О. Е. Тихонов

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СЛЕДА

В статье доказывается ряд неравенств для выпуклых функций и следа на алгебре Неймана, известных в основном в некоторых частных случаях. Существенным моментом доказательства является использование интегралов по обобщенным разложениям единицы.

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра Неймана, $\mathcal{M}^{\text{э}}$ (соотв., $\mathcal{M}^{+}$) – множество эрмитовых (соотв. , положительных) операторов из $\mathcal{M}$, $1_{\mathcal{M}}$ – единичный элемент в $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{*}$ – пространство ультраслабо непрерывных функционалов на $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}^{+}$ – значной мерой на σ –алгебре $\mathfrak{A}(\Omega)$ подмножеств множества Ω будем называть отображение $\mathbb{X}=\{X(Q)\}:\mathfrak{A}(\Omega)\longmapsto\mathcal{M}^{+}$, σ –аддитивное в смысле ультраслабой топологии на $\mathcal{M}$. Если $X(\Omega)=1_{\mathcal{M}}$, то $\mathcal{M}^{+}$ –значную меру будем называть $\mathcal{M}^{+}$ –значным разложением единицы. Для любого $\varphi\in\mathcal{M}_{*}$ соотношение $\varphi(\mathbb{X})(Q)=$ $=\varphi(X(Q))$ определяет скалярную σ –аддитивную меру $\varphi(\mathbb{X})$ на $\mathfrak{A}(\Omega)$ с конечной полной вариацией. Пусть $g:\Omega\longmapsto\mathbb{R}$ – ограниченная измеримая функция. Соотношение

$$\varphi(I(\mathbb{X},g))=\int_{\Omega} g\,d\varphi(\mathbb{X}) \qquad (\varphi\in\mathcal{M}_{*})$$

определяет эрмитов оператор $I(\mathbb{X},g)$ из $\mathcal{M}$. Некоторые естественные и без труда проверяемые свойства отображения I приведены в работах [1 – 3] . Если $A\in\mathcal{M}^{\text{э}}$ и Ω – подмножество $\mathbb{R}$, содержащее спектр A , то через $\mathbb{P}^{A}$ будем обозначать ортогональное разложение единицы на борелевской σ –алгебре множества Ω , соответствующее оператору A .

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – алгебры Неймана, $\pi:\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{M}$ – линейное положительное ультраслабо непрерывное отображение, $\mathbb{X}$ – $\mathcal{N}^{+}$ –значная мера на $\mathfrak{A}(\Omega)$. Тогда соотношение $\pi(\mathbb{X})(Q)=\pi(X(Q))$ определяет $\mathcal{M}^{+}$ –значную меру $\pi(\mathbb{X})$ на $\mathfrak{A}(\Omega)$. Нетрудно убедиться, что если $g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ – ограниченная измеримая функция, то $\pi(I(\mathbb{X},g))=I(\pi(\mathbb{X}),g)$.

В дальнейшем будем считать фиксированным точный нормальный конечный след τ на алгебре Неймана $\mathcal{M}$.

Теорема 1. Пусть f – вещественная выпуклая функция на отрезке $[a,b]$ числовой прямой, X – $\mathcal{M}^+$ –значное разложение единицы на σ –алгебре $\mathfrak{A}(\Omega)$, функция $g:\Omega\to[a,b]$ измерима. Тогда

$$\tau(I(X,f\circ g))\geq\tau(f(I(X,g))). \tag{1}$$

Это утверждение доказано в работе [3]. Для полноты изложения приведем схему доказательства.

Для случая $f(\lambda)=|\lambda|$ утверждение теоремы сводится к неравенству

$$\tau(A_1+A_2)\geq\tau(|A_1-A_2|)\qquad(A_1,A_2\in\mathcal{M}^+),$$

доказанному А. Н. Шерстневым ([4], предложение 12). Используя это, нетрудно убедиться в справедливости неравенства (1) для любой выпуклой кусочно-линейной функции f и, производя предельный переход, для любой выпуклой функции.

Замечание. Для случая алгебры всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве и канонического следа на ней аналог теоремы 1 доказан в работе Ф. А. Березина [5]

Теорема 2. Пусть $\mathcal{N}$ – алгебра фон Неймана, $\pi:\mathcal{N}\longmapsto\mathcal{M}$ – линейное положительное ультраслабо непрерывное отображение, f – вещественная выпуклая функция на отрезке $[a,b]$ и спектр оператора $A\in\mathcal{N}^s$ содержится в $[a,b]$. Тогда, если

a) $\pi(1_{\mathcal{N}})=1_{\mathcal{M}}$

или

b) $\pi(1_{\mathcal{N}})\leq 1_{\mathcal{M}}$, $0\in[a,b]$ и $f(0)\leq 0$,

то

$$\tau(\pi(f(A)))\geq\tau(f(\pi(A))).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим оператор A в виде

$$A=\int_{[a,b]}\lambda\, dP^A=I(P^A,\lambda).$$

Тогда

$$\pi(A)=I(\pi(P^A),\lambda),\quad f(A)=I(P^A,f(\lambda)),\quad \pi(f(A))=I(\pi(P^A),f(\lambda)).$$

В условиях пункта a)

$$\tau(\pi(f(A)))=\tau(I(\pi(P^A),f(\lambda)))\geq$$

$$\geq\tau(f(I(\pi(P^A),\lambda)))=\tau(f(\pi(A))).$$

Для доказательства пункта $\mathfrak{b}$) введем $\mathcal{M}^+$ -значное разложение единицы $\mathbb{X}$:

$$X(Q)=\begin{cases}\pi(P^A(Q)) & \text{, если } 0\notin Q,\\ \pi(P^A(Q))+1_{\mathcal{M}}-\pi(1_{\mathcal{N}}) & \text{, если } 0\in Q,\end{cases}$$

где Q – борелевское подмножество отрезка $[a,b]$. Тогда, учитывая условия пункта $\mathfrak{b}$), получаем:

$$\tau(\pi(f(A)))=\tau(I(\pi(\mathbb{P}^A),f(\lambda)))\geqslant$$

$$\geqslant\tau(I(\mathbb{X},f(\lambda)))\geqslant\tau(f(I(\mathbb{X},\lambda)))=$$

$$=\tau(f(I(\pi(\mathbb{P}^A),\lambda)))=\tau(f(\pi(A))).$$

<u>Следствие 3</u>. Пусть f – вещественная выпуклая функция на отрезке $[a,b]$, содержащем спектр оператора $A\in\mathcal{M}^s$, $B_i\ (i=\overline{1,n})$ – операторы из $\mathcal{M}$. Тогда , если

a) $\sum\limits_{i=1}^{n}B_i^*B_i=1_{\mathcal{M}}$

или

b) $\sum\limits_{i=1}^{n}B_i^*B_i\leqslant 1_{\mathcal{M}}$, $0\in[a,b]$ и $f(0)\leqslant 0$,

то

$$\tau\Big(\sum_{i=1}^{n}B_i^*f(A)B_i\Big)\geqslant\tau\Big(f\Big(\sum_{i=1}^{n}B_i^*AB_i\Big)\Big).$$

<u>Теорема 4</u>. Пусть f – вещественная выпуклая функция на $\mathbb{R}^+$, $f(0)\leqslant 0$, A и B – операторы из $\mathcal{M}^+$. Тогда

$$\tau(f(A+B))\geqslant\tau(f(A))+\tau(f(B)). \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $f(0)=0$. В этом случае доказательство можно провести аналогично доказательству леммы 3 работы Косаки [6] . Как известно, существуют операторы U , V из $\mathcal{M}$ такие, что

$$A^{1/2}=U(A+B)^{1/2}, \quad B^{1/2}=V(A+B)^{1/2},$$

U^*U+V^*V – носитель $A+B$. Тогда, учитывая следствие 3, имеем:

$$\tau(f(A))+\tau(f(B))=$$

$$=\tau(f(U(A+B)U^*))+\tau(f(V(A+B)V^*))\leqslant$$

$$\leqslant\tau(Uf(A+B)U^*)+\tau(Vf(A+B)V^*)=$$

$$=\tau((U^*U+V^*V)f(A+B))=\tau(f(A+B)).$$

Пусть теперь $f(0)\leqslant 0$. Введем функцию $f_1(\lambda)=f(\lambda)-f(0)$ на $\mathbb{R}^+$. Тогда

$$\tau(f(A))+\tau(f(B))=$$

$$=\tau(f_1(A))+\tau(f_1(B))-2f(0)\tau(1_{\mathcal{M}})\leqslant$$

$$\leqslant\tau(f_1(A+B))-f(0)\tau(1_{\mathcal{M}})=\tau(f(A+B)).$$

Замечание. На простых примерах можно убедиться, что для выполнения неравенства (2) недостаточно требования $f(\lambda_1+\lambda_2)\geqslant f(\lambda_1)+f(\lambda_2)$ при $\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$.

В работе [3] было показано, как, используя неравенство (1), легко убедиться в справедливости следующего утверждения, доказанного Либерманом [7] с помощью другой техники (см. также [8]).

Теорема 5. Пусть f – вещественная выпуклая функция на отрезке $[a,b]$, A и B – операторы из $\mathcal{M}$, спектры которых содержатся в $[a,b]$. Тогда при $0\leqslant\alpha\leqslant 1$

$$\tau(f(\alpha A+(1-\alpha)B))\leqslant\alpha\tau(f(A))+(1-\alpha)\tau(f(B)).$$

Следствие 6 (см., напр., [9], теорема 1).

а) Пусть f – выпуклая неотрицательная функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая Δ_2 условию (т. е. существует константа C_f такая, что $f(2\lambda)\leqslant C_f f(\lambda)$) , A и B – операторы из $\mathcal{M}^s$. Тогда

$$\tau(f(A+B))\leqslant\frac{1}{2}C_f(\tau(f(A))+\tau(f(B))).$$

в) Пусть f – вогнутая неотрицательная функция на $\mathbb{R}^+$ для которой существует константа $C_f \geq 0$ такая, что $f(2\lambda) \geq C_f f(\lambda)$, A и B – операторы из M^+. Тогда

$$\tau(f(A+B)) \leq \frac{1}{2} C_f(\tau(f(A)) + \tau(f(B))).$$

Доказательство.

а) $$\tau(f(A+B)) = \tau(f(\tfrac{1}{2}\cdot 2A + \tfrac{1}{2}\cdot 2B)) \leq \tfrac{1}{2}\tau(f(2A)) + \tfrac{1}{2}\tau(f(2B)) \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{2} C_f(\tau(f(A)) + \tau(f(B))).$$

в) $$\tau(f(A+B)) \geq \tfrac{1}{2}\tau(f(2A)) + \tfrac{1}{2}\tau(f(2B)) \geq$$

$$\geq \tfrac{1}{2} C_f(\tau(f(A)) + \tau(f(B))).$$

Замечание. Утверждения, доказанные в статье, допускают обобщения на случай полуконечного следа, а также на неограниченные функции и неограниченные операторы, присоединенные к алгебре. Для доказательства этих обобщений достаточно осуществить подходящим образом предельные переходы (см. по этому поводу [3]).

Примечания по корректуре. 1. Во время подготовки статьи к печати была опубликавана работа [10], в которой иным способом доказывается ряд неравенств из числа приведенных выше.

2. Представляет интерес сравнить теорему 4 со следующим утверждением.

Теорема 6. Пусть $B(H)$ –алгебра всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, $\dim H \geq 2$, функция $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ такова, что а) $f(0)=0$ и в) $f(\lambda)/\lambda$ неубывает на $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (в частности, это так, если f выпуклая). Если $f(A+B) \geq f(A)+f(B)$ для всех $A, B \in B(H)^+$, то $f(\lambda) = \alpha\lambda$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$.

Для доказательства достаточно рассмотреть случай $\dim H = 2$ и матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \sqrt{\varepsilon(\delta-\varepsilon)} \\ \sqrt{\varepsilon(\delta-\varepsilon)} & \delta-\varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -\sqrt{\varepsilon(\delta-\varepsilon)} \\ -\sqrt{\varepsilon(\delta-\varepsilon)} & \delta-\varepsilon \end{bmatrix},$$

где $\delta, \varepsilon, \delta - 2\varepsilon > 0$.

Литература

1. Тихонов О. Е. Интегрируемые билинейные формы и интеграл по операторнозначной мере. – Матем. Изв. вузов, 1982, № 3, с. 76 – 80.

2. Тихонов О. Е. Пространство типа L_p относительно веса на алгебре Неймана. – Матем. Изв. вузов, 1982, № 8, с. 76 – 78.

3. Тихонов О. Е. Неравенства для следа на алгебре Неймана. – Казань, 1982. – 32 с. – Рукопись представлена Казанским ун–том. Деп. в ВИНИТИ 16 ноября 1982 г. № 5602 – 82.

4. Шерстнев А. Н. Об одном некоммутативном аналоге пространства L_1. – В кн. Матем. анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун–та, 1978, с. 112 – 123.

5. Березин Ф. А. Выпуклые функции от операторов. – Матем. сборник, 1972, т. 88, вып. 2, с. 268 – 276.

6. Kosaki H. On the continuity of the map $\varphi \mapsto |\varphi|$ from the predual of a W^*-algebra. – J. Funct. Anal., 1984, v. 59, № 1, p. 123–131.

7. Lieberman A. Entropy of states of a gage space. – Acta Sci. Math., 1978, v. 40, p. 99–105.

8. Petz D. Spectral scale of self-adjoint operators and trace inequalities. – J. Math. Anal. and Appl., 1985, v. 109, № 1, p. 74–82.

9. Tam P.K. Isometries of L_p-spaces associated with semifinite von Neumann algebras. – Trans. Amer. Math. Soc., 1979, v. 254, p. 339–354.

10. Fack T., Kosaki H. Generalized s-numbers of τ-measurable operators. – Pacific J. Math., 1986, v. 123, № 2, p. 269–300.