Е. И. Моисеев, О теоремах единственности для уравнения смешанного типа, *Докл. АН СССР*, 1978, том 242, номер 1, 48–51

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 242, № 1

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Е. И. МОИСЕЕВ

О ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 14 IV 1978)

В этой работе формулируются теоремы единственности для различных уравнений смешанного типа. Метод получения такого рода теорем был коротко изложен автором в применении к задаче Трикоми для некоторых уравнений смешанного типа (для уравнения Трикоми и для уравнения Лаврентьева — Бицадзе) в заметке ([1]).

1. Рассмотрим задачу Трикоми для уравнения

$$\operatorname{sgn} y y^2 u_{xx}+u_{yy}-\mu^2 u=0 \text{ в } \mathscr{D}=\mathscr{D}_+\cup\mathscr{D}_-\cup(0,1), \tag{1}$$

где $\mathscr{D}_+$ — область, лежащая в верхней полуплоскости, ограниченная ляпуновской кривой γ, опирающейся на сегмент $[0,1]$ действительной оси, а $\mathscr{D}_-$ — область, ограниченная двумя характеристиками, выходящими из точек $A=(0,0)$ и $B=(1,0)$. Потребуем, чтобы $u\in C^0(\overline{\mathscr{D}})\cap C^1(\mathscr{D})\cap \cap C^2(\mathscr{D}_+\cup\mathscr{D}_-)$ и

$$|\nabla u(P)|\leqslant C(1/r_{PA}^{1-\varepsilon}+1/r_{PB}^{1-\varepsilon}),\quad \varepsilon>0.$$

Выписывая решение $u^\delta(x,y)$ уравнения (1) при $y<0$, аналогично работе ([1]) получим

$$u^\delta(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}e^{px-py^2/2}|y|\Psi\left(\frac{3}{4}+\frac{\mu^2}{4p},\frac{3}{2},py^2\right)p^{1/2}\frac{\Gamma(3/4+\mu^2/4p)\Phi^\delta\,dp}{\Gamma(1/2)}, \tag{2}$$

где

$$\Phi^\delta(p)=\int\limits_0^\infty e^{-px}\varphi^\delta(x)\,dx,$$

$\varphi^\delta(x)$ — сглаженная, так же как в работе ([1]), функция $u(x,0)$, $\Psi(a,b,x)$ — функция, связанная с гипергеометрической (2).

Используя (2) для вычисления $\displaystyle\int\limits_0^\infty \bar u\frac{\partial u^\delta}{\partial y}\Big|_{y=0}dx$ с помощью равенства Парсеваля и применяя формулу Грина в $\mathscr{D}_+$, а также переходя к пределу при $\delta\to0$, получим тождество

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_{\mathscr{D}_+}(y^2|u_x|^2+|u_y|^2)d\tau+\mu\int\limits_{\mathscr{D}_+}|u|^2d\tau=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(3/4+\mu^2/4p)|\Phi|^2dp}{\Gamma(1/4+\mu^2/4p)}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\operatorname{Re}(\Gamma(3/4+z)/(\sqrt{z}\,\Gamma(1/4+z)))\geqslant0 \text{ при } |\arg z|\leqslant\pi.$$

Поэтому решение задачи Трикоми для уравнения (1) единственно, если $|\arg\mu|\leqslant\pi/4$.

2. Рассмотрим задачу Трикоми для уравнения

$$u_{xx}+|y|^{-(2q-2)}\operatorname{sgn} y u_{yy}-\mu^2u=0 \text{ в } \mathscr{D}=\mathscr{D}_+\cup\mathscr{D}_-\cup(0,1) \tag{3}$$

в том же классе функций, что и в п. 1, только

$$|\nabla u(P)|\leqslant C(1/r_{PA}{}^{\alpha}+1/r_{PB}{}^{\alpha}),\quad \alpha={}^3/_2-{}^1/_2q-\varepsilon,\quad {}^1/_2<q\leqslant 1.$$

Решение $u^\delta(x, y)$ при $y<0$ имеет в этом случае вид ($a\geqslant\operatorname{Re}\mu$)

$$u^\delta(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{px}\pi\sqrt{|y|}\frac{K_{1/2q}(\sqrt{p^2-\mu^2}|y|^q/q)\,(p^2-\mu^2)^{1/4q}\bar\varphi^\delta\,dp}{\Gamma(1/2q)\,(2q)^{1/2q}\sin(\pi/2q)}. \tag{4}$$

Используя формулу (4) и формулу Грина в $\mathscr{D}_+$, получим тождество для функции $v=e^{-ax}u$

$$\int\limits_{\mathscr{D}_+}\left(\frac{|v_x|^2}{y^{-(2q-2)}}+|v_y|^2\right)d\tau+(\mu^2-a^2)\int\limits_{\mathscr{D}_+}\frac{|v|^2\,d\tau}{y^{-(2q-2)}}-2a\int\limits_{\mathscr{D}_+}\frac{v_x\bar v\,d\tau}{y^{-(2q-2)}}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\pi(p^2-\mu^2)^{1/2q}|\bar\varphi|^2\,dp}{\Gamma^2(1/2q)\,(2q)^{1/q-1}\sin(\pi/2q)}.$$

Рассматривая действительную часть последнего тождества, получим при $a=\operatorname{Re}\mu$

$$\int\limits_{\mathscr{D}_+}\left(\frac{|v_x|^2}{y^{-(2q-2)}}+|v_y|^2\right)d\tau\leqslant(\operatorname{Im}\mu)^2\int\limits_{\mathscr{D}_+}\frac{|v|^2\,d\tau}{y^{-(2q-2)}},$$

т. е. если $\operatorname{Im}\mu=0$, то при $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$ $\quad v\equiv 0$.

Итак, теорема единственности для задачи Трикоми для уравнения (3) имеет место при $\mu\geqslant 0$.

Аналогичная задача в случае, когда γ — «нормальная кривая» и $\mu=0$, была рассмотрена в работе ([3]).

3. Если рассмотреть задачу Трикоми для уравнения

$$\operatorname{sgn} y u_{xx}+|y|^{-(2q-2)}u_{yy}-\mu^2u=0 \quad\text{в}\quad \mathscr{D}=\mathscr{D}_+\cup\mathscr{D}_-\cup(0,1), \tag{5}$$

в том же классе функций, что и в п. 2, при ${}^1/_2<q\leqslant 1$, то нетрудно прийти к следующему тождеству для $v=e^{-ax}u$, $a>|\operatorname{Im}\mu|$:

$$\int\limits_{\mathscr{D}_+}\left(\frac{|v_x|^2}{y^{-(2q-2)}}+|v_y|^2\right)d\tau+(\mu^2-a^2)\int\limits_{\mathscr{D}_+}\frac{|v|^2\,d\tau}{y^{-(2q-2)}}2a\int\limits_{\mathscr{D}_+}\frac{v_x\bar v\,d\tau}{y^{-(2q-2)}}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\pi(\mu^2+p^2)^{1/2q}|\bar\varphi|^2\,dp}{\Gamma^2(1/2q)\,(2q)^{1/q-}\sin(\pi/2q)}.$$

Из рассмотрения действительной части последнего тождества получим, что решение задачи Трикоми для уравнения (5) единственно, если $|\operatorname{Im}\mu|\leqslant(\operatorname{Re}\mu)/\sqrt{2}$.

4. Отметим, что теоремы единственности сохраняются в том же виде для уравнений (1), (3), (5), а также для уравнения Трикоми и уравнения Лаврентьева — Бицадзе, рассмотренных в работе ([1]), если краевое условие при $y<0$ задавать на части левой и правой характеристик. Деление характеристик на части производится путем выпускания из точки $(x_0, 0)$ двух характеристик до пересечения с границей $\partial\mathscr{D}_-$ области $\mathscr{D}_-$ $(0<x_0<1)$.

5. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\operatorname{sgn} y|y|^{2q-2}u_{xx}+u_{yy}-\mu^2\left(\frac{\operatorname{sgn} y+1}{2}\right)u=0\quad\text{в}\quad \mathscr{D}=\mathscr{D}_+\cup\mathscr{D}_-\cup(0,1) \tag{6}$$

в том же классе функций и при тех же краевых условиях, что и в п. 1, но при $q\geqslant 1$.

Задача Трикоми для уравнения (6) легко сводится к следующей краевой задаче для эллиптического уравнения (4) при $q>1$:

$$y^{2q-2}u_{xx}+u_{yy}-\mu^2u=0 \text{ в } \mathscr{D}_+, \quad u|_\gamma=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=C_q\int_0^x \frac{u_t(t,0)\,dt}{(x-t)^{1/q}}, \tag{7}$$

где C_q — некоторая постоянная, зависящая от q. Отметим, что краевое условие на сегменте $[0, 1]$ действительной оси для уравнения (7) легко получается методом, изложенным выше. Если $q=1$, то краевое условие на $[0, 1]$ принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}.$$

Задача при $q=1$ рассмотрена в работе ([5]), где показано, что система корневых функций для задачи (7) полна и спектр лежит вне угла $|\arg\mu^2|\leqslant 3\pi/4$.

Рассмотрим случай $q>1$. Выпишем решение уравнения (6) при $y<0$:

$$u^\delta(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{px}\pi\sqrt{|y|}K_{1/2q}(p|y|^q/q)p^{1/2q}\tilde\varphi^\delta(p)\,dp}{\Gamma(1/2q)\,(2q)^{1/2q}\sin(\pi/2q)}. \tag{8}$$

Если продифференцировать формулу (8) по y, то получим краевое условие на $[0, 1]$ в задаче (7):

$$\left.\frac{\partial u^\delta}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{\pi}{\Gamma^2(1/2q)\,(2q)^{1/q-1}\sin(\pi/2q)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{px}p\tilde\varphi^\delta(p)\,dp}{p^{1-1/q}}=$$

$$=C_q\int_0^x\frac{\varphi^\delta(t)\,dt}{(x-t)^{1/q}}.$$

Применяя формулу Грина по области $\mathscr{D}_+$, получим тождество

$$\int_{\mathscr{D}_+}(y^{2q-2}|u_x|^2+|u_y|^2)\,d\tau+\mu^2\int_{\mathscr{D}_+}|u|^2\,d\tau=-\int_0^1\bar u\frac{\partial u}{\partial y}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2q}\right)(2q)^{1/q-1}\sin(\pi/2q)}\int_{-i\infty}^{+i\infty}p^{1/q}|\tilde\varphi|^2\,dp.$$

Из рассмотрения действительной и мнимой частей равенства (9) получим ($\mu=\mu_1+i\mu_2$)

$$\int_{\mathscr{D}_+}(y^{2q-2}|u_x|^2+|u_y|^2)\,d\tau\leqslant\int_{\mathscr{D}_+}|u|^2\,d\tau\,(\mu_2^2-\mu_1^2); \tag{10}$$

$$2\mu_1\mu_2\int_{\mathscr{D}_+}|u|^2\,d\tau=-\operatorname{Im}\int_0^1\bar u\frac{\partial u}{\partial y}\,dx. \tag{11}$$

Очевидно, что выражение $\int_{\mathscr{D}_+}(y^{2q-2}|v_x|^2+|v_y|^2)\,d\tau$ достигает своего минимального значения среди функций v, достаточно гладких в верхней полуплоскости P_+ и таких, что $v(x,0)=\varphi(x)$, на функции, которая является решением следующей задачи:

$$y^{2q-2}v_{xx}+v_{yy}=0 \text{ в } P_+, \tag{12}$$
$$v|_{y=0}=\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — это $u(x, 0)$, продолженная нулем на всю действительную ось.

С помощью преобразования Фурье по x решение задачи (12) легко записать:

$$\hat{v}(\xi, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} v(x, y)e^{-i\xi x}\,dx=\frac{\pi\sqrt{y}K_{1/2q}(|\xi|y^q/q)|\xi|^{1/2q})\hat{\varphi}(\xi)}{\Gamma(1/2q)(2q)^{1/2q}\sin(\pi/2q)}.$$

Используя формулу Грина для верхней полуплоскости P_+, получим

$$\int_{P_+}(|v_x|^2y^{2q-2}+|v_y|^2)\,d\tau=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial v}{\partial y}\bar{v}\,dx=-\int_0^1\frac{\partial v}{\partial y}\bar{v}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{\Gamma^2(1/2q)(2q)^{1/q-1}\sin(\pi/2q)}\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi|^{1/q}|\hat{\varphi}|^2\,d\xi=$$

$$=\frac{\pi}{2\pi i\Gamma^2(1/2q)(2q)^{1/q-1}\sin(\pi/2q)}\int_{-i\infty}^{+i\infty}|p|^{1/q}|\tilde{\varphi}|^2\,dp.$$

При получении последнего равенства была использована формула, связывающая преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\xi)$ функции $\varphi(x)$ с преобразованием Лапласа $\tilde{\varphi}(p)$ функции $\varphi(x)$:

$$\hat{\varphi}(\xi)=\tilde{\varphi}(-i\xi)/\sqrt{2\pi}.$$

Далее,

$$\int_{\mathscr{D}_+}(y^{2q-2}|u_x|^2+|u_y|^2)\,d\tau>\int_{P_+}(y^{2q-2}|v_x|^2+|v_y|^2)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{\pi}{\Gamma^2(1/2q)(2q)^{1/q-1}\sin(\pi/2q)}\int_{-i\infty}^{+i\infty}|p|^{1/q}|\tilde{\varphi}|^2\,dp\geqslant$$

$$\geqslant\left|\frac{\pi}{\Gamma^2(1/2q)(2q)^{1/q-1}\sin(\pi/2q)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}p^{1/q}|\tilde{\varphi}|^2\,dp\right|=$$

$$=\left|\int_0^1\bar{u}\frac{\partial u}{\partial y}dx\right|\geqslant\left|\operatorname{Im}\int_0^1\bar{u}\frac{\partial u}{\partial y}dx\right|.$$

Используя (10), (11) и последнюю цепочку неравенств, имеем

$$\int_{\mathscr{D}_+}|u|^2\,d\tau(\mu_2^2-\mu_1^2)>2\mu_1\mu_2\int_{\mathscr{D}_+}|u|^2\,d\tau,$$

или

$$\mu_2^2-\mu_1^2-2\mu_1\mu_2>0.$$

Поэтому, если $|\mu_2|\leqslant\mu_1(1+\sqrt{2})$, то получаем противоречие, из которого следует, что задача (7) имеет единственное решение, если $|\arg\mu^2|\leqslant 3\pi/4$, т. е. тот же результат, что и в случае $q=1$, когда на $[0, 1]$ задана наклонная производная.

Для задачи (7) остается в силе также замечание, высказанное в п. 4.

В заключение автор выражает благодарность чл.-корр. АН СССР А. В. Бицадзе и проф. В. А. Ильину за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е. И. Моисеев*, ДАН, т. 238, № 3 (1978). [2] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, т. 1, М., 1965. [3] *И. Л. Кароль*, ДАН, т. 88, № 2 (1953). [4] *М. М. Смирнов*, Уравнения смешанного типа, М., 1970. [5] *Е. И. Моисеев*, ДАН, т. 226, № 5 (1976).