Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, О некоторых формулах суммирования, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1987, номер 5, 29–32

6. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа КдФ, конечно-зонные линейные операторы и абелевы многообразия//Успехи матем. наук. 1976. **31**, № 1. 55—136.
7. Adler M., van Moerbeke P. The algebraic integrability of geodesic flow on $SO(4)$//Invent. Math. 1982. **67**, N 2. 297—331.

Поступила в редакцию
04.06.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 5

УДК 517

Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ СУММИРОВАНИЯ

При изучении основного курса математического анализа в некоторых случаях оказываются весьма полезными формулы суммирования Эйлера, Абеля и Пуассона. В частности, они могут быть использованы при исследовании сходимости рядов и бесконечных произведений, при выводе асимптотических формул (например, формулы Стирлинга), при вычислении конечных и бесконечных сумм и так далее.

В настоящее время эти формулы в практике преподавания по существу не используются, так как их вывод остается за пределами материала основного курса. Объясняется это тем, что приводимые в литературе доказательства данных формул являются весьма искусственными. На самом деле, как показано ниже, формулы суммирования Эйлера и Абеля являются простым следствием основной формулы интегрального исчисления — формулы Ньютона — Лейбница. Заметим также, что обычно сама эта формула приводится без приложений и используется в основном при вычислении определенных интегралов.

Теорема 1 (формула суммирования Эйлера). *Пусть $f(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, x]$ и $\rho(x)=0{,}5-\{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x. Тогда справедлива формула*

$$\sum_{a<n\leqslant x} f(n)=\int_a^x f(t)\,dt+\rho(x)f(x)-\rho(a)f(a)-\int_a^x \rho(t)f'(t)\,dt.$$

Доказательство. Перепишем формулу в виде

$$\sum_{a<n\leqslant x} f(n)+\rho(a)f(a)-\rho(x)f(x)=\int_a^x (f(t)-\rho(t)f'(t))\,dt.$$

Обозначим через $F(x)$ функцию, стоящую в левой части равенства, а через $G(x)$ — в правой части. По существу нам надо доказать, что эти две функции тождественно равны. Легко видеть, что $F(a)=G(a)=0$.

Заметим, что $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны. Действительно, непрерывность $G(x)$ следует из свойства интеграла как функции верхнего предела. Для нецелого x непрерывность $F(x)$ вытекает из ее определения, а при целом $x=m$ — из того факта, что $\lim\limits_{x\to m+0} F(x)$ и $\lim\limits_{x\to m-} F(x)$ совпадают и равны

$$F(m)=\sum_{a<n\leqslant m} f(n)+\rho(a)f(a)-\frac{1}{2}f(m).$$

Другими словами, при целом $x=m$ положительный скачок функции $F_1(x)=\sum\limits_{a<n\leqslant x} f(n)$ «гасится» отрицательным скачком функции $F_2(x)=\rho(a)f(a)-\rho(x)f(x)$, в результате чего их сумма $F_1(x)+F_2(x)=F(x)$ оказывается непрерывной. Кроме того, очевидно, что в нецелых точках x производные $F(x)$ и $G(x)$ существуют и равны между собой. Отсюда по теореме Ньютона—Лейбница $F(x)=G(x)$ при всех x, что и требовалось доказать.

Тот же прием позволяет получить простое доказательство формулы суммирования Абеля.

Теорема 2 (формула суммирования Абеля). *Пусть $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, x]$ и*

$$A(t)=\sum_{a<n\leqslant t} a(n).$$

Тогда

$$\sum_{a<n\leqslant x} a(n)f(n)=-\int_a^x A(t)f'(t)\,dt+A(x)f(x).$$

Доказательство. Перепишем формулу в виде

$$\sum_{a<n\leqslant x} a(n)f(n)-A(x)f(x)=-\int_a^x A(t)f'(t)\,dt.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, через $F(x)$ и $G(x)$ обозначим соответственно правую и левую части последней формулы и немедленно получим, что эти функции совпадают в точке a и являются непрерывными и кусочно дифференцируемыми на отрезке $[a, x]$, откуда в силу теоремы Ньютона—Лейбница следует требуемое тождественное равенство функций $F(x)$ и $G(x)$. Теорема 2 доказана.

Заметим, что подобным образом для более гладких функций можно доказать и более точные формулы, например формулу Н. Я. Сонина (см. [1, с. 34]). Следствием полученных в теоремах 1 и 2 формул суммирования Эйлера и Абеля является формула суммирования Пуассона.

Теорема 3 (формула суммирования Пуассона). *Пусть на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ функция $f(x)$ имеет первую непрерывную производную и пусть a и b являются полуцелыми числами. Тогда справедлива следующая формула*:

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\int_a^b f(x)\,e^{2\pi inx}\,dx.$$

Доказательство. Нам потребуется простой факт из теории рядов Фурье.

Лемма. *Для нецелых x при $N>1$ справедливо равенство*

$$\rho(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin 2\pi nx}{\pi n}+O\left(\min\left(1, \frac{1}{N\|x\|}\right)\right), \tag{1}$$

где $\|x\|$ — расстояние от точки x до ближайшего целого числа.

Приведем прямое и сравнительно простое доказательство этого утверждения, не использующее теорию рядов Фурье.

Без ограничения общности можно считать, что $0<x\leqslant 0{,}5$, так как функция $\rho(x)$ — периодическая с периодом единица и нечетная. Имеем равенство

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin 2\pi nx}{\pi n} = 2\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \cos 2\pi nt\right) dt = 2\int_0^x \frac{\sin \pi(2N+1)t}{2\sin \pi t}\, dt - x =$$

$$= -\int_x^{0,5} \frac{\sin \pi(2N+1)t}{\sin \pi t}\, dt + \rho(x). \tag{2}$$

Покажем, что

$$|I| = \left|\int_x^{0,5} \frac{\sin \pi(2N+1)t}{\sin \pi t}\, dt\right| = O\left(\min\left(1, \frac{1}{N\|x\|}\right)\right). \tag{3}$$

Из равенства (2) при $0<x\leqslant N^{-1}$ следует, что

$$|I| \leqslant |\rho(x)| + 2\int_0^x \left|\sum_{n=1}^{N} \cos 2\pi nt\right| dt \leqslant 0{,}5 + 2xN \leqslant 2{,}5.$$

Далее, промежуток $[x,\ 0{,}5]$ разобь[illegible] с помощью точек $l/(2N+1)$, l — целое, на промежутки, длины которых не превосходят $1/(2N+1)$. В соответствии с этим интеграл I представляется знакопеременным рядом. Отсюда следует, что при некоторых x_0 и $\sigma\leqslant 1/(2N+1)$, $x\leqslant x_0<x_0+\sigma\leqslant 0{,}5$, справедливо неравенство

$$|I| \leqslant \int_{x_0}^{x_0+\sigma} \frac{dt}{\sin \pi t} \leqslant \frac{\sigma}{\sin \pi x_0} \leqslant \frac{\sigma}{\sin \pi x} \leqslant \frac{1}{(2N+1)\,2x} = O\left(\frac{1}{N\,\|x\|}\right).$$

(Здесь мы воспользовались тем, что при $0\leqslant x\leqslant 0{,}5$ $\sin \pi x\geqslant 2x$.) Это соображение при оценке интегралов, подобных I, часто использовал И. М. Виноградов (см. [2, с. 29]). Таким образом, оценка (3) получена, а вместе с ней доказана формула (1) (ср. [3, § 3.12 «Явление Гиббса», с. 61—63]). Лемма доказана. Перейдем к доказательству теоремы 3.

Поскольку a и b — полуцелые числа, то $\rho(a)=\rho(b)=0$. По формуле суммирования Эйлера (теорема 1) имеем

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \rho(x) f'(x)\,dx.$$

Из (1) следует, что

$$\int_a^b \rho(x) f'(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi n} \int_a^b f'(x) \sin 2\pi nx\,dx + R, \tag{4}$$

$$R = O\left(M \int_a^b \min\left(1, \frac{1}{N\|x\|}\right) dx\right), \quad M = \max_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Оценим остаточный член R. Для этого окружим целые точки окрестностями длины $1/N$, а в качестве оценки подынтегральной функции возьмем единицу. На оставшемся множестве подынтегральную функцию оценим величиной $1/N\|x\|$. Отсюда имеем

$$R=O\left(\frac{M\ln N}{N}(b-a)\right).$$

Проинтегрируем по частям интегралы формулы (4). Получим

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n)=\sum_{n=-N}^{N}\int_a^b f(x)\,e^{2\pi inx}\,dx+O\left(\frac{M\ln N}{N}(b-a)\right). \quad (5)$$

Перейдя к пределу в (5) при $N\to+\infty$, получим требуемую формулу. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М., 1981.
2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М., 1980.
3. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье. М., 1962.

Поступила в редакцию
10.10.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 5

УДК 513.83

А. Ч. Чигогидзе

ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛЬСКИХ $AE(n)$-ПРОСТРАНСТВ

Известный результат Хана—Мазуркевича—Серпинского [1] утверждает, что класс континуумов Пеано (т. е. непрерывных образов отрезка) совпадает с классом связных и локально связных компактов. Последний класс в силу соответствующей теоремы Куратовского [1] в свою очередь совпадает с классом $AE(1)$-компактов. Этот же класс компактов был позднее охарактеризован Хоффманом [2] как класс 0-обратимых образов гильбертова куба Q. А. Н. Дранишников [3] распространил последнее утверждение, доказав, что класс $AE(n+1)$-компактов совпадает с классом n-обратимых образов Q. Из результатов Бествина [4] и А. Н. Дранишникова следует также, что $AE(n)$-компакты и только они являются n-обратимыми образами n-мерного универсального менгеровского компакта.

Однако до настоящего времени не было известно ни одной подобной характеристики некомпактных $AE(n)$-пространств. Исключение составляет случай $n=0$, который охватывается классическим результатом Хаусдорфа о том, что класс польских $AE(0)$-пространств совпадает с классом 0-мягких образов сепарабельного бэровского пространства N^{ω} (т. е. счетной, бесконечной степени натурального ряда, взятого в дискретной топологии).

В данной статье дается полная характеристика польских $AE(n)$-пространств как образов некоторых эталонных пространств при подходящих отображениях. Причем в роли эталонных пространств выступают сепарабельное гильбертово пространство l_2 и построенные автором [5, 6] n-мерные польские $AE(n)$-пространства P_n ($P_n=P_n^{\omega}$, см.