Ю. Р. Аланакян, К теории ионизационных волн, *ТВТ*, 1973, том 11, выпуск 6, 1150–1154

ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Том 11 *1973* № 6

УДК 533.95

К ТЕОРИИ ИОНИЗАЦИОННЫХ ВОЛН

Ю. Р. Аланакян

Получено дисперсионное уравнение ионизационной волны в условиях, когда плазма характеризуется собственной частотой ионизационно-диффузионных колебаний. Показано, что наличие отрицательных ионов может привести к раскачке ионизационной волны.

В работах [1, 2] получено дисперсионное уравнение для ионизационной волны малой амплитуды в плазме (линейное приближение), которое справедливо, когда невозможны собственные ионизационно-диффузионные колебания, рассмотренные в [3, 4]. Предлагаемая работа посвящена изучению ионизационных волн в такой области параметров, когда в плазме присутствуют колебания. Рассмотрение ведется на основе уравнений баланса частиц, причем в отличие от [1, 2] учитываются колебания плотности нейтральных частиц, что и приводит при определенных условиях к появлению характеристических частот в дисперсионном уравнении ионизационной волны. Показано, что наличие отрицательных ионов может привести к раскачке ионизационной волны. Задача решается для ограниченной плазмы с учетом неоднородности плотности частиц. Дисперсионное уравнение определяется из граничных условий.

Рассмотрим случай, когда плазма является примесью плотного инородного электронейтрального газа, не участвующего в процессах ионизации. При этом предполагается, что электроны и ионы возникают в объеме в результате прямой ударной ионизации, а рекомбинация происходит на стенках. Уравнения баланса для нейтральных атомов, электронов, положительных и отрицательных ионов имеют вид

$$\partial n/\partial t+\nabla(\mathbf{v}_n n)=-Z_i n n_e, \tag{1}$$

$$\partial n_e/\partial t+\nabla(\mathbf{v}_e n_e)=Z_i n n_e, \tag{2}$$

$$\partial n_+/\partial t+\nabla(\mathbf{v}_+ n_+)=Z_i n n_e, \tag{3}$$

$$(\partial n_-/\partial t)+\nabla(\mathbf{v}_- n_-)=0, \tag{4}$$

$$n_+=n_e+n_-, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{v}_e=-b_e[\mathbf{E}+T_e(\nabla n_e/n_e)+\eta\nabla T_e],$$

$$\mathbf{v}_\pm=\pm b_\pm[\mathbf{E}\mp T(\Delta n_\pm/n_\pm)],$$

$$\mathbf{v}_n=\mathbf{u}_n-(D\nabla n/n).$$

В этих уравнениях коэффициент Z_i характеризует процесс ионизации; T_e — температура электронов; T — температура нейтральных атомов и ионов; D — коэффициент диффузии нейтральных атомов в инородном газе; $\mathbf{u}_n$ — скорость потока нейтральных атомов, который может возникнуть, например, в результате увлечения газа электронами, движущимися во внешнем электрическом поле. В дальнейшем будем полагать, что $T_e \gg T$.

Следует отметить, что в данной работе процессы образования и распада отрицательных ионов не учитываются, т. е. предполагается, что время жизни отрицательного иона значительно больше, чем период колебаний. Это предположение принято для упрощения математических выкладок. Подробно влияние отрицательных ионов на устойчивость ионизационно-диффузионных колебаний рассмотрено в [5] для одномерного случая.

Как известно, распространение ионизационных волн обусловлено изменением электронной температуры [1, 6]. Уравнение баланса энергии электронов можно записать в виде [7]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}n_eT_e\right)+\nabla\left(\frac{3}{2}n_eT_e\mathrm{v}_e^*\right)=-n_e\mathrm{v}_e\mathbf{E}-n_eH, \tag{6}$$

где

$$\mathrm{v}_e^*=-\left(\frac{2}{3}\eta+1\right)b_2\left(\mathbf{E}+T_e\frac{\nabla n_e}{n_e}+\eta^*\nabla T_e\right),$$

H — энергия, теряемая электроном при соударениях в единицу времени; η и η^* — безразмерные величины порядка единицы.

Рассмотрим плоскопараллельный слой плазмы, ограниченный стенками $x=\pm l$. Поскольку заряженные частицы рекомбинируют на стенке, имеем следующие граничные условия:

$$n_e=n_+=n_-=0\,|_{x=\pm l}. \tag{7}$$

Система уравнений (1)—(6) с граничными условиями (7) полностью описывает задачу.

Одномерный случай, когда возмущения плотностей частиц зависят только от одной пространственной координаты x, исследован в [3], где найдена комплексная характеристическая частота ионизационно-диффузионных колебаний без учета отрицательных ионов. В данной работе на основе этих уравнений рассмотрим распространение ионизационных волн вдоль слоя плазмы.

Полагая $\nabla T_e/T_e\ll\nabla n_e/n_e$, что в рассматриваемых условиях обычно выполняется, для электрического поля из уравнений (2)—(5) получим

$$\mathbf{E}=\left(-T_e\frac{\nabla n_e}{n_e}+\mathbf{E}_0\frac{n_{0e}}{n_e}\right)\left(1-\frac{b_-n_-+b_+n_+}{b_en_e}\right)+\frac{\nabla\times\mathbf{F}}{b_en_e}. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{E}_0$ — внешнее постоянное электрическое поле, направленное вдоль слоя (ось Y); n_{0e} — невозмущенная (стационарная) плотность электронов, зависящая лишь от поперечной координаты x. Величина $\mathbf{F}$ определяется уравнением

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{F}}{n_e}\right)+b_e\nabla\left(\frac{n_{e0}}{n_e}\right)\times\mathbf{E}_0=0, \tag{9}$$

которое вытекает из условия $\nabla\times\mathbf{E}=0$ (потенциальные волны). Из (9) следует, что в нулевом приближении $\mathbf{F}_0=0$.

Предполагая, что плазма слабоионизована и число отрицательных ионов мало по сравнению с числом электронов, из уравнений (3) и (4) для стационарного распределения плотностей частиц получим

$$n_e=A_e\cos\varkappa x,\quad n_-=A_-\cos^{1/\theta}\varkappa x;\quad n=\mathrm{const}, \tag{10}$$

где $\varkappa=(Z_in/b_+T_e)^{1/2}$; $\theta=T/T_e$, A_e и A_- — плотности электронов и отрицательных ионов в середине слоя ($x=0$). Считаем, что $\theta A/A_e\ll1$.

Выражение для плотности электронов (10) получено без учета отрицательных ионов. Поправки к этой формуле, учитывающие влияние отрицательных ионов, можно найти, переписав уравнение (3) в виде

$$\frac{d^2n_e}{dx^2}+\varkappa^2 n_e=-\theta\frac{d^2n_-}{dx^2} \tag{11}$$

и решая его как неоднородное линейное уравнение относительно n_e. Далее, используя граничное условие для плотности электронов (7), получим соотношение

$$\cos\varkappa l=-\frac{A_-}{A_e}\theta^{3/2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}. \tag{12}$$

Для стационарного распределения электронной температуры уравнение (6) дает следующее соотношение:

$$\left(\eta+\frac{3}{2}\right)T_eZ_inn_e-\eta_0b_eT_e\frac{d}{dx}\left(n_e\frac{d}{dx}T_e\right)=$$
$$=-\left(T_e\frac{1}{n_e}\frac{dn_e}{dx}\right)^2b_+n_++b_en_eE_0^2-n_eH, \tag{13}$$

где $\eta_0=(\eta+3/2)(\eta^*-\eta)$. Из соотношения (13) следует, что электронная температура — постоянная величина с малой добавкой, зависящей от x $(\tilde{T}_e(x)\approx b_+/b_eT_e)$.

Линеаризуя уравнения (1)—(6) по малым возмущениям вида $\exp(iky-i\omega t)$, найдем зависимость амплитуд колебаний плотностей частиц от поперечной координаты x и с помощью граничных условий (7) получим дисперсионное уравнение. Будем интересоваться областью частот

$$D\varkappa^2\ll\omega\ll b_+T_e\varkappa^2. \tag{14}$$

При этом возмущение плотности электронов можно искать аналогично тому, как это делалось в [3], в виде $\delta n_e=\delta n_e^{(0)}+\delta n_e^{(1)}$, где $\delta n_e^{(0)}=a\cos\varkappa x$, $\delta n_e^{(1)}\ll\delta n_e^{(0)}$, а возмущения остальных величин найдем в зависимости от $\delta n_e^{(0)}$. В рассматриваемых условиях, когда амплитуда колебаний плотности электронов и стационарное распределение плотности электронов одинаково зависят от координаты x, из уравнений (6) и (13) получаем следующее простое соотношение:

$$\delta T_e=-\frac{2b_eE_0^2+ikb_eT_eE_0}{R+k^2\eta_0b_eT_e}\frac{a}{A}, \tag{15}$$

где

$$R=\frac{\partial}{\partial T_e}\left[H+\left(\eta+\frac{3}{2}\right)T_eZ_in\right],$$

из которого следует, что амплитуда колебаний температуры не зависит от координаты. Заметим, что соотношение (15), характеризующее зависимость электронной температуры от плотности, совпадает с аналогичным соотношением, найденным в [1, 2], где стационарное пространственное распределение плотности электронов предполагалось однородным.

Поскольку процессы образования и распада отрицательных ионов не учитываются, колебаниями плотности отрицательных ионов можно пренебречь и считать, что $\delta n_-=0$ [5]. Далее, учитывая, что диффузионный член в уравнении (1) мал ввиду условия (14), можно найти возмущение плотности нейтральных атомов как функцию от $\delta n^{(0)}$. В результате система линеаризованных уравнений (1)—(5) сводится к одному уравнению для функции $\delta n_e^{(1)}$ следующего вида:

$$d^2/d\varphi^2\cdot\delta n_e^{(1)}+\delta n_e^{(1)}=f(\varphi), \tag{16}$$

где $\varphi = \varkappa x$, а

$$f(\varphi) = \frac{a\cos\varphi}{Z_i n}\left[-i(\omega - ku_n) - Z_i^2 \frac{An\cos\varphi}{i(\omega - ku_n)} + b_+ T_e k^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{Z_i^2 AnD\varkappa^2}{(\omega - ku_n)^2}\cos\varphi + 2\frac{E_0 u_e}{T_e}\right], \tag{17}$$

$$u_e = \frac{dZ_i}{dT_e}\frac{nb_e T_e E_0}{R + k^2\eta_0 b_e T_e}.$$

Из уравнения (16), определив пространственное распределение возмущения плотности электронов и используя граничное условие (7), получим дисперсионное уравнение ионизационной волны

$$a\cos\varkappa l + \int\limits_0^{\pi/2} f(\varphi)\cos\varphi d\varphi = 0,$$

которое с учетом формул (12) и (17) приводится к виду

$$(\omega - ku_e)(\omega - ku_n) = \omega_0^2 + i\psi(k)(\omega - ku_n), \tag{18}$$

где $\omega_0 = Z_i\left(\frac{8}{3\pi}A_e n\right)^{1/2}$ — характеристическая частота [3],

$$\psi(k) = Z_i n \frac{A_-}{A_e}\theta^{3/2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} - b_+ T_e k^2 - 2\frac{E_0 u_e}{T_e} - \frac{\omega_0^2 D\varkappa^2}{(\omega - ku_n)^2}. \tag{19}$$

Полагая в (18) $\omega = \omega' + i\omega''$ и считая $\psi(k) \ll \omega'$, имеем две ветви колебаний:

$$\omega_\pm' = \frac{1}{2}\{k(u_e + u_n) \pm [k^2(u_e - u_n)^2 + 4\omega_0^2]^{1/2}\}. \tag{20}$$

Отсюда в случае больших длин волн ($ku \ll \omega_0$) имеем $\omega_\pm' = \pm\omega_0$. В противоположном предельном случае получим уравнение $\omega_+' = ku_e$, исследованное в [1, 2], для одномерной задачи. Это уравнение несущественно меняется при учете поперечной неоднородности и граничных условий, что показано еще в [8].

Заметим, что формула (20) допускает возможность существования стоячих волн

$$\omega_-' = 0; \quad k^2 = \frac{\omega_0^2 R}{b_e T_e\left(u_n E_0 n \frac{dZ_i}{dT_e} - \eta_0\omega_0^2\right)}.$$

Для инкремента колебаний из (18) получаем

$$\omega_\pm'' = \frac{1}{2}\psi(k)\frac{k(u_e - u_n) \pm [k^2(u_e - u_n)^2 + 4\omega_0^2]^{1/2}}{\pm[k^2(u_e - u_n)^2 + 4\omega_0^2]^{1/2}}. \tag{21}$$

Если пренебречь зависимостью u_e от k и рассмотреть простой случай, когда в выражении (19) для $\psi(k)$ существенны лишь первые два члена, обусловленные наличием отрицательных ионов и амбиполярной диффузией, получим следующие значения волновых векторов, при которых инкремент наибольший:

$$k_\pm = \mp\frac{2\omega_0}{|u_e - u_n|}\frac{(2+3p) - [(2+3p) + p^2(3+4p)]^{1/2}}{3+4p}, \tag{22}$$

где

$$p = \frac{A_-}{A_e}\theta^{3/2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{Z_i n}{b_+ T_e}\left(\frac{u_e - u_n}{2\omega_0}\right)^2.$$

Следует отметить, что в рассматриваемом случае характеристическая частота мала: $\omega_0 \ll Z_i n$. (При $b_+ T_e / l^2 \approx 10^4$ $сек^{-1}$ имеем $\omega_0 \approx 10^4 (A/n_0)^{1/2}$.) Поэтому мы ограничились одной модой (см. [8]), когда пространственное распределение возмущения плотности заряженных частиц близко к стационарному пространственному распределению.

Таким образом, колебания плотности нейтральных частиц в определенных условиях могут существенно повлиять на дисперсию ионизационной волны. В рассматриваемом случае механизм этих колебаний такой же, как в известной задаче Вольтерра [9] о численности популяции двух видов рыб, когда рыбы одного вида питаются рыбами другого вида. Аналогичное рассмотрение можно провести в случае другого типа собственных колебаний. Например, при больших токах, когда ионизация в плазме имеет ступенчатый характер, взаимосвязь между плотностями электронов, нейтральных и метастабильных атомов может привести к собственным колебаниям с другой характерной частотой [4].

В заключение отметим, что неустойчивость, связанная с наличием отрицательных ионов, по-видимому, имеет общий характер для колебаний, обусловленных процессами ударной ионизации, при которых скорость рождения положительных ионов и электронов пропорциональна плотности электронов, а рекомбинация происходит на стенках, куда положительные ионы попадают в результате амбиполярной диффузии. В этих условиях наличие отрицательных ионов может привести к тому, что установившееся в стационаре соотношение между плотностями электронов и положительных ионов при распространении квазинейтральной ионизационной волны нарушится и при $|\delta n_e| / |\delta n_i| > n_e / n_i$ ионизационная волна окажется неустойчивой. Следует отметить, что случаи, когда примеси электроотрицательных газов способствовали появлению слоистого разряда, наблюдались экспериментально [10].

ВНИИФТРИ

Поступила в редакцию
20 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Недоспасов.* Успехи физ. наук, **94**, 1968.
2. *А. В. Недоспасов.* Proc. of a Symp. of MHD, Salzburg, **2**, 345, 1966.
3. *Ю. Р. Аланакян, Ю. М. Айвазян.* Ж. эксперим. и теор. физ., **59**, 1032, 1970.
4. *Ю. Р. Аланакян.* Теплофизика высоких температур, **11**, № 3, 1973.
5. *Ю. Р. Аланакян, Б. В. Вайнер.* Ж. техн. физ., **43**, № 4, 1973.
6. *Л. Пекарек.* Успехи физ. наук, **94**, 463, 1968.
7. *Б. И. Давыдов.* Ж. эксперим. и теор. физ., **7**, 1064, 1937.
8. *Л. Д. Цендин.* Ж. техн. физ., **40**, 1600, 1970.
9. *А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин.* Теория колебаний. Физматгиз, 1959, стр. 164.
10. *R. Neubert.* Z. Phys., **15**, 430, 1914; *К. Дарроу.* Электрические явления в газах. ДИТВУ. 1937, стр. 303.