для свободной полугруппы $S$: всегда

$$\Delta_n(S) \subseteq \Delta_n(F) \cap (S \times S),$$

но уже для $n = 2$ здесь имеется строгое неравенство.

**2. Нильпотентность по Мальцеву.** Пусть $X$ — бесконечный алфавит, и пусть $x$, $y$, $w_1$, $w_2, \cdots \in X$. Определим слова $x_n$, $y_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ индуктивно условием

$$x_0 = x, \quad y_0 = y, \quad x_{n+1} = x_n w_{n+1} y_n, \quad y_{n+1} = y_n w_{n+1} x_n.$$

Полугруппа $T$ называется нильпотентной по Мальцеву (ступени $n$), если она удовлетворяет тождеству $x_n = y_n$. Мальцев показал, что группа $G$ нильпотентна ступени $n$ тогда и только тогда, когда $G$ как полугруппа нильпотентна по Мальцеву ступени $n$. Важным обстоятельством здесь является то, что тождества $x_n = y_n$ полугрупповые (в них не входят символы $z^{-1}$ для $z \in X$). Тождества $x_n = y_n$ называются тождествами Мальцева. Нетрудно проверить, что тождества Мальцева имеют один из следующих двух видов:

$$xuy = yvx, \quad xux = yvy. \tag{2.1}$$

**3. Основные результаты.** Они даются следующим утверждением.

**Теорема.** *Пусть $S$ — свободная некоммутативная полугруппа, $n$ — натуральное число, $\Delta_n(S)$ — $n$-я размерная конгруэнция на $S$. Тогда*

(1) *при любом $n$ фактор-полугруппа $S/\Delta_n(S)$ не является нильпотентной по Мальцеву;*

(2) *фактор-полугруппа $S/\Delta_2(S)$ удовлетворяет тождеству $axyb = ayxb$;*

(3) (*описание* $\Delta_2(S)^\star$) *следующие условия равносильны*:

(3.1) $u,\ v \in S,\ u \neq v,\ (u,v) \in \Delta_2(S)$;

(3.2) *существуют* $a,\ b,\ c,\ d \in S$ *такие, что* $u = acb,\ v = adb$, *причем слова* $c$, $d$ *различаются только порядком записи букв из* $X$.

Ввиду (2.1) из (3) следует (1) для $n = 2$, а потому и (3) для любого $n$ (поскольку $\Delta_2(S) \supseteq \Delta_n(S)$ при любом $n \geqslant 2$). Также легко показать, что (3) влечет (2). Поэтому достаточно доказать (3), что и делается в п. 7. Основным инструментом является дифференциальное исчисление Фокса в групповом кольце $\mathbb{Z}[F]$.

**4. Дифференциальное исчисление Фокса.** Дифференцированием (левым) в кольце $\mathbb{Z}[F]$ называется линейное отображение $D : \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[F]$ такое, что

$$D(uv) = u \cdot D(v) + v(1) \cdot D(u) \quad (u, v \in \mathbb{Z}[F]), \tag{4.1}$$

где $v(1)$ есть результат замены в $v$ всех элементов $F$ единицей; равносильно: $v(1) = \varepsilon(v)$ (см. 1.1). Для любого $x \in X$ существует единственное (левое) дифференцирование $\frac{\partial}{\partial x}$, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \text{для всех } y \in X,\ y \neq x.$$

Для $u \in \mathbb{Z}[F]$ $\frac{\partial u}{\partial x}$ называется производной Фокса от $u$ по $x$. Естественно определяются производные высших порядков. Именно пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$. Полагаем индуктивно:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_n \partial x_{n-1} \ldots \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{n-1} \ldots \partial x_1}\right).$$

Нам понадобятся следующие легко проверяемые свойства дифференцирования в $\mathbb{Z}[F]$.

(4.2) Если $u \in \mathbb{Z}[S]$, то $\frac{\partial u}{\partial x} \in \mathbb{Z}[M]$.

(4.3) Если $u,\ v \in \mathbb{Z}[F]$ и $v \in A(F)$, то для любого (левого) дифференцирования $D$ будет $D(uv) = u \cdot D(v)$.

(4.4) Пусть $m$ — натуральное. Тогда

$$\frac{\partial(x^2)}{\partial x} = x + 1, \quad \frac{\partial(x^m)}{\partial x} = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1 \ \ (m \geqslant 2);$$

(4.5) Если $u \in S$ и $x$ не входит в несократимую запись $u$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

---

*Описание $\Delta_n(S)$ при $n > 2$ пока не известно.

(4.6) Если $u = vw$, где $u$, $w \in S$, и $x$ не входит в несократимую запись $w$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$.

(4.7) Любой элемент $u \in \mathbb{Z}[S]$ есть полином от некоммутирующих переменных $t_i = x_i - 1$ $(x_i \in X)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. При этом $u \in (A(F))^n$ тогда и только тогда, когда $u$, как полином от переменных $\{t_i\}$, не содержит членов степени, меньшей $n$.

Это прямо следует из [1; 8.2.1, 8.2.2], поскольку все производные достаточно высоких порядков от элементов $\mathbb{Z}[S]$ равны нулю.

**5**. Правые производные определяются аналогично левым с заменой (4.1) на его „правый" аналог:

$$D(uv) = D(u) \cdot v + u(1) \cdot D(v).$$

**6**. Везде в этом пункте $x \in X$.

**Лемма 1.** *Если* $u \in (A(S))^2$, *то* $\frac{\partial u}{\partial x} \in A(S)$.

**Доказательство.** Из определения $A(S)$ следует, что любой элемент $u \in (A(S))^2$ есть линейная комбинация элементов вида $(v - y)(w - y)$, где $v$, $w \in S$, $y$ — любой фиксированный элемент $X$ (так что можно считать $y \neq x$). Так как $w - y \in A(F)$, то из (4.3)

$$\frac{\partial(v - y)(w - y))}{\partial x} = (v - y)\frac{\partial(w - y)}{\partial x}.$$

По (4.2) $\frac{\partial(w-y)}{\partial x} \in \mathbb{Z}[M]$, откуда $\frac{\partial((v-y)(w-y))}{\partial x} \in A(S)$. Но тогда и $\frac{\partial u}{\partial x} \in A(S)$ ввиду линейности дифференцирования. •

**Лемма 2.** *Пусть* $u = x^m v \in S$, $v \in S$, $m$ — *целое положительное. Тогда* $\frac{\partial u}{\partial x} \notin \mathbb{Z}[S]$.

**Доказательство.** По определению (4.1), с учетом (4.4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^m \frac{\partial v}{\partial x} + v(1)\frac{\partial(x^m)}{\partial x} = x^m \frac{\partial v}{\partial x} + v(1)(x^{m-1} + \cdots + 1).$$

Ввиду (4.2) будет $\frac{\partial v}{\partial x} \in \mathbb{Z}[M]$, так что $x^m \frac{\partial v}{\partial x} \in \mathbb{Z}[S]$. Поскольку $v \in S$, то $v(1) = 1$. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = w + x^{m-1} + \cdots + 1,$$

где $w \in \mathbb{Z}[S]$. Но тогда $\frac{\partial u}{\partial x} \notin \mathbb{Z}[S]$, ибо $1 \notin S$. •

**Лемма 3.** *Пусть $v$, $w \in S$, $u = vw$. Пусть, кроме того, $x$ входит в несократимую запись $w$, но $x$ не входит в несократимую запись $v$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} \in \mathbb{Z}[S]$.*

**Доказательство.** Имеем по (4.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial w}{\partial x} + w(1)\frac{\partial v}{\partial x}.$$

В силу (4.5) $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, по (4.2) $\frac{\partial w}{\partial x} \in \mathbb{Z}[M]$. Отсюда $\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial w}{\partial x} \in \mathbb{Z}[S]$. •

**Лемма 4.** *Пусть $u$, $v \in S$, $u \neq v$. Если $u - v \in (A(S))^2$, то найдутся $a$, $b$, $c$, $d \in S$ такие, что $c$, $d$ различаются лишь порядком записи букв из $X$, и*

$$u = acb, \quad v = adb. \tag{6.1}$$

**Доказательство.** Пусть $u$, $v$ такие, как в условиях леммы. По лемме 1 будет $\frac{\partial(u-v)}{\partial x} \in A(S)$. Так как $u - v \neq 0$, то найдется $x \in X$, входящее в несократимую запись хотя бы одного из $u$, $v$. Если слова $u$, $v$ начинаются разными буквами из $X$ (например, $u$ начинается буквой $x$, а $v$ — другой буквой из $X$), то по леммам 2, 3 один из элементов $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ принадлежит $\mathbb{Z}[S]$, а другой — нет. Но тогда $\frac{\partial(u-v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}$ не принадлежит $\mathbb{Z}[S]$, что противоречит тому, что $\frac{\partial(u-v)}{\partial x} \in A(S)$. Значит, $u, v$ начинаются одной и той же буквой из $X$. Применение правых производных вместо левых дает: $u$, $v$ кончаются одной и той же буквой из $X$. Поэтому найдутся $a$, $b$, $c$, $d \in S$ такие, что верно (6.1), где можно считать начальные (конечные) буквы слов $c$, $d$ различными. Мы получаем $acb - adb \in (A(S))^2$. Отсюда $c - d \in (A(F))^2$. Последнее означает

$$c \cdot D_2(F) = d \cdot D_2(F), \tag{6.2}$$

где $D_2(F)$ — вторая размерная подгруппа группы $F$. Но известно [5], что $D_2(G)$ есть коммутант $G$ для любой группы $G$. Поэтому (6.2) означает, что слова $c$, $d$ из $S$ различаются лишь порядком записи букв из $X$. •

**Лемма 5.** *Пусть $u \in \mathbb{Z}[S]$, причем $u \in (A(F))^2$. Тогда $u$ можно представить как сумму слагаемых вида*

$$a(t - s)(q - 1), \tag{6.3}$$

*где $a \in \mathbb{Z}$ и $t$, $q \in S$, $s \in M$.*

**Доказательство.** Пусть $u \in \mathbb{Z}[S]$ и $u \in (A(F))^2$. По (4.7) тогда $u$ есть сумма слагаемых вида

$$a(x_1 - 1)\dots(x_m - 1) \quad (a \in \mathbb{Z}, x_i \in X, m \geqslant 2). \tag{6.4}$$

Достаточно доказать, что при $m > 2$ элемент вида (6.4) можно представить как сумму элементов вида (6.3). А это легко доказывается индукцией по $m$. •

**7. Доказательство п. 3 теоремы.** Если $u$, $v \in S$ и $(u, v) \in \Delta_2(S)$, то $u - v \in (A(S))^2$, и $u$, $v$ имеют требуемый п. 3 теоремы вид по лемме 4.

Обратно, пусть существуют $a$, $b$, $c$, $d \in S$, удовлетворяющие условию (3.2). Тогда верно (6.2), откуда $c - d \in (A(F))^2$. По лемме 5 $c - d$ есть сумма слагаемых вида (6.3):

$$c - d = \Sigma B(t_i - s_i)(q_i - 1) \quad (B \in \mathbb{Z}; t_i, s_i, q_i \in S).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u - v = acb - adb &= \Sigma Ba(t_i - s_i)(q_i - 1)b \\ &= \Sigma B(at_i - as_i)(q_i b - b) \in (A(S))^2. \end{aligned}$$

Поэтому $u - v \in (A(S))^2$. Последнее означает $(u, v) \in \Delta_2(S)$. •

## Список литературы


[1] Плоткин Б. И., Вовси С. М., *Многообразия представлений групп: Общая теория, связи и приложения*, Зинатне, Рига, 1983.

[2] Понизовский И. С., *Об одной проблеме Б. И. Плоткина*, Алгебра и анализ **9** (1997), 249–256.

[3] Понизовский И. С., *О полугрупповом варианте проблемы размерной подгруппы*, Современная алгебра, вып. 2 (22), Ростов. мат. о-во и др., Ростов-на-Дону, 1997, сс. 70–74.

[4] Залесский А. Е., Михалев А. В., *Групповые кольца*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., т. 2, ВИНИТИ, М., 1973, сс. 5–118.

[5] Gupta N., *Free group rings*, Contemp. Math., vol. 66, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[6] Ponizovskiĭ I. S., *On a problem of B. I. Plotkin*, Semigroups and Applications (St. Andrews, 1997), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998, pp. 171–178.


Поступило 2 апреля 2001 г.